SESSION 1995

E.N.A.C Ingénieurs

FILIERE M

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES. OPTION

- PARTIE I -

a) 1) • E est le noyau d'une forme linéaire et donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et par restriction $d \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}[X])$.

• Soit $P \in E$. Si $P \in \text{Ker}(d)$, $P' = 0$ et donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$. L'égalité $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$ impose alors $P = 0$. Par suite $\text{Ker}(d) = \{0\}$ et d est injective.

• Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons

$$P(x) = \int_0^x Q(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)Q(t)\,dt.$$

D'une part, $D(P) = P' = Q$ et d'autre part

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x Q(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)Q(t)\,dt\right)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^x Q(t)\,dt\right)\,dx + \int_0^1 (x-1)Q(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x Q(t)\,dt + (x-1)Q(x)\right)dx = \int_0^1 \left((x-1)\int_0^x Q(t)\,dt\right)'\,dx \\ &= \left[(x-1)\int_0^x Q(t)\,dt\right]_{x=0}^{x=1} = 0.\end{aligned}$$

Donc $P \in E$ et ainsi $d(P) = Q$. On a montré que tout élément de $\mathbb{R}[X]$ a un antécédent par d dans E et donc que d est surjective. Finalement

$$\boxed{d \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } \mathbb{R}[X].}$$

2) D'après 1)

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R}, d^{-1}(Q)(x) = \int_0^x Q(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)Q(t)\,dt.}$$

b) 1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $B_1(x) = \displaystyle\int_0^x dt + \int_0^1 (t-1)\,dt = x + \left(\frac{1}{2} - 1\right) = x - \frac{1}{2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $B_2(x) = \displaystyle\int_0^x (t - \frac{1}{2})\,dt + \int_0^1 (t-1)(t-\frac{1}{2})\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$.

$$\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2} \text{ et } B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}.}$$

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)\,dt = \int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt.$$

Maintenant, puisque $n-1 \geq 1$, $B_{n-1} = \Phi(B_{n-2})$ et donc $B_{n-1} \in E$ ou encore $B_n(1) - B_n(0) = \displaystyle\int_0^1 B_{n-1}(t)\ dt = 0$. Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ B_n(0) = B_n(1).}$$

c) 1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P'_{n+1} = \left((-1)^{n+1} B_{n+1}(1-X)\right)' = -(-1)^{n+1} B'_{n+1}(1-X) = (-1)^n B_n(1-X) = P_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P'_{n+1} = P_n.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 1), $D(P_{n+1}) = P_n$. De plus

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_{n+1}(t)\ dt &= (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(1-t)\ dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(u)\ du \text{ (en posant } u = 1-t)\\ &= 0 \text{ car } B_{n+1} \in E \text{ pour } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Donc $P_{n+1} \in E$ et finalement $d(P_{n+1}) = P_n$ ou encore $\Phi(P_n) = P_{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \Phi(P_n) = P_{n+1}.}$$

3) $P_0 = B_0 = 1$. Par suite, pour tout entier naturel n,

$$P_n = \Phi^n(P_0) = \Phi^n(B_0) = B_n.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-X) = (-1)^n B_n.}$$

d) 1) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$D(Q_{n+1}) = p^n \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{p} B'_{n+1}\left(\frac{X+j}{p}\right) = p^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} B_n\left(\frac{X+j}{p}\right) = Q_n.$$

De plus,

$$\int_0^1 Q_{n+1}(t)\ dt = p^n \sum_{j=0}^{p-1} \int_0^1 B_{n+1}\left(\frac{t+j}{p}\right)\ dt = p^n \sum_{j=0}^{p-1} \int_{j/p}^{(j+1)/p} B_{n+1}(u)\ p du = p^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(u)\ du = 0 \text{ (car } n+1 \geq 1).$$

Donc $d(Q_{n+1}) = Q_n$ ou encore $\Phi(Q_n) = Q_{n+1}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Phi(Q_n) = Q_{n+1}.}$$

