Banque d'oraux CCP. Probas. Corrigé

Exercice n° 95.

1) a) Ω est l'ensemble des tirages successifs avec remise de 5 boules parmi les 10 boules. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées à savoir tirer une boule de l'urne. Chaque expérience a deux issues « obtenir une boule blanche » avec une probabilité $p = \dfrac{1}{5}$ et « ne pas obtenir une boule blanche » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{4}{5}$. X sui donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{5}$.

$$\forall k \in [\![0, 5]\!],\ P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}.$$

De plus, $E(X) = np = 5 \times \dfrac{1}{5} = 1$ et $V(X) = np(1-p) = \dfrac{4}{5}$.

b) $Y = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$. Donc $E(Y) = E(5X - 15) = 5E(X) - 15 = -10$ et $V(Y) = V(5X - 15) = 25V(X) = 20$.

2) a) Puisque les tirages se font successivement et sans remise, on ne change pas la loi de X et de Y en supposant les tirages simultanés. Ω est l'ensemble des tirages simultanés de 5 parmi les 10 boules. Donc $\text{card}(\Omega) = \dbinom{10}{5}$. $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Soit $k \in [\![0, 2]\!]$. L'événement $\{X = k\}$ est l'événement « on tire k boules blanches et $5 - k$ boules noires ». Il y a $\dbinom{2}{k}$ tirages possibles de k boules blanches et pour chacun de ces tirages, il y a $\dbinom{8}{5-k}$ tirages possibles de $5 - k$ boules noires.

$$\forall k \in [\![0, 2]\!],\ P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

Plus précisément,

- $P(X = 0) = \dfrac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \dfrac{5 \times 4}{10 \times 9} = \dfrac{2}{9}$,
- $P(X = 1) = \dfrac{2\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5/4!}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6/5!} = \dfrac{2 \times 5 \times 5}{10 \times 9} = \dfrac{5}{9}$,
- $P(X = 2) = \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{8 \times 7 \times 6/3!}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6/5!} = \dfrac{5 \times 4}{10 \times 9} = \dfrac{2}{9} = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.

b) On a toujours $Y = 5X - 15$. Donc, $Y(\Omega) = \{-15, -10, -5\}$ puis

$$\forall k \in \{-15, -10, -5\},\ P(Y = k) = P\left(X = \frac{k + 15}{5}\right) = \frac{\binom{2}{(k+15)/5} \times \binom{8}{(10-k)/5}}{\binom{10}{5}}$$

Plus précisément,

- $P(Y = -15) = P(X = 0) = \dfrac{2}{9}$,
- $P(Y = -10) = P(X = 1) = \dfrac{5}{9}$,
- $P(Y = -5) = P(X = 1) = \dfrac{2}{9}$.

Exercice n° 96.

1) $X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$. Soit $n \geqslant r$. L'événement $\{X = n\}$ est réalisé si et seulement si la bactérie a été touchée exactement $r - 1$ fois au cours des $n - 1$ premiers tirs et est touchée au n-ème tir.
La probabilité de l'événement « la bactérie a été touchée exactement $r - 1$ fois au cours des $n - 1$ premiers tirs » est obtenue à partir d'une loi binomiale de paramètres $n - 1$ et p : elle est égale à $\binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)}$ et donc

$$\forall n \geqslant r,\ P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)} \times p = \binom{n-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{n-r}.$$

2) L'espérance de X est

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=r}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=r}^{+\infty} n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} p^r(1-p)^{n-r} = rp^r \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r(1-p)^{n-r} \\
&= rp^r \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} (1-p)^{n-r} = np^r \frac{1}{(1-(1-p))^{r+1}} \\
&= \frac{r}{p} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc, X admet une espérance et $E(X) = \dfrac{r}{p}$.

Exercice n° 97.

1) Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(X = j) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = j,\ Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!k!} \\
&= \frac{j}{e\, j!} \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} + \frac{1}{e\, j!} \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{(k-1)!} = \frac{j}{e\, j!} \left(\frac{1}{2}\right)^j e^{1/2} + \frac{1}{e\, j!} \left(\frac{1}{2}\right)^j \times \frac{1}{2} \times e^{1/2} \\
&= \frac{1}{e\, j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} e^{1/2}(2j+1) = \frac{2j+1}{2^{j+1} j! \sqrt{e}}.
\end{aligned}$$

En échangeant les rôles de X et Y, on a aussi $\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y = k) = \dfrac{2k+1}{2^{k+1} k! \sqrt{e}}$.

