

Oraux CCP. Probabilités

Exercice n° 96.

1) a) Ω est l'ensemble des tirages successifs avec remise de 5 parmi les 10 boules. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées à savoir tirer une boule de l'urne. Chaque expérience a deux issues « obtenir une boule blanche » avec une probabilité $p = \frac{1}{5}$ et « ne pas obtenir une boule blanche » avec une probabilité $1 - p = \frac{4}{5}$. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{5}$.

$$\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}.$$

De plus, $E(X) = np = 5 \times \frac{1}{5} = 1$ et $V(X) = np(1 - p) = \frac{4}{5}$.

b) $Y = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$. Donc $E(Y) = E(5X - 15) = 5E(X) - 15 = -10$ et $V(Y) = V(5X - 15) = 25V(X) = 20$.

2) a) Puisque les tirages se font successivement et sans remise, on ne change pas la loi de X et de Y en supposant les tirages simultanés. Ω est l'ensemble des tirages simultanés de 5 parmi les 10 boules. Donc $\text{card}(\Omega) = \binom{10}{5}$. $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Soit $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. L'événement $\{X = k\}$ est l'événement « on tire k boules blanches et $5 - k$ boules noires ». Il y a $\binom{2}{k}$ tirages possibles de k boules blanches et pour chacun de ces tirages, il y a $\binom{8}{5-k}$ tirages possibles de $5 - k$ boules noires.

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

Plus précisément,

- $P(X = 0) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{2}{9},$
- $P(X = 1) = \frac{2 \binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 / 4!}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 / 5!} = \frac{2 \times 5 \times 5}{10 \times 9} = \frac{5}{9},$
- $P(X = 2) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{8 \times 7 \times 6 / 3!}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 / 5!} = \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{2}{9} = 1 - P(X = 0) - P(X = 1).$

b) On a toujours $Y = 5X - 15$. Donc, $Y(\Omega) = \{-15, -10, -5\}$ puis

$$\forall k \in \{-15, -10, -5\}, P(Y = k) = P\left(X = \frac{k+15}{5}\right) = \frac{\binom{2}{(k+15)/5} \times \binom{8}{(10-k)/5}}{\binom{10}{5}}$$

Plus précisément,

- $P(Y = -15) = P(X = 0) = \frac{2}{9},$
- $P(Y = -10) = P(X = 1) = \frac{5}{9},$
- $P(Y = -5) = P(X = 2) = \frac{2}{9}.$

Exercice n° 97.

1) $X(\Omega) = \llbracket r, +\infty[$. Soit $n \geq r$. L'événement $\{X = n\}$ est réalisé si et seulement si la bactérie a été touchée exactement $r - 1$ fois au cours des $n - 1$ premiers tirs et est touchée au n -ème tir.

La probabilité de l'événement « la bactérie a été touchée exactement $r - 1$ fois au cours des $n - 1$ premiers tirs » est obtenue à partir d'un schéma de BERNOULLI de paramètres $n - 1$ et p : elle est égale à $\binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(n-1)-(r-1)}$ et donc

$$\forall n \geq r, P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(n-1)-(r-1)} \times p = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

2) L'espérance de X est

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=r}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=r}^{+\infty} n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} = rp^r \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= rp^r \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} (1-p)^{n-r} = np^r \frac{1}{(1-(1-p))^{r+1}} \\ &= \frac{r}{p} < +\infty. \end{aligned}$$

Donc, X admet une espérance et $E(X) = \frac{r}{p}$.

Exercice n° 98.

1) Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X = j) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = j, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!} \\ &= \frac{j}{e^j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} + \frac{1}{e^j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{(k-1)!} = \frac{j}{e^j} \left(\frac{1}{2}\right)^j e^{1/2} + \frac{1}{e^j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \times \frac{1}{2} \times e^{1/2} \\ &= \frac{1}{e^j} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} e^{1/2} (2j+1) = \frac{2j+1}{2^{j+1} j! \sqrt{e}}. \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de X et Y , on a aussi $\forall k \in \mathbb{N}, P(Y = k) = \frac{2k+1}{2^{k+1} k! \sqrt{e}}$.

