Résumé du cours d'analyse de Sup et Spé

1 Topologie

1.1 Normes, normes équivalentes

Une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0 \text{ (positivité)} \\ \forall x \in E,\ (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0) \text{ (axiome de séparation)} \\ \forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \text{ (homogénéité)} \\ \forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire).} \end{array}}$$

Normes équivalentes. Les normes N et N' sont équivalentes si et seulement si il existe deux réels **strictement** positifs α et β tel que $\forall x \in E,\ \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$. Il revient au même de dire que la fonction $\dfrac{N'}{N}$ est bornée sur $E \setminus \{0\}$.

Théorème. Si E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, toutes les normes sont équivalentes.

1.2 Voisinage

Soit $x \in E$. Un voisinage de x est une partie de l'espace vectoriel normé (E, N) qui contient une boule ouverte non vide de centre x.
L'ensemble des voisinages de x se note $\mathscr{V}(x)$. Si V est une partie de E, $(V \in \mathscr{V}(X) \Leftrightarrow \exists r > 0/\ B_o(x, r) \subset V)$.

Théorème. Une réunion quelconque de voisinage de x est un voisinage de x. Une intersection finie de voisinage de x est un voisinage de x.

1.3 Ouverts, intérieur.

Ouvert. Un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N) est soit $\varnothing$, soit une partie non vide de E voisinage de chacun de ses points. Si O est une partie non vide de E, (O est ouvert$\Leftrightarrow \forall x \in O,\ \exists r > 0/\ B_o(x, r) \subset O$).

Théorème. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Intérieur. Un élément x de $A \neq \varnothing$ est intérieur à A si et seulement si A est voisinage de x. $(\forall x \in E,\ (x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathscr{V}(x))$.
L'intérieur d'une partie non vide A est l'ensemble des points de A dont A est voisinage.

Théorème. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Théorème. A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

1.4 Fermés, adhérence

Fermé. A est fermé si et seulement si le complémentaire de A est ouvert.

Théorème. Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une réunion finie de fermés est un fermé.

Théorème (caractérisation séquentielle des fermés). Une partie non vide A est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A converge dans A.

Adhérence. Un élément x de E est adhérent à A si et seulement si tout voisinage de x rencontre A
$\forall x \in E,\ (x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing)$. L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Théorème. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Théorème. A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Théorème. x est adhérent à $A \neq \varnothing$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A convergente de limite x.

$\varnothing$ et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

1.5 Compacts

Une partie non vide K de E est compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K. $\varnothing$ est compact par convention.

Théorème. Si K est compacte, K est fermée et bornée.

Théorème (de Borel-Lebesgue). Si (E, N) est un evn de dimension finie, les compacts sont les parties fermées et bornées.

Théorème (de Bolzano-Weierstrass). Si (E, N) est un evn de dimension finie, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

2 Fonctions

2.1 Connexité par arcs

Définition. Soit A une partie non vide de E. A est connexe par arcs si et seulement si, pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ définir et continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans E telle que
- $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$;
- $\forall t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in A$.

Théorème. Un convexe non vide est connexe par arcs.

2.2 Continuité

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une application d'un evn (E, N) dans un evn (E', N'). Si f est continue sur E, l'image d'un connexe par arcs de E est un connexe par arcs de E'.
En particulier, si f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par f est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème (images réciproques d'ouverts ou de fermé). f va d'une partie D d'un evn (E, N) dans un evn (E', N').
f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de (E', N') est un ouvert de D, c'est-à-dire l'intersection d'un ouvert de E avec D.
f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de (E', N') est un fermé de D, c'est-à-dire l'intersection d'un fermé de E avec D.

Théorème (image continue d'un compact). f va d'une partie D d'un evn (E, N) dans un evn (E', N'). Si f est continue sur D, l'image directe d'un compact de D est un compact de (E', N').
En particulier, si f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, l'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par f est un segment de $\mathbb{R}$.

Théorème de Heine. Si f est continue sur un compact, alors f est uniformément continue sur ce compact.

Théorème (continuité de la norme). L'application $\begin{array}{rccc} N : & (E, N) & \rightarrow & (\mathbb{R}, |\ |) \\ & x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue.

Théorème (continuité d'une application linéaire). f est une application linéaire de $(E, \|\ \|_E)$ dans $(F, \|\ \|_F)$.
f est continue sur E si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+ / \ \forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$.
Si E est de dimension finie, toute application linéaire, forme linéaire, application multilinéaire ... est continue sur E.