$P(X = 0, Y = 0) = 0$ et $P(X = 0) \times P(Y = 0) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)^2 = \dfrac{1}{4e} \neq 0$. Donc, il existe $(j, k) \in \mathbb{N}^2 /\ P(X = j, Y = k) \neq P(X = j) \times P(Y = k)$. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

2)

$$\begin{aligned}
E\left[2^{X+Y}\right] &= \sum_{l=0}^{+\infty} 2^l P(X + Y = l) = \sum_{l=0}^{+\infty} 2^l \sum_{j+k=l} P(X = j, Y = k) \\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} 2^l \sum_{j+k=l} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{l}{e} \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{j!(l-j)!} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{l}{e\, l!} \sum_{j=0}^{l} \frac{l!}{j!(l-j)!} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{e(l-1)!}(1+1)^l \\
&= \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2^l}{e(l-1)!} = \frac{2}{e} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2^{l-1}}{(l-1)!} = \frac{2}{e} \times e^2 = 2e < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc, la variable 2^{X+Y} admet une espérance et $E\left[2^{X+Y}\right] = 2e$.

Exercice n° 98.

1) n expériences identiques et indépendantes sont effectuées à savoir appeler un correspondant. Chaque expérience a deux issues « le correspondant est joint » avec une probabilité p et « le correspondant n'est pas joint » avec une probabilité $1-p$. X suit donc une loi binomiale de paramètres n et p. On en déduit que $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ puis que

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

2) a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. On sait que $X=i$ c'est-à-dire que la secrétaire a contacté et obtenu i correspondants exactement. La secrétaire effectue alors $n-i$ appels vers les correspondants restants. On a toujours à faire à un schéma de Bernoulli :

$$\forall i\in[\![0,n]\!],\ \forall k\in\mathbb{N},\ P_{X=i}(Y=k)=\left\{\begin{array}{l}\dbinom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k}\text{ si }k\in[\![0,n-i]\!]\\ 0\text{ si }k\geqslant n-i+1\end{array}\right.=\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k}.$$

b) $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et pour $k\in[\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=\sum_{i=0}^{k}P(X=i\cap Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P_{X=i}(Y=k-i)\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-i-(k-i)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^k(1-p)^{2n-k-i}.\end{aligned}$$

Ensuite, $\dbinom{n}{i}\dbinom{n-i}{k-i}=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}\times\dfrac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}=\dfrac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\times\dfrac{k!}{i!(k-i)!}=\dbinom{n}{k}\dbinom{k}{i}$ et donc

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}p^k(1-p)^{2n-k-i}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-2k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(1-p)^{k-i}\\&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-2k}(1+(1-p))^k=\binom{n}{k}(p(2-p))^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

Ensuite, $p(2-p)=-p^2+2p=1-(1-p)^2$ et donc $p(2-p)\in[0,1]$ puis $(1-p)^2=1-p(2-p)$. On note que Z est le nombre total de correspondants obtenus au cours des deux tentatives.

Ceci montre que Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p'=p(2-p)$.

c) $E(Z)=np'=np(2-p)$ et $V(Z)=np'(1-p')=np(2-p)(1-p)^2$.

Exercice n° 99.

1) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors,

$$\forall a>0,\ P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{V(X)}{a^2}.$$

2) Soit $X=\dfrac{S_n}{n}$. Par linéarité de l'espérance, $E(X)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E(Y_k)=\dfrac{1}{n}\times nE(Y_1)=E(Y_1)$. D'autre part, Y_1, ..., Y_n sont mutuellement indépendantes et donc

$$V(X)=\frac{V(S_n)}{n^2}=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}V(Y_k)}{n^2}=\frac{nV(Y_1)}{n^2}=\frac{V(Y_1)}{n}.$$

En particulier, X admet un moment d'ordre 2 et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall a>0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

3) Soient n le nombre de tirages puis, pour $1\leqslant i\leqslant n$, Y_i la variable aléatoire égale à 1 si la i-ème boule tirée est rouge et 0 si la i-ème boule tirée est noire. Alors, $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}Y_i$ est le nombre de boules rouges tirées au cours des n tirages et $\dfrac{S_n}{n}$ est la proportion de boules rouges obtenues au cours de ces n tirages.

