Résumé du cours d'algèbre de Sup et Spé

1 Polynômes

1.1 Formule de Taylor pour les polynômes

Soit P un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall a \in \mathbb{K},\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k. \qquad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Pour tout polynôme P et tout entier naturel k, le coefficient de X^k dans P est $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

1.2 Racines d'un polynôme

Ordre de multiplicité d'une racine. Pour $a \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$, a est racine de P d'ordre k si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ P est divisible par $(X-a)^k$ et pas par $(X-a)^{k+1}$). Une racine d'ordre 0 n'est pas racine.
a est racine de P d'ordre au moins k si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $P = (X-a)^k Q$ ($\Leftrightarrow$ P est divisible par $(X-a)^k$).

Théorème. Le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^k$ est $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i$.

Théorème (caractérisation de l'ordre de multiplicité).
a est racine de P d'ordre $k \Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.
a est racine de P d'ordre au moins $k \Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$.
Théorème. Si a est racine d'ordre p de $P \neq 0$, alors pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, a est racine d'ordre $p-k$ de $P^{(k)}$.

1.3 Structure d'anneau de $\mathbb{K}[X]$

Théorème. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif et intègre.

Définition. Soit $I \subset \mathbb{K}[X]$. I est un idéal I de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ si et seulement si

$$1)\ (I, +) \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{K}[X], +) \text{ et } 2)\ \forall P \in I,\ \forall Q \in \mathbb{K}[X],\ PQ \in I.$$

Définition. Un idéal I de $\mathbb{K}[X]$ est principal $\Leftrightarrow$ il ext engendré par l'un de ses éléments c'est-à-dire si et seulement si il est de la forme $I = P\mathbb{K}[X] = \{PQ,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

Théorème. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau principal, c'est-à-dire que tout idéal de cet anneau est principal.

1.4 PGCD, Bézout, Gauss

Théorème et définition. A et B sont deux polynômes non nuls. L'idéal engendré par A et B (c'est-à-dire le plus petit idéal contenant A et B) est $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = \left\{AQ_1 + BQ_2,\ (Q_1, Q_2) \in \mathbb{K}[X]^2\right\}$.
Le PGCD de A et B est l'unique polynôme unitaire D tel que $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$. C'est un diviseur commun à A et B et tout diviseur commun à A et B divise D. Les diviseurs communs à A et B sont les diviseurs de leur PGCD.

Théorème de Bézout. Soient A et B deux polynômes non nuls. A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.
Théorème. Deux polynômes non nuls sont premiers entre eux si et seulement si ils sont sans racine commune dans $\mathbb{C}$.
Théorème de Gauss. Soient A, B et C trois polynômes, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Si A divise BC et si A est premier à B, alors A divise C.

2 Algèbre linéaire

Voir les résumés de sup déjà fournis.

3 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

3.1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Valeurs propres. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } f \quad & \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\} / \ f(x) = \lambda x \\ & \Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ non injectif} \\ & \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Si de plus E est de dimension finie,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } f \quad & \Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E \notin GL(E) \\ & \Leftrightarrow \det\,(\lambda \mathrm{Id}_E - f) \neq 0. \end{aligned}$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A \quad & \Leftrightarrow \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K} \setminus \{0\} / \ AX = \lambda X \\ & \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ & \Leftrightarrow A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K}) \\ & \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) < n \\ & \Leftrightarrow \det\,(\lambda I_n - A) \neq 0. \end{aligned}$$

En particulier, $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de A. Si $\dim(E) < +\infty$, $f \in GL(E) \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de f.

Si E est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle, tout endomorphisme de E admet au moins une valeur propre. Toute matrice carrée admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

Vecteurs propres. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $x \in E$.
x est un vecteur propre de f si et seulement si $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \ f(x) = \lambda x$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
X est un vecteur propre de A si et seulement si $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \ AX = \lambda X$.

Sous-espaces propres. Si λ est valeur propre de f, le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Ce sous-espace propre est constitué de 0 et des vecteurs propres associés à λ.
Si λ n'est pas valeur propre de f, alors $E_\lambda = \{0\}$ et dans ce cas, E_λ n'est pas un sous-espace propre de f.
Définition analogue pour une matrice.

Théorème. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Théorème. La somme d'un nombre fini de sous-espaces propres est directe.