Conséquence. Les sev d'un evn de dimension finie sont fermés.

2.3 Dérivation

Théorème de Rolle. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont faux pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ou les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

Théorème. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si f est continue sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b]$ et si f' a une limite réelle ou complexe en a, alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$.

Formule de Taylor-Laplace. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe C^{n+1} sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Inégalité des accroissements finis. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dérivable sur I. On suppose que $|f'|$ est majorée par le réel M sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

Inégalité de Taylor-Lagrange. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n+1$ fois dérivable sur I. On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par le réel M_{n+1} sur I. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \frac{M_{n+1}(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

2.4 Intégration

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tout x_0 de I, la fonction $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

3 Séries numériques

Règle de d'Alembert. (u_n) est une suite complexe, ne s'annulant pas à partir d'un certain rang telle que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ a une limite $\ell \in [0, +\infty]$.

- Si $0 \leqslant \ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument.
- Si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Si les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes, alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ converge et dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Critère spécial aux séries alternées (ou théorème de Leibniz). Soit (u_n) une suite réelle alternée en signe, dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Alors, la série de terme général u_n converge.
De plus, S, S_n et R_n sont du signe de leur premier terme et leur valeur absolue est majorée par la valeur absolue de leur premier terme.

Théorème (séries télescopiques). Soit (a_n) une suite complexe. La suite (a_n) et la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ sont de même nature.

Comparaison séries-intégrales. Si f est une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\ dt - f(n)$ converge.
En particulier, la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Théorème (sommation des relations de comparaison). Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles strictement **positives** telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Si la série de terme général a_n converge, alors la série de terme général b_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

(**règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes**).

Si la série de terme général a_n diverge, alors la série de terme général b_n diverge et

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} b_k$$

(**règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes**).

Théorème de Fubini. Soit $(u_{i,j})$ une suite complexe double. Si Pour tout i, la série de terme général $u_{i,j}$ est absolument convergente et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|u_{i,j}|\right) < +\infty$, alors la suite $(u_{i,j})$ est sommable et de plus, $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)$.

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Suites de fonctions

1) Convergence simple, uniforme
(f_n) converge simplement sur D vers f si et seulement si, pour chaque x de D, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.
(f_n) converge uniformément vers f sur D si et seulement si la suite $(\|f - f_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Interversion des limites
Théorème d'interversion des limites. a est adhérent à D (a réel, infini...).
Si chaque f_n a une limite ℓ_n (réelle, complexe) quand x tend vers a et si (f_n) converge uniformément vers f sur D, alors :
- f a une limite quand x tend vers a ;
- la suite (ℓ_n) converge ;
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\lim\limits_{x\to a} f_n(x))$.)

Ce théorème marche aussi si les ℓ_n sont $+\infty$ ($-infty$) à partir d'un certain rang.

3) Continuité.
Théorème. Si (f_n) converge uniformément vers f sur D et si chaque f_n est continue sur D, alors f est continue sur D (une limite uniforme de fonctions continues est continue)

4) Dérivation.
Théorème. Si
- (f_n) converge simplement vers f sur D ;
- chaque f_n est dérivable sur D ;
- la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur D (vers sa limite).

Alors, f est dérivable sur D et $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n$ (c'est-à-dire $\dfrac{d}{dx}(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{d}{dx} f_n\right)$.)

Théorème (généralisation). Si
- (f_n) converge simplement vers f sur D ;
- chaque f_n est de classe C^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ sur D ;
- les suites des dérivées $(f_n^{(k)})$, $1 \leqslant k \leqslant p$, convergent toutes uniformément sur D (vers leur limite).

Alors, f est de classe C^p sur D et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f^{(k)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$.

5) Intégration
Théorème (convergence uniforme sur un segment). Si chaque f_n est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors :
- f est continue par morceaux sur D ;
- la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ converge ;
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$ (c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$).

Théorème de convergence dominée. (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\,dx$.

4.2 Séries de fonctions

1) Convergence simple, uniforme, absolue, normale
La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D vers S si et seulement si, pour chaque x de D, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge vers $S(x)$.
La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D vers S si et seulement si la suite $(\|R_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
La série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur D si et seulement si, pour chaque x de D, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument.

La série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur D (vers S) si et seulement si la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.