Chaque Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $E(Y_i) = E(Y_1) = 0,4$ et $V(Y_i) = V(Y_1) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$. Ensuite,

$$0,35 \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant 0,45 \Leftrightarrow \left|\frac{S_n}{n} - 0,4\right| \leqslant 0,05 \Leftrightarrow \left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05.$$

Puisque les Y_i sont mutuellement indépendantes, la question 2) fournit

$$P\left(0,35 \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0,4\right| > 0,05\right) \geqslant 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0,4\right| \geqslant 0,05\right) \geqslant 1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2} = 1 - \frac{2400}{25n} = 1 - \frac{96}{n}.$$

Par suite,

$$P\left(0,35 \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) \geqslant 0,95 \Leftarrow 1 - \frac{96}{n} \geqslant 0,95 \Leftarrow n \geqslant \frac{96}{0,05} = 1920.$$

A partir de 1920 tirages, on a plus de 95% de chances d'obtenir une proportion de rouges comprises entre 0,35 et 0,45.

Exercice n° 100.

1) Il existe trois réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$, $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$.

- $a = \lim\limits_{x \to 0} xR(x) = \dfrac{1}{(0+1)(0+2)} = \dfrac{1}{2}$.
- $b = \lim\limits_{x \to -1} (x+1)R(x) = \dfrac{1}{(-1+0)(-1+2)} = -1$.
- $c = \lim\limits_{x \to -2} (x+2)R(x) = \dfrac{1}{(-2+0)(-2+1)} = \dfrac{1}{2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\},\ \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}.$$

2) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2}H_N - \left(H_N + \frac{1}{N+1} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &\underset{N \to +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + o(1) \underset{N \to +\infty}{=} \frac{1}{4} + o(1).\end{aligned}$$

Puisque $1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\lambda}{4}$, on obtient $\lambda = 4$.

Remarque. Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\right) = \frac{1}{4}$$

3)

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \text{ (série télescopique)} \\ &= 2.\end{aligned}$$

4) X admet une espérance. Donc, X admet une variance $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$ si et seulement si X^2 admet une espérance. Or $n^2 P(X = n) = \dfrac{4n}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to =\infty}{\sim} \dfrac{4}{n} > 0$ et donc la série de terme général $n^2 P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge. La variable X n'admet pas de variance.

Exercice n° 101.

1) a) et b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales et puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P\left(A_{n+1}\right) = P\left(A_n\right) \times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(B_n\right) \times P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(C_n\right) \times P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n. \end{aligned}$$

De même, $b_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{2} c_n$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{2} b_n$.

2) a) A est symétrique réelle et donc A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale d'après le théorème spectral.

b) $\text{rg}\left(A + \dfrac{1}{2} I_3\right) = \text{rg} \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 < 3$. Donc, $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A. De plus, puisque A est diagonalisable, $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre d'ordre $\dim\left(\text{Ker}\left(A + \dfrac{1}{2}\right)\right) = 3 - \text{rg}\left(A + \dfrac{1}{2} I_3\right) = 2$.
$E_{\frac{1}{2}}(A)$ est immédiatement le plan d'équation $x + y + z = 0$.

c) La dernière valeur propre λ de A est fournie par la trace de A :

$$0 = \text{Tr}(A) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \lambda$$

et donc $\lambda = 1$. D'après le théorème spectral, $E_1(A) = \left(E_{\frac{1}{2}}(A)\right)^{\perp}$ est la droite d'équations $x = y = z$. Finalement, $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Si pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, alors d'après 1), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ puis $U_n = A^n U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ est donc la première colonne de la matrice $A^n = PD^nP^{-1} = P\text{diag}\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n, \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n, 1\right) P^{-1}$.

Exercice n° 102.

1) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P\left(X_i \leqslant n\right) &= \sum_{k=1}^{n} P\left(X_i = k\right) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p \frac{1 - q^n}{1 - (1 - p)} \text{ (car } q \neq 1) \\ &= 1 - q^n, \end{aligned}$$

puis $P\left(X_i > n\right) = 1 - P\left(X_i \leqslant n\right) = q^n$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $Y > n \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, N]\!]$, $X_i > n$. Donc, l'événement $\{Y > n\}$ est l'événement $\{X_1 > n\} \cap \ldots \cap \{X_N > n\}$. Puisque les variables $X_1, \ldots, X_N$ sont mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned} P(Y > n) &= P\left((X_1 > n) \cap \ldots \cap (X_N > n)\right) = \prod_{k=1}^{N} P\left(X_i > n\right) \\ &= q^{nN}. \end{aligned}$$

On en déduit que $P(Y \leqslant N) = 1 - q^{nN}$.