3.2 Sous-espaces stables

Définition. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et F sev de E. F est stable par $f \Leftrightarrow \forall x \in F,\ f(x) \in F \Leftrightarrow f(F) \subset F$.
Dans ce cas, la restriction de f à F induit un endomorphisme de F.
Les droites stables par f sont les droites engendrées par un vecteur propre.
Les sous-espaces propres de f sont stables par f. La restriction de f à E_λ « est » l'homothétie de rapport λ.

Théorème. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors, g laisse stable $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ et les sous-espaces propres de f.

3.3 Polynôme caractéristique

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f \in \mathscr{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f = \det\,(X\mathrm{Id}_E - f)$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \det\,(XI_n - A)$.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. L'ordre de multiplicité d'une valeur propre est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.
Le spectre de A (de f) peut désigner l'**ensemble** des valeurs propres, chaque valeur propre n'étant alors écrite qu'une fois, ou la **famille** des valeurs propres, chaque valeur propre étant alors écrite un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

Degré, coefficient dominant. Si A est de format n (resp. E est de dimension n), χ_A (resp. χ_f) est de degré n, unitaire.

Coefficients du polynôme caractéristique. Le coefficient de X^{n-1} est $-\mathrm{Tr}(A)$ (resp. $-\mathrm{Tr}(f)$) et le coefficient de X^0 est $(-1)^n \det(A)$ (resp. $(-1)^n \det(f)$). Le coefficient de X^k et $(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ où $\sigma_k = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}$.

Soi $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la famille des valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$, alors $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ et $\det(A) = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n$.

Théorème. Si λ est valeur propre de A (de f) d'ordre $o(\lambda)$, alors $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant o(\lambda)$ et aussi $o(\lambda) \geqslant \dim(E_\lambda)$.
Si λ est valeur propre simple, $\dim(E_\lambda) = 1$. Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est une droite.

Théorème. A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique et en particulier même trace et même déterminant.
Théorème. AB et BA (resp. $f \circ g$ et $g \circ f$) ont même polynôme caractéristique et en particulier même trace et même déterminant.
Théorème. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et en particulier même trace et même déterminant.
Réciproque fausse pour $n \geqslant 2$. Par exemple, I_n et $I_n + E_{1,2}$ ont même polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables.

3.4 Diagonalisation

Définition. Un endomorphisme de E (de dimension non nulle quelconque) est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
Si de plus, E est de dimension finie, f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale c'est-à-dire $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}$, $\exists D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) /\ A = PDP^{-1}$.

Théorème. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On note n_i la dimension de $E_{\lambda_i}(f)$.

$$\begin{aligned} f \text{ est diagonalisable} \quad &\Leftrightarrow \text{les sous-espaces propres de } f \text{ sont supplémentaires} \\ &\Leftrightarrow n = \sum n_i \\ &\Leftrightarrow \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ \dim(E_\lambda) = o(\lambda). \end{aligned}$$

Théorème. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $f \in \mathscr{L}(E)$. **Si** χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples (ou encore si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes), **alors** f est diagonalisable. Dans ce cas, les sous-espaces propres sont des droites.
Réciproque fausse.

3.5 Trigonalisation

Définition. Un endomorphisme de E (de dimension finie non nulle) est trigonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
Une matrice carrée est trigonalisable si et seulement si cette matrice est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème. Si E est de dimension finie non nulle sur $\mathbb{K}$, f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle est trigonalisable.
Toute matrice carrée est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

Conséquences. Si $\mathrm{Sp}(f) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Sp}\left(f^k\right) = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$ et plus généralement, pour tout polynôme P, $\mathrm{Sp}(P(f)) = (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$. Si de plus f est inversible, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Sp}\left(f^k\right) = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$.

3.6 Polynômes d'endomrophismes

3.6.1 Commutant

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). Le commutant de f (resp. de A) est $C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) /\ g \circ f = f \circ g\}$ (resp. $C(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) /\ AB = BA\}$.

Théorème. $C(f)$ (resp. $C(A)$) est une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ (resp. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.
Danger. Deux éléments g et h de $C(f)$ commutent avec f mais ne commutent pas nécessairement entre eux.

3.6.2 $\mathbb{K}[f]$ ou $\mathbb{K}[A]$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array}$ (resp. ...) est un morphisme d'algèbres. L'image de ce morphisme est $\mathbb{K}[f]$ resp. $\mathbb{K}[A]$). $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative (deux polynômes en f commutent) de $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.
En particulier, tout polynôme en f commute avec f et donc $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative $(C(f), +, ., \circ)$.