$P(X = 0, Y = 0) = 0$ et $P(X = 0) \times P(Y = 0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)^2 = \frac{1}{4e} \neq 0$. Donc, il existe $(j, k) \in \mathbb{N}^2 / P(X = j, Y = k) \neq P(X = j) \times P(Y = k)$. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

2)

$$\begin{aligned} E[2^{X+Y}] &= \sum_{l=0}^{+\infty} 2^l P(X+Y = l) = \sum_{l=0}^{+\infty} 2^l \sum_{j+k=l} P(X = j, Y = k) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} 2^l \sum_{j+k=l} \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{l}{e} \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!(l-j)!} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{l}{e} \sum_{j=0}^l \frac{l!}{j!(l-j)!} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{e(l-1)!} (1+1)^l \\ &= \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2^l}{e(l-1)!} = \frac{2}{e} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2^{l-1}}{(l-1)!} = 2e < +\infty. \end{aligned}$$

Donc, la variable 2^{X+Y} admet une espérance et $E[2^{X+Y}] = 2e$.

Exercice n° 99.

1) n expériences identiques et indépendantes sont effectuées à savoir tirer une boule de l'urne. Chaque expérience a deux issues « le correspondant est joint » avec une probabilité p et « le correspondant n'est pas joint » avec une probabilité $1 - p$. X suit donc une loi binomiale de paramètres n et p . On en déduit que $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ puis que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

2) a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On sait que $X = i$ c'est-à-dire que la secrétaire a contacté et obtenu i correspondants. La secrétaire effectue alors $n - i$ appels vers les correspondants restants. On a toujours à faire à un schéma de BERNOULLI :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{N}, P_{X=i}(Y = k) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n-i \rrbracket \\ 0 & \text{si } k \geq n-i+1 \end{cases} = \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k}.$$

b) $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^k P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=0}^k P(X = i) P_{X=i}(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-i-(k-i)} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} p^k (1-p)^{2n-k-i}. \end{aligned}$$

Ensuite, $\binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} = \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = \binom{n}{k} \binom{k}{i}$ et donc

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-2k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-p)^{k-i} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-2k} (2-p)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k ((1-p)^2)^{n-k}. \end{aligned}$$

Ensuite, $p(2-p) = -p^2 + 2p = 1 - (1-p)^2$ et donc $p(2-p) \in [0, 1]$ puis $(1-p)^2 = 1 - p(2-p)$.

Ceci montre que Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p' = p(2-p)$.

c) $E(Z) = np' = np(2-p)$ et $V(Z) = np'(1-p') = np(2-p)(1-p)^2$.

Exercice n° 100.

1) Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors,

$$\forall a > 0, P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

2) Soit $X = \frac{S_n}{n}$. Par linéarité de l'espérance, $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(Y_k) = \frac{1}{n} \times nE(Y_1) = E(Y_1)$. D'autre part, Y_1, \dots, Y_n sont mutuellement indépendantes et donc

$$V(X) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n V(Y_k)}{n^2} = \frac{nV(Y_1)}{n^2} = \frac{V(Y_1)}{n}.$$

En particulier, X admet un moment d'ordre 2 et d'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV,

$$\forall a > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

3) Soient n le nombre de tirages puis, pour $1 \leq i \leq n$, Y_i la variable aléatoire égale à 1 si la i -ème boule tirée est rouge et 0 si la i -ème boule tirée est noire. Alors, $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ est le nombre de boules rouges tirées au cours des n tirages et $\frac{S_n}{n}$ est la proportion de boules rouges obtenues au cours de ces n tirages.

Chaque Y_i suit une loi de BERNOULLI de paramètre $p = \frac{2}{5} = 0,4$. Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(Y_i) = E(Y_1) = 0,4$ et $V(Y_i) = V(Y_1) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$. Ensuite,

$$0,35 \leq \frac{S_n}{n} \leq 0,45 \Leftrightarrow \left| \frac{S_n}{n} - 0,4 \right| \leq 0,05 \Leftrightarrow \left| \frac{S_n}{n} - E(Y_1) \right| \leq 0,05.$$

Puisque les Y_i sont mutuellement indépendantes, la question 2) fournit

$$P\left(0,35 \leq \frac{S_n}{n} \leq 0,45\right) = 1 - P\left(\left| \frac{S_n}{n} - 0,4 \right| > 0,05\right) \geq 1 - P\left(\left| \frac{S_n}{n} - 0,4 \right| \geq 0,05\right) \geq 1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2} = 1 - \frac{2400}{25n} = 1 - \frac{96}{n}.$$

Par suite,

$$P\left(0,35 \leq \frac{S_n}{n} \leq 0,45\right) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - \frac{96}{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq \frac{96}{0,05} = 1920.$$

A partir de 1920 tirages, on a plus de 95% de chances d'obtenir une proportion de rouges comprises entre 0,35 et 0,45.