2) $Q_0 = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} 1 = 1 = B_0$ et donc, comme en c)3), pour tout entier naturel n, $Q_n = B_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ B_n = p^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} B_n\left(\frac{X+j}{p}\right).}$$

e) 1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$R'_{n+1} = B'_{n+2}(X+1) - B'_{n+2} = B_{n+1}(X+1) - B_{n+1} = R_n,$$

De plus d'après b)2), $R_{n+1}(0) = B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0) = 0$. Ainsi, R_{n+1} est la primitive de R_n qui s'annule en 0 et finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ R_{n+1}(x) = \int_0^x R_n(t)\ dt.}$$

2) $R_0 = \left(X + \frac{1}{2}\right) - \left(X - \frac{1}{2}\right) = 1$ et donc par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \frac{X^n}{n!}.}$$

3) Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\sum_{k=1}^{m} k^n = n! \sum_{k=1}^{m} R_n(k) = n! \sum_{k=1}^{m} (B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)) = n!(B_{n+1}(m+1) - Bn + 1(1)) = n!(B_{n+1}(m+1) - Bn + 1(0)).$$

$$\boxed{\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \sum_{k=1}^{m} k^n = n!(B_{n+1}(m+1) - Bn + 1(0)).}$$

- PARTIE II -

a) 1) B_n est un polynôme de degré n. La formule de Taylor fournit

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{B_n^{(j)}(0)}{j!} X^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{B_{n-j}(0)}{j!} X^j = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j} \frac{X^j}{j!}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j} \frac{X^j}{j!}.}$$

2) $b_0 = B_0(0) = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $B_n \in E$, on a

$$0 = \int_0^1 B_n(x)\ dx = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j} \int_0^1 \frac{x^j}{j!}\ dx = \sum_{j=0}^{n} \frac{b_{n-j}}{(j+1)!},$$

et donc

$$\boxed{b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n-j}}{(j+1)!}.}$$

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $2k+1 \geq 2$, d'après I.b)2), $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1)$ et d'après I.c)3), $B_{2k+1}(0) = (-1)^{2k+1} B_{2k+1}(1) = -B_{2k+1}(1)$. Par suite, $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_{2k+1} = 0.}$$

b) • Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après I.d)2), pour tout réel x, on a

$$B_n(x) = 2^{n-1} \left(B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \right),$$

et en particulier pour $x = 0$, on obtient

$$b_n = 2^{n-1} \left(b_n + B_n\left(\frac{1}{2}\right) \right) \text{ et donc } B_n\left(\frac{1}{2}\right) = b_n(2^{1-n} - 1).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n\left(\frac{1}{2}\right) = b_n(2^{1-n} - 1).}$$

En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient aussi $B_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{1}{4}\right) + B_n\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2^{n-1}(1 + (-1)^n)B_n\left(\frac{1}{4}\right)$. Si de plus $n = 2k$ est un nombre pair, on obtient $B_{2k}\left(\frac{1}{4}\right) = 2^{-2k}B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-2k}(2^{-2k} - 1)b_{2k}$.

Pour $x = \frac{1}{3}$, on obtient $B_n\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{1}{6}\right) + B_n\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{1}{6}\right) + (-1)^n B_n\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ et donc $B_n\left(\frac{1}{6}\right) = (2^{1-n} - (-1)^n)B_n\left(\frac{1}{3}\right)$.

• D'après I.d)2), pour tout réel x, on a aussi

$$B_n(x) = 3^{n-1}\left(B_n\left(\frac{x}{3}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{3}\right) + B_n\left(\frac{x+2}{3}\right)\right)$$

$x = 0$ fournit alors $b_n = B_n(0) = 3^{n-1}\left(B_n(0) + B_n\left(\frac{1}{3}\right) + B_n\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 3^{n-1}\left(b_n + (1 + (-1)^n)B_n\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ et donc si $n = 2k$ est pair,

$$B_{2k}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}(3^{1-2k} - 1)b_{2k} \text{ et } B_{2k}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}(2^{1-2k} - 1)(3^{1-2k} - 1)b_{2k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ B_{2k}\left(\frac{1}{4}\right) = 2^{-2k}(2^{-2k} - 1)b_{2k},\ B_{2k}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}(3^{1-2k} - 1)b_{2k} \text{ et } B_{2k}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}(2^{1-2k} - 1)(3^{1-2k} - 1)b_{2k}.}$$

c) 1) Pour $x \in]0, \frac{1}{2}[$, $(-1)^1 B_1(x) = \frac{1}{2} - x > 0$.

$$\boxed{\text{Pour } m = 1,\ \forall x \in]0, \tfrac{1}{2}[,\ (-1)^1 B_1(x) > 0.}$$

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[$, $(-1)^m B_{2m-1}(x) > 0$.