3.6.3 Polynômes annulateurs, polynôme minimal

Le noyau de Φ est l'ensemble des polynômes annotateurs de f (resp. de A). C'est un sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathbb{K}[X], +, .)$ et un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. Si E est de dimension finie, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ grâce au :

Théorème de Cayley-Hamilton. $\chi_f(f) = 0$.

Si E est de dimension finie, le générateur unitaire de Ker(Φ) est le **polynôme minimal** μ_f de f.
Par définition, Ker(Φ) $= \mu_f\mathbb{K}[X]$ ou encore les polynômes annulateurs de f sont les multiples de μ_f. Le théorème de Cayley-Hamilton se réénonce sous la forme :

Théorème. μ_f divise χ_f.

Théorème (polynômes annulateurs et valeurs propres). Si $P(f) = 0$ et si λ est valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme (ou d'une matrice) sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur. Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas nécessairement valeur propre mais toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur.

Théorème. Toute valeur propre de f est racine de μ_f et toute racine de μ_f est valeur propre de f. Si $\chi_f = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, alors μ_f est de la forme $\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$ où $\forall i,\ 1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

Théorème de décomposition des noyaux. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors,

$$\text{Ker}\left((P_1 \times \ldots \times P_k)(f)\right) = \text{Ker}\left(P_1(f)\right) \oplus \ldots \oplus \text{Ker}\left(P_k(f)\right).$$

En particulier, si $P = P_1 \times \ldots \times P_k$ est un polynôme annulateur de f, alors

$$E = \text{Ker}\left(P_1(f)\right) \oplus \ldots \oplus \text{Ker}\left(P_k(f)\right).$$

3.6.4 Décomposition de E en somme de sous-espaces stables supplémentaires

Si E est de dimension finie non nulle et $\chi_f = \prod_{i=1}^{k}(f-\lambda_i)^{\alpha_i}$, alors

$$E = \text{Ker}\left(f-\lambda_1 \text{Id}_E\right)^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \text{Ker}\left(f-\lambda_k \text{Id}_E\right)^{\alpha_k}.$$

• Les $\text{Ker}\left(f-\lambda_i \text{Id}_E\right)^{\alpha_i}$ sont supplémentaires et stables par f. Donc, dans toute base adaptée à cette décomposition, la matrice de f est diagonale par blocs.
• La restriction de f à $\text{Ker}\left(f-\lambda_i \text{Id}_E\right)^{\alpha_i}$ induit un endomorphisme f_i de ce sous-espace. f_i admet une et une seule valeur propre à savoir λ_i et $f_i - \lambda_i \text{Id}_{\text{Ker}(f-\lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i}}$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à α_i.

4 Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire
- $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ ($\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique)
- $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall (\lambda,\mu \in \mathbb{R}^2$, $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$ ($\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable et donc bilinéaire par symétrie)
- $\forall x \in E$, $\langle x,x\rangle \geqslant 0$ ($\langle\ ,\ \rangle$ est positive)
- $\forall x \in E$, $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ ($\langle\ ,\ \rangle$ est définie).

Inégalité de Cauchy-Schwarz. $\forall (x,y) \in E^2$, $|\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$.

Norme hilbertienne. $x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme sur E.

Définition. Si E est de dimension finie, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien.

Familles orthogonales, familles orthonormales. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
$(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale $\Leftrightarrow \forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j\rangle = 0$.
$(e_i)_{i\in I}$ est orthonormale $\Leftrightarrow \forall (i,j) \in I^2,\ \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$.

Théorème. Une famille orthonormale de vecteurs tous non nuls est libre. Une famille orthonormale est libre.

Théorème (procédé d'orthonormalisation de Schmidt). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre. Il existe une famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une seule vérifiant
- $\forall n \in \mathbb{N}$, Vect $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ = Vect $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle u_n, e_n\rangle > 0$.

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'othonormalisée de la famille libre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle s'obtient par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

- $e_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|}u_1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $e'_{n+1} = u_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\langle u_{n+1}, e_k\rangle e_k$ puis $e_{n+1} = \dfrac{1}{\left\|e'_{n+1}\right\|}e'_{n+1}$.

Théorème. Si E est euclidien, il existe au moins une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Dans ce cas,

- $\forall x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \langle x, e_i\rangle$.
- $\forall x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $\forall y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$, on a $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
- $\forall x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Définition. Soit A une partie non vide de E. L'orthogonal de A, noté $A^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A : $A^\perp = \{y \in E/\ \forall x \in A,\ \langle x, y\rangle = 0\}$.
Convention. $\varnothing^\perp = E$, $\{x\}^\perp = x^\perp$.