Ensuite, si $n \geqslant 2$, $P(Y=n) = P(Y>n-1) - P(Y>n) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = q^{(n-1)N}\left(1-q^N\right)$ ce qui reste vrai pour $n=1$ car $P(Y=1) = P(Y \leqslant 1) = 1-q^N$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=n) = q^{(n-1)N}\left(1-q^N\right).$$

b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=n) = q^{(n-1)N}\left(1-q^N\right) = \left(1-q^N\right)\left(1-\left(1-q^N\right)\right)^{n-1}$. Y suit donc la loi géométrique de paramètre $1-q^N = 1-(1-p)^N \in]0,1[$. On sait alors que Y admet une espérance à savoir

$$E(Y) = \frac{1}{1-(1-p)^N}.$$

Exercice n° 103.

1) a) $X_1(\Omega) = \mathbb{N} = X_2(\Omega)$ puis $(X_1+X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=n) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{n}((X_1=k)\cap(X_2=n-k))\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} P((X_1=k)\cap(X_2=n-k)) \text{ (événements deux à deux disjoints)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)\,P(X_2=n-k) \text{ (X_1 et X_2 sont indépendantes)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}\\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}\\
&= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.
\end{aligned}$$

Donc, X_1+X_2 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

b) On sait alors que $E(X_1+X_2) = \lambda_1+\lambda_2$ et $V(X_1+X_2) = \lambda_1+\lambda_2$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $P(X=n) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y=m)) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(Y=m)\times P_{Y=m}(X=n)$.

Or, $P_{Y=m}(X=n) = \begin{cases} \dbinom{m}{n}p^n(1-p)^{m-n} \text{ si } n \leqslant m \\ 0 \text{ si } n > m \end{cases} = \dbinom{m}{n}p^n(1-p)^{m-n}$. Donc,

$$\begin{aligned}
P(X=n) &= \sum_{m=n}^{+\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\binom{m}{n}p^n(1-p)^{m-n} = \frac{p^n}{n!}e^{-\lambda}\sum_{m=n}^{+\infty}\frac{\lambda^m(1-p)^{m-n}}{(m-n)!}\\
&= \frac{(\lambda p)^n}{n!}e^{-\lambda}\sum_{m=n}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-n}(1-p)^{m-n}}{(m-n)!} = \frac{(\lambda p)^n}{n!}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = \frac{(\lambda p)^n}{n!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}\\
&= \frac{(\lambda p)^n}{n!}e^{-(\lambda p)}.
\end{aligned}$$

Donc, X suit la loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice n° 104.

1) X prend les valeurs 0, 1 ou 2.

2) a) $X=2$ est l'événement « toutes les boules vont dans le même compartiment ». Il y a 3^n répartitions possibles des n boules dans les 3 compartiments (pour chacune des n boules, il y a 3 possibilités de compartiment). Parmi ces répartitions, il y en a une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 1, une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 2 et une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 3. Donc

$$p(X=2) = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

b) Soit E l'événement : « le troisième compartiment est vide et les deux premiers ne le sont pas ». On a alors

$$p(X=1) = 3 \times p(E).$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit E_k l'événement « k boules sont dans le compartiment n° 1 et $n-k$ sont dans le compartiment n° 2 ». $E = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} E_k$ et les E_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont deux à deux disjoints. Donc,

$$p(X=1) = 3p(E) = 3\sum_{k=1}^{n-1} p\left(E_k\right).$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Le nombre de répartitions des n boules telles que k d'entre elles soient dans le compartiment n° 1 et $n-k$ soient dans le compartiment n° 2 est encore le nombre de tirages simultanés de k boules parmi les n à savoir $\binom{n}{k}$.

Donc $p\left(E_k\right) = \dfrac{\binom{n}{k}}{3^n}$. Par suite,

$$p\left(E\right) = 3\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}}{3^n} = \frac{2^n-2}{3^{n-1}}.$$

Enfin,

$$p(X=0) = 1 - p(X=1) - p(X=2) = 1 - \frac{2^n-2}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}.$$

$$\boxed{p(X=2) = \frac{1}{3^{n-1}},\ p(X=1) = \frac{2^n-2}{3^{n-1}} \text{ et } p(X=0) = \frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}.}$$

3) a) $E(X) = 0 \times \dfrac{3^{n-1}-2^n-3}{3^{n-1}} + 1 \times \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} + 2 \times \dfrac{1}{3^{n-1}} = \dfrac{2^n}{3^{n-1}} = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, s'il y a un grand nombre de boules, il y a peu de chances qu'un compartiment reste vide.

Exercice n° 105.

1) Formule de Bayes.