La dérivée de $(-1)^m B_{2m}$ est $(-1)^m B_{2m-1}$ et donc la fonction $(-1)^m B_{2m}$ est une fonction strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. De plus, d'après II.b)2),

$$(-1)^m B_{2m}(0) \times (-1)^m B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) = b_{2m}^2(2^{1-2m} - 1) \leq 0.$$

D'autre part, on ne peut avoir $(-1)^m B_{2m}(0) \times (-1)^m B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ car $B_{2m}(0)$ et $B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)$ seraient simultanément nuls (toujours d'après II.b)2)) contredisant ainsi la stricte croissance de la fonction $(-1)^m B_{2m}$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. Par suite, la fonction $(-1)^m B_{2m}$ s'annule une et une seule fois sur $[0, \frac{1}{2}]$ en un certain réel θ_m de $]0, \frac{1}{2}[$.

3) Puisque la fonction $(-1)^m B_{2m}$ est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, la fonction $(-1)^m B_{2m}$ est strictement négative sur $[0, \theta_m[$ et strictement positive sur $]\theta_m, \frac{1}{2}]$ et puisque $((-1)^{m+1}B_{2m+1})' = -(-1)^m B_{2m}$, la fonction $(-1)^{m+1}B_{2m+1}$ est strictement croissante sur $[0, \theta_m]$ et strictement décroissante sur $[\theta_m, 1]$. Enfin, puisque $m \geq 1$, $B_{2m+1}(0) = 0$ d'après II.a)3) et d'après II.b), $B_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Finalement, la fonction $(-1)^{m+1}B_{2m+1}$ est strictement positive sur $]0, \frac{1}{2}[$.

4) Pour $m = 1$, la fonction $(-1)^m B_{2m-1}$ est strictement positive sur $]0, \frac{1}{2}[$ et si pour $m \geq 1$, la fonction $(-1)^m B_{2m-1}$ est strictement positive sur $]0, \frac{1}{2}[$ alors d'après 3), la fonction $(-1)^{m+1} B_{2m+1}$ est strictement positive sur $]0, \frac{1}{2}[$. On vient de montrer par récurrence que,

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } (-1)^m B_{2m-1} \text{ est strictement positive sur }]0, \frac{1}{2}[.}$$

Mais alors, d'après 2),

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } (-1)^m B_{2m} \text{ s'annule une fois et une seule sur } [0, \frac{1}{2}] \text{ en un certain réel } \theta_m \in]0, \frac{1}{2}[.}$$

5) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$B_{2m}\left(\frac{1}{4}\right) B_{2m}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}(2^{1-2m} - 1)(3^{1-2m} - 1)2^{-2m}(2^{-2m} - 1)b_{2m}^2 < 0,$$

($B_{2m}\left(\frac{1}{4}\right)$ et $B_{2m}\left(\frac{1}{6}\right)$ ne pouvant être simultanément nuls) ce qui montre que

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \theta_m \in]\frac{1}{6}, \frac{1}{4}[.}$$

d) 1) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après l'étude des variations de la fonction $(-1)^m B_{2m}$ faite à la question c)2),

$$\text{Max}\left\{|B_{2m}(x)|, \ x \in [0, \frac{1}{2}]\right\} = \text{Max}\left\{|B_{2m}(0)|, |B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)|\right\}.$$

Mais $|B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)| = (1 - 2^{1-2m})|B_{2m}(0)| \leq |B_{2m}(0)|$ et donc $\text{Max}\left\{|B_{2m}(0)|, |B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)|\right\} = |B_{2m}(0)| = |b_{2m}|$. Finalement,