Théorème.

- $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A^\perp$ est un sev de E.
- $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
- $A^\perp = (\text{Vext}(A))^\perp$.
- Si F est un sev, on a toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$ mais on n'a pas toujours $F \oplus F^\perp = E$.

Théorème de la projection orthogonale.
Soit E un espace préhilbertien puis F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**. Alors $E = F \oplus F^\perp$.
Si x est un vecteur de E, on peut donc définir le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F. Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale de E, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i.$$

Inégalité de Bessel. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale. Alors,

$$\forall x \in E,\ \sum_{k=0}^{n}\langle x, e_k\rangle^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Familles totales. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale.

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille totale $\Leftrightarrow \overline{\text{Vect}\,(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} = E \Leftrightarrow$ on a la formule de Parseval : $\forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2$.

5 Espaces euclidiens

5.1 Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

5.1.1 Matrices orthogonales

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A et $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de A.

$$\begin{aligned}
A \text{ est orthogonale} &\Leftrightarrow {}^tAA = A{}^tA = I_n\\
&\Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = {}^tA\\
&\Leftrightarrow (C_1, \ldots, C_n) \text{ est une B.O.N de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ muni du produit scalaire canonique}\\
&\Leftrightarrow (L_1, \ldots, L_n) \text{ est une B.O.N de } \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \text{ muni du produit scalaire canonique.}
\end{aligned}$$

Théorème. $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA \in O_n(\mathbb{R})$.

Théorème. $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Théorème. Soient E un espace euclidien de dimension n, $\mathscr{B}$ une B.O.N de E, $\mathscr{B}'$ une famille de n vecteurs de E, $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Alors, $\mathscr{B}'$ est une B.O.N de E si et seulement si $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Théorème. $A \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(A) \in \{-1, 1\}$.

Théorème. $O_n^+(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ et aussi de $(SL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Théorème. $O_1(\mathbb{R}) = \{\pm I_1\}$. $O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

5.1.2 Automorphismes orthogonaux

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned} f \text{ est orthogonal} &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \text{ (f conserve le produit scalaire)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\| \text{ (f conserve la norme (euclidienne))} \end{aligned}$$

Théorème. Soient E un espace euclidien de dimension n, $\mathscr{B}$ une B.O.N de E, $f \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors, $f \in O(E)$ si et seulement si $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Théorème. $f \in O(E) \Rightarrow \det(f) \in \{-1, 1\}$.

Théorème. $O^+(E) = SO(E)$ est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$ et aussi de $(SL(E), \circ)$.

Théorème. $O(E_1) = \{\pm Id_{E_1}\}$. $O(E_2) = \{\text{rotations}\} \cup \{\text{réflexions}\}$.

5.1.3 Réduction des endomorphismes orthogonaux ou des matrices orthogonales

Théorème. Soit $f \in O(E)$ (resp. $A \in O_n(\mathbb{R})$). $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$ (resp. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$).

Théorème. Soit $f \in O(E)$. Si F est un sev de E stable par f, alors $F^\perp$ est un sev de E stable par f. Plus précisément, si F est stable par f, la restriction de f à F (resp. $F^\perp$) induit un automorphisme orthogonal de F (resp. $F^\perp$).

Théorème. $f \in O(E) \Leftrightarrow$ il existe une B.O.N de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale par blocs du type

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & R(\theta_k) & & & 0 & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ où } R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \qquad (*).$$

$A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A$ est orthogonalement semblable à une matrice du type $(*)$.

Théorème. $f \in O^+(E_3) \Leftrightarrow$ il existe une B.O.N de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.2 Endomorphismes symétriques, matrices symétriques (réelles)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est symétrique $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = A \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}$.

Théorème. Soient $\mathscr{B}$ une B.O.N de E, $f \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. f est symétrique $\Leftrightarrow A$ est symétrique.

Théorème. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Alors, χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$.
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles.
Démonstration. Si $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$, alors

$$\lambda {}^t\overline{X}X = {}^t\overline{X}(AX) = {}^t\overline{X}\,{}^t\overline{A}X = {}^t\left(\overline{AX}\right) = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}X \dots$$

Théorème. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Si F est un sev de E stable par f, alors $F^\perp$ est un sev de E stable par f.

Théorème spectral.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est symétrique $\Leftrightarrow f$ est diagonalisable en base orthonormée.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est symétrique $\Leftrightarrow f$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.