Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

Objectif du problème et remarques liminaires :

— On se propose ici d'introduire les notions d'applications hölderiennes et « à variation bornée ».

— Les cinq parties du problème sont relativement indépendantes les unes des autres.

— L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours.

Notations :

- Si A et B sont deux ensembles, B^A est l'ensemble des applications de A dans B.
- Dans la suite, on note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ muni de ses lois usuelles.
- Dans tout le problème, $T \in \mathbb{R}^{+*}$, $\omega = \dfrac{2.\pi}{T}$ et on convient que $0^x = 0$ si $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
- Si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, alors $[\![p,q]\!]$ désigne l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, p \leq k \leq q\}$.
- Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$ et $n \in \mathbb{N}^*$, un élément $x = (x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ de $[a,b]^{[\![0,n]\!]}$ est dit subdivision de $[a,b]$ si, et seulement si, x est croissant et tel que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Si c'est le cas et $f \in \mathbb{C}^{[a,b]}$, on note $V_x(f)$ la somme (appelée variation de f relativement à x) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|$$

  En outre, $S_{[a,b]}$ désignera l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. Enfin, on dit que f est à variation bornée (sur $[a,b]$) si, et seulement si, l'ensemble $\{V_x(f), x \in S_{[a,b]}\}$ est majoré et, lorsque c'est le cas, on appelle variation de f (sur $[a,b]$) sa borne supérieure, que l'on note $V_{[a,b]}(f)$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, $C_T^p(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est classiquement le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ de classe C^p et T-périodiques. De plus, si $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, on note $H^\alpha(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{K}$ qui vérifient : $\exists c \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (x,y) \in I^2 \quad \left| f(y) - f(x) \right| \leq c. \left| y - x \right|^\alpha$
  On note aussi $H_T^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments de $H^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$ T-périodiques.
- Dans tout le problème, F est l'ensemble des éléments $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de E satisfaisant la condition :
  pour tout élément p de $\mathbb{N}$, z_n est négligeable devant $|n|^{-p}$ lorsque n tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
- Enfin, si $f \in C_T^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f)$ le nombre complexe :

$$\frac{1}{T}.\int_0^T \left(f(t).e^{-i.n.\omega.t}\right) dt$$

PARTIE I

1/ Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E.

2/ Constater que la suite $(z^{|n|}/|n|!)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à F si $z \in \mathbb{C}$.

3/ Soient P un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un nombre entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq n_0 \Rightarrow P(n) \neq 0.$$

b) En déduire que $(P(n).z^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à F si, et seulement si : $|z| < 1$.

4/ a) Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in C^1_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer que $f' \in C^0_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que $c_n(f') = i.n.\omega.c_n(f)$.

b) Prouver que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in F$ si $f \in C^\infty_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

PARTIE II

Dans toute la suite du problème, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5/ On suppose ici que $\alpha \in]1,+\infty[$.

a) Vérifier que, si $f \in H^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$, alors f est dérivable et préciser f'.

b) En déduire $H^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$ puis $H^\alpha_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

6/ Constater que, si $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, alors $H^\alpha_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ stable par $\times$.

7/ a) Montrer que, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un élément $\widetilde{x}$ de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \widetilde{x} = x + k.T \quad \text{et} \quad \left|y - \widetilde{x}\right| \leq T \quad \text{et} \quad \left|y - \widetilde{x}\right| \leq \left|y - x\right|.$$

b) En conclure que $H^\beta_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ contient $H^\alpha_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{+*2}$ et $\beta \leq \alpha$.

PARTIE III

Dans cette partie, $\alpha \in]0,1[$ et I_α est l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \left(u^{\alpha-2}.(1-\cos u)\right).du$$

8/ Justifier qu'il soit licite de considérer une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée f_α, continue, T-périodique, paire et satisfaisant :

$$\forall t \in]0, T/2] \quad f_\alpha(t) = t^\alpha$$

9/ a) Vérifier que : $\forall t \in]1,+\infty[\quad t^\alpha - 1 \leq (t-1)^\alpha$.

b) Prouver que $H^\alpha([0,T],\mathbb{K})$ contient la restriction de f_α à $[0,T]$.

c) En déduire que $f_\alpha \in H^\alpha_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Appartient-elle à $H^\beta_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ si $\beta \in]\alpha,+\infty[$?