2) Interversion des limites

Théorème d'interversion des limites. a est adhérent à D (a réel, infini...).
Si chaque f_n a une limite ℓ_n quand x tend vers a et si la série de fonction de terme général f_n converge uniformément vers S sur D, alors :

- S a une limite quand x tend vers a ;
- la série numérique de terme général ℓ_n converge ;
- $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

3) Continuité

Théorème. Si la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers S sur D et si chaque f_n est continue sur D, alors S est continue sur D.

4) Dérivation terme à terme

Théorème de dérivation terme à terme. Si

- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers S sur D,
- chaque f_n est dérivable sur D,
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur D,

alors, S est dérivable sur D et $S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f'_n$

Théorème (généralisation). Si

- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers S sur D,
- chaque f_n est de classe C^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ sur D,
- les séries de termes généraux $(f_n^{(k)})$, $1 \leqslant k \leqslant p$, convergent toutes uniformément sur D,

alors, S est de classe C^p sur D et $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $S^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Revoir l'étude de la fonction ζ de Riemann.

5) Intégration terme à terme

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment). Si chaque f_n est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ et si la série de terme général f_n converge uniformément vers S sur $[a,b]$, alors :

- S est continue par morceaux sur $[a,b]$;
- la série de terme général $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ converge ;
- $\int_a^b S(x)\,dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Théorème d'intégration terme à terme. Si chaque f_n est continue par morceaux et intégrable sur I, si la série de terme général f_n converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I et si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$, alors S est intégrable sur I et $\int_I S(x)\,dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

5 Séries entières

1) Rayon de convergence $R_a = \sup\{r \in [0,+\infty[\ /\ (|a_n|r^n) \text{ bornée}\}$.

2) Convergence normale

Théorème. $\sum a_n r^n$ converge normalement sur tout $[-r,r]$ (resp. tout disque fermé de rayon r) où $r < R_a$.

Théorème. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Idem pour primitive par intégration terme à terme.
Les différents rayons de convergence considérés sont égaux.

Théorème. Si pour tout $x \in]-R_a, R_a[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

6 Intégrales dépendant d'un paramètre

I est une partie de $\mathbb{R}$ et J est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

$f : \begin{array}{ccc} I \times J & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$ est une fonction de deux variables, définie sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$\text{Pour } x \in I, \text{ on pose } F(x) = \int_J f(x,t)\, dt.$$

Théorème de passage à la limite sous le signe somme. Soit a adhérent à D. Si
- pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout t de J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ a une limite $\ell(t)$ quand t tend vers a, où ℓ est une fonction continue par morceaux sur J,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors,
- la fonction F a une limite quand x tend vers a,
- la fonction ℓ est intégrable sur J,
- $\lim\limits_{x \to a} F(x) = \int_J \ell(t)\, dt$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to a} \int_J f(x,t)\, dt = \int_J \left(\lim\limits_{x \to a} f(x,t)\right) dt$.

Théorème de continuité d'une intégrale à paramètres. Si
- pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout t de J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors, la fonction F est définie et continue sur I.

Théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz)
Si pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J et **intégrable** sur I,

et si f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent, c'est-à-dire
- pour tout x de I, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout t de J, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} f(x,t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x,t) \in I \times J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Alors, la fonction F est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = \int_J \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$.

Théorème de dérivation sous le signe somme généralisé
Si pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J et **intégrable** sur I, et si f admet des dérivées partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ jusqu'à l'ordre p, $1 \leqslant k \leqslant p \leqslant +\infty$, vérifiant les hypothèses du théorème précédent, c'est-à-dire
- $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k} f(x,t)$ est continue sur I,
- $\forall k \in [\![1,p]\!]$, il existe une fonction φ_k continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x,t) \in I \times J$, $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_k(t)$.

Alors, la fonction F est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = \int_J \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$.

Revoir l'étude de la fonction Γ.

7 Equations différentielles

Théorème de Cauchy linéaire : cas des équations différentielles scalaires du premier ordre. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ à savoir :

$$\forall x \in I,\ f(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\ dt \text{ où } A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\ dt.$$

Théorème de Cauchy linéaire : cas des systèmes du premier ordre à coefficients constants. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit B une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = AX + B$ sur I vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$ à savoir

$$\forall t \in I,\ X(t) = e^{tA} X_0 + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-uA} B(u)\ du.$$

Théorème de Cauchy linéaire : cas général. Soient A et B deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = AX + B$ sur I vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$.

Théorème de Cauchy linéaire : cas des équations différentielles scalaires du second ordre. Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.