CONCOURS D'ADMISSION A L'ESM DE SAINT-CYR EN 1993

MATHÉMATIQUES I

Options M, P, T, TA

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Dans l'appréciation des copies, il sera tenu compte de la rigueur des raisonnements, de la précision de la rédaction, ainsi que de la présentation.

Le candidat pourra, à condition de l'indiquer clairement, admettre un résultat afin de traiter les questions suivantes.

Les copies mal rédigées ou mal présentées le sont au risques et périls du candidat. La formule de Stirling, hors-programme, ne devra pas être utiisée.

Pour tout réel x*,* $E(x)$ *désignera la partie entière de* x*, c'est-à-dire le plus grand entier* k *inférieur ou égal à* x*, donc tel que :* $k \leq x < k+1$*.*

Par abus de langage, on confondra « application polynomiale » et « polynôme ».

$[\![0, n]\!]$ *désignera l'ensemble des entiers* k *tels que :* $0 \leq k \leq n$*.*

PREMIÈRE PARTIE

$\mathbb{R}_n[X]$ *désigne l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à* n*,* n *étant un entier naturel non nul.*

1 - Si x_0, x_1, x_2, …, x_n sont $(n+1)$ réels distincts, montrer que les polynômes définis par :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \text{ pour } i \in [\![0, n]\!] \text{ forment une base de } \mathbb{R}_n[X].$$

2 - On donne de plus $(n+1)$ réels : y_0, y_1, y_2, …, y_n. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme L de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ L(x_i) = y_i$.

Ecrire L à l'aide des L_i.

3- Calculer les sommes : $\sum_{i=0}^{n} L_i(x)$ et $\sum_{i=0}^{n} x_i L_i(x)$.

4 - Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\phi(t) = \dfrac{1}{t+a^2}$, a désignant un réel strictement positif. Aux réels distincts t_0, t_1, t_2, ..., t_n de $\mathbb{R}^+$, on associe les réels $z_i = \phi(t_i)$, et le polynôme L de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0,n]\!],\ L(t_i) = z_i$.

Montrer que le coefficient du terme de plus haut degré de L est $\dfrac{(-1)^n}{\prod_{i=0}^{n}(t_i + a^2)}$.

On pourra calculer de deux façons la dérivée d'ordre n de L.

5 - Dans cette question, on suppose n impair ($n = 2k+1$)). Si les points (x_i) et (y_i) sont tels que :
$\forall i \in [\![0,k]\!],\ x_{n-i} = -x_i$ et $y_{n-i} = y_i$, soit L le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0,n]\!],\ L(x_i) = y_i$.
Ecrire L en fonction du polynôme P de $\mathbb{R}_k[X]$tel que $\forall i \in [\![0,k]\!],\ P(x_i^2) = y_i$. Montrer que L est pair.

Que peut-on dire de son degré ?

6 - Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $(n+1)$ points distincts $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I. Soit L le polynôme $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0,n]\!],\ L(x_i) = f(x_i)$.
On dira que L interpole la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Si $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont $(n+2)$ réels distincts, montrer que si P interpole f aux points $b, x_1, x_2, \ldots, x_n$, et si Q interpole f aux points $a, x_1, x_2, \ldots, x_n$, alors le polynôme S défini par

$$S(x) = \frac{(x-a)P(x) - (x-b)Q(x)}{b-a}$$

interpole f aux points $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute cette partie, on considère la fonction f définie sur $[-1,1]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$, a désignant un réel strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère les réels x_i définis par :$\forall i \in [\![0,n]\!],\ x_i = -1 + 2\dfrac{i}{n}$.

On note P_n le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0,n]\!],\ P_n(x_i) = f(x_i)$. P_n est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

1 - Montrer que si une fonction $\Psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est de classe c^{n+1} et possède $(n+2)$ zéros distincts dans $[-1,1]$, alors la dérivée d'ordre $(n+1)$ s'annule dans $]-1,1[$.

En déduire que $\forall x \in]-1,1[,\ \exists c \in]-1,1[/\ f(x) - P_n(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_n)\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

On pourra considérer la fonction définie par :

$$\Psi(t) = f(t) - P_n(t) - (t-x_0)\ldots(t-x_n)A$$

A désignant un réel convenablement choisi.

2 - Décomposer f en éléments simples sur $\mathbb{C}$. Calculer la dérivée d'ordre $n+1$ de f.

3 - Montrer que $\forall x \in [-1,1],\ |(x-x_0)\ldots(x-x_n)| \leq \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}$.

4 - En déduire que si $a > \dfrac{2}{e}$, la suite (P_n) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers f.

TROISIÈME PARTIE

On reprend les notations de la deuxième partie :

$$f \text{ désigne la fonction } f \text{ définie sur } [-1,1] \text{ par } f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}, \text{ où } a \text{ est un réel strictement positif.}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est le polynôme d'interpolation de f aux points x_0, x_1, …, x_n définis par

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ x_i = -1 + \frac{2i}{n}.$$

On se propose d'étudier la convergence simple de la suite (P_n) pour de petites valeurs de a.

1 - Dans cette question, on suppose que n est impair.

Décomposer le polynôme $(x^2+a^2)(f(x)-P_n(x))$ en produit de facteurs irréductibles.

On utilisera les résultats des questions 4 et 5 de la première partie.

2 - Dans cette question, x désigne un réel donné de $]\frac{1}{2}, 1[$.