Exercice n° 101.

1) Il existe trois réels a , b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$, $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.

- $a = \lim_{x \rightarrow 0} xR(x) = \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2}$.
- $b = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)R(x) = \frac{1}{(-1+0)(-1+2)} = -1$.
- $c = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)R(x) = \frac{1}{(-2+0)(-2+1)} = \frac{1}{2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}.$$

2) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2} H_N - \left(H_N + \frac{1}{N+1} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right) \\ &\underset{N \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + o(1) = \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{4} + o(1). \end{aligned}$$

Puisque $1 = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\lambda}{4}$, on obtient $\lambda = 4$.

3)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \text{ (série télescopique)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

4) X admet une espérance. Donc, X admet une variance $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ si et seulement si X^2 admet une espérance.

Or $n^2 P(X=n) = \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4}{n} > 0$ et donc la série de terme général $n^2 P(X=n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge. La variable X n'admet pas de variance.

Exercice n° 102.

1) a) et b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales et puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n. \end{aligned}$$

De même, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

2) a) A est symétrique réelle et donc A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale d'après le théorème spectral.

b) $\text{rg}\left(A + \frac{1}{2}I_3\right) = \text{rg}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 < 3$. Donc, $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A . De plus, puisque A est diagonalisable,

$-\frac{1}{2}$ est valeur propre d'ordre $\dim\left(\text{Ker}\left(A + \frac{1}{2}I_3\right)\right) = 3 - \text{rg}\left(A + \frac{1}{2}I_3\right) = 2$.

$E_{-\frac{1}{2}}(A)$ est immédiatement le plan d'équation $x + y + z = 0$.

c) La dernière valeur propre λ de A est fournie par la trace de A :

$$0 = \text{Tr}(A) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \lambda$$

et donc $\lambda = 1$. D'après le théorème spectral, $E_1(A) = \left(E_{-\frac{1}{2}}(A)\right)^\perp$ est la droite d'équations $x = y = z$. Finalement,

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \text{diag}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Si pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, alors d'après 1), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ puis $U_n = A^n U_0$ avec $U_0 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ est donc la première colonne de la matrice $A^n = PD^nP^{-1} = P\text{diag}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, 1\right)P^{-1}$.

Exercice n° 103.

1) Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(X_i \leq n) &= \sum_{k=1}^n P(X_i = k) = \sum_{k=1}^n pq^{k-1} = p \frac{1 - q^n}{1 - (1-p)} \quad (\text{car } q \neq 1) \\ &= 1 - q^n, \end{aligned}$$

puis $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leq n) = q^n$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $Y > n \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, X_i > n$. Donc, l'événement $\{Y > n\}$ est l'événement $\{X_1 > n\} \cap \dots \cap \{X_N > n\}$. Puisque les variables X_1, \dots, X_N sont mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned} P(Y > n) &= P(\{X_1 > n\} \cap \dots \cap \{X_N > n\}) = \prod_{k=1}^N P(X_k > n) \\ &= q^{nN}. \end{aligned}$$

On en déduit que $P(Y \leq N) = 1 - q^{nN}$.

Ensuite, si $n \geq 2$, $P(Y = n) = P(Y > n-1) - P(Y > n) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = q^{(n-1)N} (1 - q^N)$ ce qui reste vrai pour $n = 1$ car $P(Y = 1) = P(Y \leq 1) = 1 - q^N$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = q^{(n-1)N} (1 - q^N).$$

b) $E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y = n) = (1 - q^N) \sum_{n=1}^{+\infty} n(q^N)^{n-1}$ avec $q^N \in]0, 1[$.