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \text{Max}\left\{|B_{2m}(x)|, \ x \in [0, \frac{1}{2}]\right\} = |b_{2m}|.}$$

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $\text{Max}\left\{|B_{2m}(x)|, \ x \in [\frac{1}{2}, 1]\right\} = \text{Max}\left\{|B_{2m}(1 - x)|, \ x \in [0, \frac{1}{2}]\right\} = \text{Max}\left\{|B_{2m}(x)|, \ x \in [0, \frac{1}{2}]\right\}$. Par suite, $\text{Max}\{|B_{2m}(x)|, \ x \in [0, 1]\} = \text{Max}\left\{|B_{2m}(x)|, \ x \in [0, \frac{1}{2}]\right\} = |b_{2m}|$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \text{Max}\{|B_{2m}(x)|, \ x \in [0, 1]\} = |b_{2m}|.}$$

- PARTIE III -

a) La restriction de $\tilde{P}$ à $]0, 1[$ est classe C^1 sur $]0, 1[$ et se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. $\tilde{P}$ est donc de classe C^1 par morceaux sur $[0, 1]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

$\tilde{P}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et d'autre part

$$\frac{1}{2}(\tilde{P}(0^+) + \tilde{P}(0^-)) = \frac{1}{2}(P(0) + P(1)) = \tilde{P}(0).$$

Par 1-périodicité, $\tilde{P}$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{2}(\tilde{P}(x^+) + \tilde{P}(x^-)) = \tilde{P}(x).$$

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $\tilde{P}$ converge simplement vers $\tilde{P}$ sur $\mathbb{R}$. Donc,

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{P}(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(2k\pi x) + b_k \sin(2k\pi x)) \text{ où} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 2\displaystyle\int_0^1 P(t)\cos(2k\pi t)\ dt \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k = 2\displaystyle\int_0^1 P(t)\sin(2k\pi t)\ dt.\end{array}}$$

b) 1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $x \in \mathbb{Z}$, puisque $\tilde{B}_{2n}$ est 1-périodique, on a $\tilde{B}_n(-x) = \tilde{B}_{2n}(x)$.
- Si $x \notin \mathbb{Z}$, on a $E(x) < x < E(x) + 1$ et donc $0 < -x + E(x) + 1 < 1$. Puisque $\tilde{B}_{2n}$ est 1-périodique

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{2n}(-x) &= \tilde{B}_{2n}(-x + E(x) + 1) = B_{2n}(-x + E(x) + 1) = (-1)^{2n} B_{2n}(1 - (-x + E(x) + 1)) \\ &= B_{2n}(x - E(x)) = \tilde{B}_{2n}(x - E(x)) = \tilde{B}_{2n}(x).\end{aligned}$$

Finalement, la fonction $\tilde{B}_{2n}$ est paire.

$\tilde{B}_{2n}$ est continue sur $]0, 1[$. De plus, d'après I.b)2),

$$\tilde{B}_{2n}(0) = \frac{1}{2}(B_{2n}(0) + B_{2n}(1)) = B_{2n}(0) = B_{2n}(0^+) = \tilde{B}_{2n}(0^+),$$

et

$$\tilde{B}_{2n}(1) = \tilde{B}_{2n}(0) = B_{2n}(0^+) = B_{2n}(1^-) = \tilde{B}_{2n}(1^-).$$

Ainsi, $\tilde{B}_{2n}$ est continue sur $[0, 1]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \tilde{B}_{2n} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et paire.}}$$

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'égalité $\tilde{B}_{2n-1}(-x) = -\tilde{B}_{2n-1}(x)$ est vraie quand $x \in \mathbb{Z}$ par 1-périodicité. Si $x \notin \mathbb{Z}$, d'après I.c)3)

$$\tilde{B}_{2n-1}(-x) = \tilde{B}_{2n-1}(-x + E(x) + 1) = -B_{2n-1}(x - E(x)) = -\tilde{B}_{2n-1}(x - E(x)) = -\tilde{B}_{2n-1}(x).$$

Finalement, $\tilde{B}_{2n-1}$ est impaire.