2-1) Montrer qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}.$$

Si pour $n \geq N$, $E(nx) \leq nx \leq E(nx) + \frac{1}{n}$, montrer que :

$$E(nx) + 1 + \frac{1}{n} < (n+2)x < E(nx) + 2 - \frac{1}{n}.$$

Si pour $n \geq N$, $E(nx) + 1 - \frac{1}{n} \leq nx < E(nx) + 1$, montrer que :

$$E(nx) + 2 + \frac{1}{n} < (n+2)x < E(nx) + 3 - \frac{1}{n}.$$

En déduire qu'il existe une infinité d'entiers impairs n tels que :

$$\frac{1}{n} < nx - E(nx) < 1 - \frac{1}{n} \text{ et } n > N.$$

En déduire qu'il existe une suite strictement croissante (n_p) d'entiers impairs tels que pour tout élément de la suite :

$$\forall k \in [\![0, n_p]\!],\ \left| x - \frac{k}{n_p} \right| > \frac{1}{n_p^2}.$$

En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{N} / \ p \geq A \Rightarrow \forall k \in [\![0, n_p]\!],\ \left| \frac{1}{n_p} \ln \left| x - \frac{k}{n_p} \right| \right| < \varepsilon.$$

2-2) Justifier l'existence et calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_{-1}^{1} \ln|x-u| \, du.$$

2-3) Soit (n_p) une suite d'entiers impairs définies au 2-1).

A chaque entier n_p, on associe les $n_p + 1$ réels x_i définis par : $\forall i \in [\![0, n_p]\!],\ x_i = -1 + \frac{2i}{n_p}$.

On considère la suite $S_{n_p}(x) = \frac{2}{n_p} \sum_{i=0}^{n_p} \ln|x - x_i|$.

On note q l'indice tel que $x_q \leq x < x_{q+1}$. Quelles sont les limites de x_q et x_{q+1} si n_p tend vers $+\infty$?

En encadrant les deux réels $\frac{2}{n_p}\sum_{i=0}^{q-1}\ln|x-x_i|$ et $\frac{2}{n_p}\sum_{i=q+2}^{n_p}\ln|x-x_i|$ par des intégrales, montrer que $S_{n_p}(x)$ a pour limite $I(x)$ quand n_p tend vers $+\infty$.

3 - Soit x un réel de l'intervalle $]\frac{1}{2},1[$ et (n_p) une suite d'entiers impairs définie au 2-1) et associée au réel x. A chaque n_p, on associe les n_p+1 réels x_i définis par

$$\forall i \in [\![0,n_p]\!],\ x_i = -1+\frac{2i}{n_p}.$$

3-1) Quelle est la limite de la suite $\Sigma_{n_p} = \frac{2}{n_p}\sum_{i=0}^{n_p}\ln(x_i^2+a^2)$ quand n_p tend vers $+\infty$?

3-2) En utilisant les questions précédentes, déterminer la limite $u(x)$ de la suite :

$$u_{n_p}(x) = \frac{2}{n_p}\ln\left|f(x)-P_{n_p}(x)\right| \text{ quand } n_p \text{ tend vers } +\infty.$$

3-3) Quelle est la limite $l(a)$ de $u(x)$ quand x tend vers 1 ?

3-4) Si $l(a)>0$, la suite P_n converge-t-elle simplement vers f sur $[-1,1]$?

QUATRIÈME PARTIE

1- Soit $f\ :\ I\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.

On définit par récurrence les différences divisées :

$$\text{pour } x\in I,\ f_1[x]=f(x) \text{ et pour } x, y \text{ distincts dans } I,\ f_2[x,y]=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

A l'aide de f_n, on définit f_{n+1} : $(n+1)$ points distincts étant pris dans I, on les numérote x_0, ..., x_n. On pose alors :

$$f_{n+1}[x_0,\dots,x_n]=\frac{f_n[x_0,\dots,x_{n-1}]-f_n[x_1,\dots,x_n]}{x_0-x_n}.$$

Soit L le polynôme qui interpole f en x_0, ..., x_n. Montrer que le coefficient du terme de plus haut degré de L est $f_{n+1}[x_0,\dots,x_n]$. On utilisera la question 6 de la première partie.

2 - Montrer que $f_{n+1}[x_0,\dots,x_n]$ est invariant par permutation des (x_i).

3 - Démontrer que :

$$L(x)=f_1[x_0]+f_2[x_0,x_1](x-x_0)+\ldots+f_{n+1}[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_n).$$

4 - On se propose de calculer numériquement $L(x)$.

Écrire la procédure Pascal d'en-tête :

```
Differences_Divisees (X,Y :tableau;n :integer;var D :tableau);
```

où le type « `tableau=array[0..N_Max] of real` » a été défini préalablement, et où pour $i\in[\![0,n]\!]$, $X[i]=x_i$ et $Y[i]=f(x_i)$, de sorte qu'après appel de cette procédure, le tableau D contienne :

$$D[0]=f_1[x_0],\ D[1]=f_2[x_0,x_1],\ \dots,\ D[n]=f_{n+1}[x_0,\dots,x_n].$$

Écrire ensuite en Pascal la fontion, utilisant le tableau D précédent :

```
Lagrange (X,D :tableau;t :real) : real;
```

qui calcule le polynôme L au point t par la formule de la question 3 de la quatrième partie.