On sait que pour tout réel x de $]0, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ puis par dérivation terme à terme, licite dans l'intervalle ouvert de convergence

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc,

$$E(Y) = (1 - q^N) \frac{1}{(1 - q^N)^2} = \frac{1}{1 - q^N} < +\infty.$$

Y admet une espérance à savoir $E(Y) = \frac{1}{1 - q^N}$.

Exercice n° 104.

1) a) $X_1(\Omega) = \mathbb{N} = X_2(\Omega)$ puis $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = n) &= P\left(\bigcup_{k=0}^n (X_1 = k) \cap (X_2 = n - k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^n P((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k)) \text{ (événements deux à deux disjoints)} \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_1 = k) P(X_2 = n - k) \text{ (} X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Donc, $X_1 + X_2$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

b) $E(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $V(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $P(X = n) = \sum_{m=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y = m)) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(Y = m) \times P_{Y=m}(X = n)$.

Or, $P_{Y=m}(X = n) = \begin{cases} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases} = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$. Donc,

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} = \frac{p^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\lambda^m (1-p)^{m-n}}{(m-n)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\lambda^{m-n} (1-p)^{m-n}}{(m-n)!} = \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-(\lambda p)}. \end{aligned}$$

Donc, X suit la loi de POISSON de paramètre λp .

Exercice n° 105.

1) X prend les valeurs 0, 1 ou 2.

2) a) $X = 2$ est l'événement « toutes les boules vont dans le même compartiment ». Il y a 3^n répartitions possibles des n boules dans les 3 compartiments (pour chacune des n boules, il y a 3 possibilités de compartiment). Parmi ces répartitions, il y en a une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 1, une et une seule

pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 2 et une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 3. Donc

$$p(X = 2) = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

b) Soit E l'événement : « le troisième compartiment est vide et les deux premiers ne le sont pas ». On a alors

$$p(X = 1) = 3 \times p(E).$$

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit E_k l'événement « k boules sont dans le compartiment n° 1 et $n-k$ sont dans le compartiment n° 2 ». $E = \bigcup_{1 \leq k \leq n-1} E_k$ et les E_k , $1 \leq k \leq n-1$, sont deux à deux disjoints. Donc,

$$p(X = 1) = 3p(E) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} p(E_k).$$

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Le nombre de répartitions des n boules telles que k d'entre elles soient dans le compartiment n° 1 et $n-k$ soient dans le compartiment n° 2 est encore le nombre de tirages simultanés de k boules parmi les n à savoir $\binom{n}{k}$.

Donc $p(E_k) = \frac{\binom{n}{k}}{3^n}$. Par suite,

$$p(E) = 3 \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}.$$

Enfin,

$$p(X = 0) = 1 - p(X = 1) - p(X = 2) = 1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}.$$

$$p(X = 2) = \frac{1}{3^{n-1}}, p(X = 1) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \text{ et } p(X = 0) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}.$$

3) a) $E(X) = 0 \times \frac{3^{n-1} - 2^n - 3}{3^{n-1}} + 1 \times \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} + 2 \times \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{2^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, s'il y a un grand nombre de boules, il y a peu de chances qu'un compartiment reste vide.

Exercice n° 106.

1) Formule de BAYES.

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé.

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(A_i) \neq 0$.

Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

Démonstration. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque $P(B) \neq 0$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)}.$$

Puisque $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(A_j) \neq 0$, on a

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \times P_{A_j}(B).$$

Donc,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

2) a) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

(A, \bar{A}) est un système complet d'événements. On a $P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \neq 0$ et $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \frac{1}{2}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{6}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

D'après la formule de BAYES,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\frac{1}{2}$.

b) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient n fois le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

(A, \bar{A}) est un système complet d'événements. On a toujours $P(A) = \frac{1}{4} \neq 0$ et $P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \frac{1}{2^n}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{6^n}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n} \neq 0.$$

D'après la formule de BAYES,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$. Ceci signifie que si au bout d'un grand nombre de lancers, on a obtenu à chaque fois le 6, il est quasiment sûr que le dé est pipé.

Exercice n° 107.

1) $(U, V)(\Omega) = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 / n \geq m\}$. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq m$.