10/ Montrer que I_α converge puis que $I_\alpha > 0$.

11/ a) Déterminer, en fonction de I_α, un équivalent de $c_n(f)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient-elle à F ?

PARTIE IV

Dans toute la suite du problème, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. De plus, $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des applications à variations bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

12/ a) Constater que, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors le uplet $(x_k)_{k\in[\![0,n+1]\!]}$ défini par

$$x_0 = 0,\ x_{n+1} = 1 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!]\ x_k = \frac{1}{2.(n+1-k)}$$

est une subdivision de $[0,1]$.

b) Montrer que l'application φ de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x.\cos\left(\dfrac{\pi}{2.x}\right)$ admet un prolongement à $[0,1]$ continu puis que celui-ci n'est pas à variation bornée.

13/ a) Constater que toute application monotone de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est à variation bornée et préciser sa variation.

b) Prouver que $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ contient $H^1([a,b],\mathbb{K})$. Qu'en déduit-on sur toute application de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ de classe C^1 ?

14/ a) Vérifier que $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

b) Soient $f \in \mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(t) = f(\lambda.t+\mu)$ est à variation bornée sur son domaine de définition. Comparer les variations de f et $\tilde{f}$.

15/ Soient $f \in \mathbb{K}^{[a,b]}$ et $c \in]a,b[$. Justifier que f est à variation bornée si, et seulement si, les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ le sont. Montrer que, sous cette hypothèse :

$$V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)\,.$$

16/ Soit $f \in C^0_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ telle que la restriction de f à $[0,T]$ soit à variation bornée. On considère $K \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,K]\!]}$ de $[0,T]$.

a) Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[(f(t)-f(x_k)).e^{-i.n.\omega.t}\right].dt\right| \leq \sum_{k=1}^{K}\left[V_{[x_{k-1},x_k]}(f).(x_k-x_{k-1})\right]$$

puis que :

$$\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x_k).e^{-i.n.2.\pi.t/T}\right].dt\right| \leq \frac{V_{[0,T]}(f)}{|n|.\omega}$$

b) En conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|c_n(f)\right| \leq \dfrac{V_{[0,T]}(f)}{2.\pi.|n|}$. Qu'en déduit-on sur $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$?

PARTIE V

Dans cette dernière partie, $\alpha \in]0,1[$ et $p \in]1, 1/\alpha[$. On se propose de prouver que $H^\alpha([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas inclus dans $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$.

17/ a) Exhiber un nombre réel ρ tel que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n = 1 - \rho . \sum_{k=1}^{n} k^{-p}$$

converge vers 0.

b) Vérifier qu'alors elle est à valeurs dans $]0,1]$ et qu'elle décroît.

18/ Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = \dfrac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}$ et on note g_n l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [0,1] \quad g_n(t) = \max\left\{0, \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2} - \left|t - \mu_n\right|\right\}$$

a) Représenter graphiquement (sans justification) l'application g_n, montrer que $g_n \in H^1([0,1],\mathbb{R})$ puis évaluer $V_{[0,1]}(g_n)$, lorsque $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer qu'il est légitime de considérer l'application h définie par :

$$\forall t \in [0,1] \quad h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(t)$$

puis que $h \in H^1([0,1],\mathbb{R})$.

c) Montrer que $h^\alpha \in H^\alpha([0,1],\mathbb{R})$.

19/ a) Evaluer $V_{[\lambda_n,1]}(h^\alpha)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que h^α n'appartient pas à $\mathrm{VB}([0,1],\mathbb{R})$.

20/ a) Conclure.

b) A quelle condition, portant sur l'élément β de $\mathbb{R}^{*+}$, $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ contient-il $H^\beta([a,b],\mathbb{K})$?

Fin