Soit $n \geq 2$. D'après I.b)2), $B_{2n-1}(0) = B2n - 1(1) = 0$ et comme en 1), $\tilde{B}_{2n-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tilde{B}_{2n-1} \text{ est impaire et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tilde{B}_{2n-1} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

c) 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_0(n) = \displaystyle\int_0^1 B_{2n}(x)\ dx = 0$ (car $B_{2n} \in E$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_0(n) = 0.}$$

2) Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}I_k(n+1) &= \int_0^1 B_{2n+2}(x)\cos(2k\pi x)\ dx = \frac{1}{2k\pi}\left([B_{2n+2}(x)\sin(2k\pi x)]_0^1 - \int_0^1 B'_{2n+2}(x)\sin(2k\pi x)\ dx\right) \\ &= -\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 B_{2n+1}(x)\sin(2k\pi x)\ dx = \frac{1}{4k^2\pi^2}\left([B_{2n+1}(x)\cos(2k\pi x)]_0^1 - \int_0^1 B_{2n}(x)\cos(2k\pi x)\ dx\right) \\ &= -\frac{1}{4k^2\pi^2} I_k(n) \text{ (car pour } n \geq 1,\ B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ I_k(n+1) = -\frac{1}{4k^2\pi^2} I_k(n).}$$

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Deux nouvelles intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}
I_k(1) &= \int_0^1 B_2(x)\cos(2k\pi x)\ dx = \frac{1}{2k\pi}\left([B_2(x)\sin(2k\pi x)]_0^1 - \int_0^1 B_1(x)\sin(2k\pi x)\ dx\right) = -\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 B_1(x)\sin(2k\pi x)\ dx \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}\left([B_1(x)\cos(2k\pi x)]_0^1 - \int_0^1 B_0(x)\cos(2k\pi x)dx\right) = \frac{1}{4k^2\pi^2}(B_1(1) - B_1(0) - I_k(0)) \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ I_k(1) = \frac{1}{4k^2\pi^2}.}$$

4) Mais alors, pour $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $I_k(n) = \left(-\frac{1}{4k^2\pi^2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4k^2\pi^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}$.

$$\boxed{\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ I_k(n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction $\tilde{B}_{2n}$ est paire, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\beta_k(\tilde{B}_{2n}) = 0$ puis pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_k(\tilde{B}_{2n}) = 2\int_0^1 \tilde{B}_{2n}(x)\ dx = 2I_k(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } k = 0 \\ \dfrac{2(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}} \text{ si } k \geq 1. \end{cases}.$$

Soit alors $x \in [0,1]$. D'après III.a)

$$\tilde{B}_{2n}(x) = B_{2n}(x) = \frac{\alpha_0(\tilde{B}_{2n})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(\tilde{B}_{2n})\cos(2k\pi x) + \beta_k(\tilde{B}_{2n})\sin(2k\pi x)) = 2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2n}}\cos(2k\pi x).$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ B_{2n}(x) = 2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2n}}\cos(2k\pi x).}$$

5) En particulier, si $x = 0$, on obtient

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n-1}}{2^{2n}\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}},$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}b_{2n}.}$$

.

d) 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1 \leq 1 + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} \leq 1 + \sum_{k=2}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^{2n}}\ dt = 1 + \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2n}}\ dt = 1 + \frac{1}{2n-1},$$

et d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = 1.}$$

2) D'après c)5) et d)1),

$$\boxed{b_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}.}$$

3) On a vu que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{2n} \neq 0$. Soit $x \in [0,1]$. D'après d)1) et 2)

$$\left|\frac{1}{b_{2n}}\sum_{k=2}^{+\infty} 2\frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^n}\cos(2k\pi x)\right| \leq \frac{2}{|b_{2n}|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^n}\frac{(2\pi)^n}{2} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Donc

$$\frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}(0)} \underset{n\to+\infty}{=} 2\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\frac{\cos(2\pi x)}{b_{2n}} + o(1) = \cos(2\pi x) + o(1),$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in [0,1]\ \lim_{n\to+\infty}\frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}(0)} = \cos(2\pi x).}$$

e) 1) $\tilde{B}_1$ est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et vérifie en tout réel x, $\tilde{B}_1(x) = \frac{1}{2}(\tilde{B}_1(x^+) + \tilde{B}_1(x^-))$ (car $\frac{1}{2}(\tilde{B}_1(0^+) + \tilde{B}_1(0^-)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 = \tilde{B}_1(0)$). D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $\tilde{B}_1$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{B}_1$.