- Si $n = m$, $P((U, V) = (n, m)) = P((X = n) \cap (Y = n)) = P(X = n) \times P(Y = n)$ car les variables X et Y sont indépendantes. Donc,

$$P((U, V) = (n, n)) = pq^n pq^n = p^2 q^{2n}.$$

- Si $n > m$,

$$\begin{aligned} P((U, V) = (n, m)) &= P(((X = n) \cap (V = m)) \cup ((X = m) \cap (V = n))) \\ &= P(X = n) \times P(Y = n) + P(X = m) \times P(Y = m) \\ &= 2pq^n pq^m = 2p^2 q^{n+m}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\text{pour tout } (n, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \geq m, P((U, V) = (n, m)) = \begin{cases} 2p^2 q^{n+m} & \text{si } n > m \\ p^2 q^{2n} & \text{si } n = m \end{cases}.$$

2) • $U(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(U = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P((U, V) = (n, m)) = \sum_{m=0}^n P((U, V) = (n, m)) \\ &= p^2 q^{2n} + \sum_{m=0}^{n-1} 2p^2 q^{n+m} \text{ (même si } n = 0 \text{ (somme vide))} \\ &= p^2 q^{2n} + 2p^2 q^n \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ (même si } n = 0) \\ &= p^2 q^{2n} + 2p q^n (1 - q^n). \end{aligned}$$

• $V(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(V = m) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((U, V) = (n, m)) = \sum_{n=m}^{+\infty} P((U, V) = (n, m)) \\ &= p^2 q^{2m} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} 2p^2 q^{n+m} = p^2 q^{2m} + 2p^2 q^{2m+1} \frac{1}{1 - q} \\ &= p^2 q^{2m} + 2p q^{2m+1}. \end{aligned}$$

3) $P((U = 0) \cap (V = 1)) = 0$ et $P(U = 0) \cap (V = 1) = p^2 \times (p^2 q^2 + 2p q^3) \neq 0$. Donc, les variables U et V ne sont pas indépendantes.

Exercice n° 108.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement « au n -ème tirage, la boule provient de l'urne U_1 » (l'événement $\overline{A_n}$ est donc l'événement « au n -ème tirage, la boule provient de l'urne U_2 »).

1) $(A_1, \overline{A_1})$ est un système complet d'événements et $P(A_1) = P(\overline{A_1}) = \frac{1}{2} \neq 0$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = P(B_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_1) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{35}.$$

La probabilité p_1 que la première boule tirée soit blanche est $\frac{17}{35}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n}) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{4}{7} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

3) La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.

La fonction affine $x \mapsto -\frac{6}{35}x + \frac{4}{7}$ admet un point fixe et un seul :

$$x = -\frac{6}{35}x + \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{41}{35}x = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{20}{41}.$$

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n , $p_{n+1} - \frac{20}{41} = -\frac{6}{5} \left(p_n - \frac{20}{41} \right)$ puis que pour tout entier naturel non nul n ,

$$p_n - \frac{20}{41} = \left(-\frac{6}{35} \right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{20}{41} \right) = \left(-\frac{6}{35} \right)^{n-1} \left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41} \right) = -\frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35} \right)^{n-1},$$

et donc

$$p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35} \right)^{n-1}.$$

Pour tout entier naturel non nul n , $p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35} \right)^{n-1}$.

Exercice n° 109.

1) $X(\Omega) = \mathbb{N} = Y(\Omega)$. Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!} = \frac{1}{e2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \\ &= \frac{1}{2^{i+1}}. \end{aligned}$$

Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!} = \frac{1}{ej!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= \frac{1}{ej!} \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{ej!} = \frac{1^j}{j!} e^{-1}. \end{aligned}$$

2) a) $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(Z = n) = P(X = n - 1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Donc, Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$. On sait que $E(Z) = \frac{1}{p} = 2$ et que $V(Z) = \frac{1-p}{p^2} = 2$.

On en déduit que $E(X) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = 1$ et $V(X) = V(Z - 1) = V(Z) = 2$.

b) Y suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda = 1$. Donc, $E(Y) = \lambda = 1$ et $V(Y) = \lambda = 1$.

3) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

$$P(X = i) \times P(Y = j) = \frac{1}{2^{i+1}} \times \frac{1}{ej!} = \frac{1}{e2^{i+1}j!} = P((X = i) \cap (Y = j)).$$

Donc les variables X et Y sont indépendantes.

3)

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = i)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}i!} = \frac{1}{2e} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^i}{i!} = \frac{1}{2e} e^{1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

Exercice n° 110.

Ω est l'ensemble des tirages successifs sans remise des $n+2$ boules ou encore l'ensemble des permutations des $n+2$ boules. Le nombre de tirages successifs et sans remise des $n+2$ boules est $(n+2)!$ ou encore $\text{card}(\Omega) = (n+2)!$.

1) L'urne contient $n+2$ boules. La première boule blanche peut apparaître au premier, deuxième ou troisième tirage ou encore $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

• $X = 1$ est l'événement : « la première boule tirée est blanche ». On a n possibilités de tirer la première boule parmi les n blanches puis pour chacune de ces n possibilités, on a $(n+1)!$ possibilités de tirer les $n+1$ boules restantes. Donc

$$p(X = 1) = \frac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{n}{n+2}.$$

• $X = 3$ est l'événement : « les deux premières boules tirées sont noires ». On a $2! = 2$ possibilités de tirer les deux premières boules puis pour chacune de ces deux possibilités, on a $n!$ possibilités de tirer les n boules restantes. Donc,

$$p(X = 3) = \frac{2 \times n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

• Enfin

$$\begin{aligned} p(X = 2) &= 1 - p(X = 1) - p(X = 3) = 1 - \frac{n}{n+2} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2) - n(n+1) - 2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2n}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

$$X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket \text{ et } p(X = 1) = \frac{n}{n+2}, p(X = 2) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \text{ et } p(X = 3) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

2) La première boule numérotée 1 peut sortir au premier, deuxième, ..., (n+1)-ème tirage ou encore $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$. L'événement $Y = k$ est l'événement « les k-1 premières boules ne portent pas le numéro 1 et la k-ème porte le numéro 1 ». Pour les k-1 premières boules, on a $n(n-1) \times \dots \times (n-k+2) = \frac{n!}{(n-k+1)!}$ tirages possibles puis pour chacun des ces tirages on a 2 possibilités pour la k-ème boule et donc $2 \times \frac{n!}{(n-k+1)!}$ tirages possibles pour les k premières boules. Pour chacun de ces tirages, on a (n+2-k)! tirages possibles des n+2-k boules restantes. Finalement,

$$p(Y = k) = \frac{\frac{n!}{(n-k+1)!} \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.$$

L'événement $Y = 1$ est l'événement « la première boule porte le numéro 1 ». Il y a 2 tirages possibles pour la première boule puis pour chacun de ces deux tirages, il y a (n+1)! tirages possibles des n+1 boules restantes. Donc

$$p(Y = 1) = \frac{2 \times (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+2-1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Finalement

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, p(Y = k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.$$

Exercice n° 111.

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = P(X = n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq b_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Donc, $R_a \geq R_b = 1$. On a montré que $R \geq 1$.

Puisque $R \geq 1$, $]-1, 1[\subset D_{G_X}$. De plus, $\sum a_n$ converge ($\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$) et $\sum (-1)^n a_n$ converge absolument (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|(-1)^n a_n| = a_n$) et donc converge. Finalement, $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

Immédiatement, $\forall t \in]-R, R[$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n) = E(t^X)$.

b) On sait que G_X est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et en particulier G_X est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$. On sait de plus que

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = a_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$. Pour tout réel t, la série de terme général $a_n t^n = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda}$ converge et

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda t} e^{-\lambda} = e^{\lambda(t-1)}.$$

En particulier, $R = +\infty$ puis $D_{G_X} = \mathbb{R}$.

b) Puisque X et Y sont indépendantes, on sait que t^X et t^Y sont indépendantes. Pour tout réel t $\in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X) E(t^Y) \text{ (car } t^X \text{ et } t^Y \text{ sont indépendantes)} \\ &= G_X(t) G_Y(t) = e^{\lambda_1(t-1)} e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(t-1)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned}$$

D'après la question 1)b), $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X+Y = n) = a_n = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$. X+Y suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice n° 112.