Puisque $\tilde{B}_1$ est impaire, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k(\tilde{B}_1) = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$b_k(\tilde{B}_1) = 2\int_0^1\left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(2k\pi t)\ dt = \left[-(2t-1)\frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1\cos(2k\pi t)\ dt = -\frac{1}{k\pi}.$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{B}_1(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2k\pi x)}{k}.}$$

2) Soit $n \geq 2$.

• On sait que la série de fonctions de terme général $f_k\ :\ x \mapsto 2\frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}\cos(2k\pi x)$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction B_{2n}.

• Chaque fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$,

$$f'_n(x) = 2\frac{(-1)^n}{(2k\pi)^{2n-1}}\sin(2k\pi x).$$

• Pour $x \in [0,1]$, $|f'_k(x)| \leq \frac{2}{(2k\pi)^{2(n-1)}}$. Comme $\frac{2}{(2k\pi)^{2(n-1)}}$ est le terme général d'une série numérique convergente puisque $2n-1 \geq 3 > 1$, la série de fonctions de terme général f'_n converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, pour $x \in [0,1]$,

$$B_{2n-1}(x) = B'_{2n}(x) = 2(-1)^n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2k\pi x)}{(2k\pi)^{2n-1}}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \forall x \in [0,1],\ B_{2n-1}(x) = 2(-1)^n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2k\pi x)}{(2k\pi)^{2n-1}}.}$$

- PARTIE IV -

a) 1) Deux intégrations par parties fournissent

$$J_1 = \int_0^1 (B_2(t) - B_2(0))f''(t)\,dt = [(B_2(t) - B_2(0))f'(t)]_0^1 - \int_0^1 B_1(t)f'(t)\,dt = -\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,dt$$
$$= \left[-\left(t - \frac{1}{2}\right) f(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f(t)\,dt = -\frac{f(0) + f(1)}{2} + \int_0^1 f(t)\,dt,$$

et donc

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} + J_1.}$$

2) Soit $k \geq 2$. Deux intégrations par parties fournissent

$$J_k = \int_0^1 (B_{2k}(t) - B_{2k}(0))f^{(2k)}(t)\,dt = \left[(B_{2k}(t) - B_{2k}(0)f^{(2k-1)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 B_{2k-1}(t)f^{(2k-1)}(t)\,dt$$
$$= -\int_0^1 B_{2k-1}(t)f^{(2k-1)}(t)\,dt \text{ (car } B_{2k}(1) - B_{2k}(0) = 0)$$
$$= -\left[B_{2k-1}(t)f^{(2k-2)}(t)\right]_0^1 + \int_0^1 B_{2k-2}(t)f^{(2k-2)}(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 (B_{2k-2}(t) - B_{2k-2}(0))f^{(2k-2)}(t)\,dt + \int_0^1 B_{2k-2}(0)f^{(2k-2)}(t)\,dt \text{ (car pour } k \geq 2,\ B_{2k-1}(0) = B_{2k-1}(1) = 0)$$
$$= J_{k-1} + b_{2k-2}\int_0^1 f^{(2k-2)}(t)\,dt = J_{k-1} + b_{2k-2}(f^{(2k-3)}(1) - f^{(2k-3)}(0)).$$

Donc

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ J_k - J_{k-1} = b_{2k-2}(f^{(2k-3)}(1) - f^{(2k-3)}(0)).}$$

3) Soit $n \geq 1$.

$$J_n - J_1 = \sum_{k=2}^{n}(J_k - J_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} b_{2k-2}\left(f^{(2k-3)}(1) - f^{(2k-3)}(0)\right) = \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j}\left(f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)\right).$$

Par suite, d'après IV.a)1)

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) + J_1 = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j}(f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)) + J_n.$$

Formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j}(f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)) + \int_0^1 (B_{2n}(t) - B_{2n}(0))f^{(2n)}(t)\,dt.}$$

b) 1) Soient $n \geq 2$ et α un nombre complexe non nul tel que $|\alpha| < 2\pi$. IV.a)3) appliqué à la fonction $f\ :\ t \mapsto e^{\alpha t}$ fournit

$$\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{1}{2}(e^\alpha + 1) - \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j}\alpha^{2j-1}(e^\alpha - 1) + \alpha^{2n}\int_0^1 e^{\alpha t}(B_{2n}(t) - B_{2n}(0))\,dt.$$

Puisque $\alpha \notin 2i\pi\mathbb{Z}$, $e\alpha - 1 \neq 0$. Après multiplication des deux membres de l'égalité précédente par α et division par $e^\alpha - 1$, on obtient

$$1 = \frac{\alpha}{2}\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1} - \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j}\alpha^{2j} + \frac{\alpha^{2n+1}}{e^{\alpha}-1}\int_0^1 e^{\alpha t}(B_{2n}(t) - B_{2n}(0))\ dt.$$

Finalement

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \forall \alpha \in \mathbb{C},\ 0 < |\alpha| < 2\pi \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1} = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} b_{2j}\alpha^{2j} + \rho_n(\alpha) \\ \text{où } \rho_n(\alpha) = \dfrac{-\alpha^{2n+1}}{e^{\alpha}-1}\displaystyle\int_0^1 e^{\alpha t}(B_{2n}(t) - b_{2n})\ dt.\end{array}}$$

2) Soient $n \geq 2$ et α un nombre complexe non nul tel que $|\alpha| < 2\pi$.

$$\begin{aligned}|\rho_n(\alpha)| &\leq \frac{|\alpha|^{2n+1}}{|e^{\alpha}-1|}\int_0^1 e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}|B_{2n}(t) - B_{2n}(0)|\ dt \leq \frac{|\alpha|^{2n+1}}{|e^{\alpha}-1|}\int_0^1 e^{|\alpha|t}|B_{2n}(t)| + |B_{2n}(0|)\ dt \\ &\leq \frac{2|\alpha|^{2n+1}|b_{2n}|}{|e^{\alpha}-1|}\int_0^1 e^{|\alpha|t}\ dt \text{ (d'après II.d)2))} \\ &\leq \frac{2|\alpha|^{2n+1}|b_{2n}|e^{|\alpha|}}{|e^{\alpha}-1|}.\end{aligned}$$

Maintenant, d'après III.d)2)

$$\frac{2|\alpha|^{2n+1}|b_{2n}|e^{|\alpha|}}{|e^{\alpha}-1|} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\frac{|\alpha|e^{|\alpha|}}{|e^{\alpha}-1|}\left(\frac{|\alpha|}{2\pi}\right)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0 \text{ (puisque } |\alpha| < 2\pi),$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n(\alpha) = 0$. Ainsi, la série de terme général $b_{2j}\alpha^{2j}$ converge et

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{C},\ 0 < |\alpha| < 2\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2}\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} b_{2j}\alpha^{2j}.}$$

c) Soient $x \in]-\pi;\pi[$ puis $\alpha = 2ix$. α est un complexe non nul de module strictement plus petit que 2π. D'après la question précédente, on a

$$x \operatorname{cotan} x = \frac{2ix}{2}\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} b_{2j}(2ix)^{2j} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} b_{2j}(-1)^j 2^{2j} x^{2j},$$

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\},\ x \operatorname{cotan} x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 2^{2n} b_{2n} x^{2n}.}$$

Le rayon de la série entière précédente est donc supérieur ou égal à π. Mais, quand x tend vers π par valeurs inférieures, $x \operatorname{cotan} x$ tend vers $+\infty$ et donc $R = \pi$.