- 1) • $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P((X = k) \cap (Y = n)) \geq 0$.
 • Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = n)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = p(1-p)^n < +\infty$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = n)) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = \frac{p}{1-(1-p)} = 1 < +\infty$$

Donc, la famille $(P((X = k) \cap (Y = n)))_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et $\sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^2} P((X = k) \cap (Y = n)) = 1$.

On a donc bien défini une loi de probabilité.

- 2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = n)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p(1-p)^n.$$

- b) Posons $Z = 1 + Y$. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(1 + Y = n) = P(Y = n - 1) = p(1-p)^{n-1}.$$

Donc, $1 + Y$ suit une loi géométrique de paramètre p .

- c) On sait alors que $E(Y) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$.

- 3) $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = n)) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p \left(\frac{1-p}{2}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k} \\ &= p \left(\frac{1-p}{2}\right)^k \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{2}\right)^{k+1}} \text{ (car } 0 < \frac{1-p}{2} < \frac{1}{2} < 1) \\ &= p \left(\frac{1-p}{2}\right)^k \left(\frac{2}{1+p}\right)^{k+1} = \frac{2p}{1+p} \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k. \end{aligned}$$

Exercice n° 113.

- 1) **1ère solution.** Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit A une partie fixée à k éléments. Le nombre de couples (A, B) tels que $A \subset B$ est encore le nombre de parties B telles que $A \subset B$. Une partie B contenant A est la réunion de A et d'une partie de \overline{A} . Le nombre de parties B contenant A est donc encore le nombre de parties de \overline{A} . Il y en a

$$\text{card}(\mathcal{P}(\overline{A})) = 2^{n-k}.$$

Ensuite, il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments et donc $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ couples (A, B) tels que $\text{card}(A) = k$ et $A \subset B$. En faisant varier k , on obtient

$$a = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$$

- 2ème solution. Notons F l'ensemble des couples (A, B) tels que $A \subset B$.

Pour $(A, B) \in F$, définissons $\varphi_{(A,B)} : E \rightarrow \{0, 1, 2\}$. $\varphi_{(A,B)}$ est une application de E dans $\{0, 1, 2\}$.

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

Soit alors $\varphi : F \rightarrow \{0, 1, 2\}^E$. φ est bien sûr une bijection. Démonstrons-le.

$$(A, B) \mapsto \varphi_{(A, B)}$$

- φ est une application de F vers $\{0, 1, 2\}^E$.

- Soit $((A, B), (A', B')) \in F^2$ tel que $\varphi_{(A, B)} = \varphi_{(A', B')}$.

Soit $x \in E$. $x \in A \Leftrightarrow \varphi_{(A, B)}(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{(A', B')}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A'$. Donc, $A = A'$.

Soit $x \in E$. $x \in B \setminus A \Leftrightarrow \varphi_{(A, B)}(x) = 1 \Leftrightarrow \varphi_{(A', B')}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B' \setminus A'$. Donc, $B \setminus A = B' \setminus A'$ puis $B = B'$ car $A \subset B$, $A' \subset B'$ et $A = A'$. Finalement, $(A, B) = (A', B')$.

On a montré que φ est injective.

- Soit $f \in \{0, 1, 2\}^E$. Soient A l'ensemble des x de E tels que $f(x) = 0$ puis B la réunion de A et de l'ensemble des x de E tels que $f(x) = 1$. Alors $A \subset B$ puis $\varphi((A, B)) = f$. On a montré que φ est surjective et finalement que φ est bijective.

Puisque φ est une bijection, $\text{card}(F) = \text{card}(\{0, 1, 2\}^E) = 3^n$.

$$a = 3^n.$$

2) Le nombre de couples (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$ est encore le nombre de couples $(A, A \cup B)$ tels que $A \cap B = \emptyset$. C'est aussi le nombre de couples (A, B') tels que $A \subset B'$. Il y en a

$$b = a = 3^n.$$

3) Pour chaque couple (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$, il y a exactement un triplet $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A , B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$ à savoir le triplet $(A, B, C_E(A \cup B))$. Réciproquement, chaque triplet $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A , B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$ fournit un et un seul couple $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Donc,

$$c = b = a = 3^n.$$