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé discret.
Soit $\left(A_i\right)_{i\in I}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $i \in I$, $P\left(A_i\right) \neq 0$.
Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors,

$$\forall i \in I,\ P_B\left(A_i\right) = \frac{P\left(A_i\right) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right) \times P_{A_j}(B)}.$$

Démonstration. Soit $i \in I$. Puisque $P(B) \neq 0$,

$$P_B\left(A_i\right) = \frac{P\left(A_i \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(A_i\right) \times P_{A_i}(B)}{P(B)}.$$

Puisque $\left(A_j\right)_{j\in I}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $j \in I$, $P\left(A_j\right) \neq 0$, on a

$$P(B) = \sum_{j\in I} P\left(A_j \cap B\right) = \sum_{j\in I} P\left(A_j\right) \times P_{A_j}(B).$$

Donc,

$$P_B\left(A_i\right) = \frac{P\left(A_i\right) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j\in I} P\left(A_j\right) \times P_{A_j}(B)}.$$

2) a) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements. On a $P(A) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\dfrac{1}{2}$.

b) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient n fois le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements. On a toujours $P(A) = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6^n}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. Ceci signifie que si au bout d'un grand nombre de lancers, on a obtenu à chaque fois le 6, il est quasiment sûr que le dé est pipé.

Exercice n° 106.

1) $(U, V)(\Omega) = \left\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 / \ n \geqslant m\right\}$. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant m$.

- Si $n = m$, $P\left((U, V) = (n, m)\right) = P\left((X = n) \cap (Y = n)\right) = P(X = n) \times P(Y = n)$ car les variables X et Y sont indépendantes. Donc,

$$P\left((U, V) = (n, n)\right) = pq^n pq^n = p^2 q^{2n}.$$

- Si $n > m$,

$$\begin{aligned} P\left((U, V) = (n, m)\right) &= P\left(((X = n) \cap (Y = m)) \cup ((X = m) \cap (Y = n))\right) \\ &= P(X = n) \times P(Y = m) + P(X = m) \times P(Y = n) \\ &= 2pq^n pq^m = 2p^2 q^{n+m}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\text{pour tout } (n, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \geqslant m, \ P\left((U, V) = (n, m)\right) = \left\{\begin{array}{l} 2p^2 q^{n+m} \text{ si } n > m \\ p^2 q^{2n} \text{ si } n = m \end{array}\right. .$$

2) • $U(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
P(U=n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P\left((U,V)=(n,m)\right) = \sum_{m=0}^{n} P\left((U,V)=(n,m)\right) \\
&= p^2q^{2n} + \sum_{m=0}^{n-1} 2p^2q^{n+m} \text{ (même si } n=0 \text{ (somme vide))} \\
&= p^2q^{2n} + 2p^2q^n\frac{1-q^n}{1-q} \text{ (même si } n=0) \\
&= p^2q^{2n} + 2pq^n\left(1-q^n\right).
\end{aligned}
$$

• $V(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $m\in\mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
P(V=m) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left((U,V)=(n,m)\right) = \sum_{n=m}^{+\infty} P\left((U,V)=(n,m)\right) \\
&= p^2q^{2m} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} 2p^2q^{n+m} = p^2q^{2m} + 2p^2q^{2m+1}\frac{1}{1-q} \\
&= p^2q^{2m} + 2pq^{2m+1} = pq^{2m}(p+2q) = pq^{2m}(1+q).
\end{aligned}
$$

3) $W(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $P(W=n)=P(V=n-1)=pq^{2(n-1)}(1+q)=(1-q)(1+q)\left(q^2\right)^{n-1}=\left(1-q^2\right)\left(1-\left(1-q^2\right)\right)^{n-1}$. Donc, W suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$. Puisque $q^2\in]0,1[$, on sait que $E(W)=\dfrac{1}{1-q^2}$ puis

$$E(V)=E(W)-1=\frac{1}{1-q^2}-1=\frac{q^2}{1-q^2}.$$

4) $P((U=0)\cap(V=1))=0$ et $P(U=0)\times P(V=1)=p^2\times\left(p^2q^2+2pq^3\right)\neq 0$. Donc, les variables U et V ne sont pas indépendantes.

Exercice n° 107.

Notons A l'événement « au premier tirage, la boule provient de l'urne U_1 » (l'événement $\overline{A}$ est donc l'événement « au premier tirage, la boule provient de l'urne U_2 »).

1) $\left(A,\overline{A}\right)$ est un système complet d'événements et $P(A)=P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{1}{2}\neq 0$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p_1=P(B_1)=P(A)\times P_A(B_1)+P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}(B_1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{17}{35}.$$

La probabilité p_1 que la première boule tirée soit blanche est $\dfrac{17}{35}$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\left(B_n,\overline{B_n}\right)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$
\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= P(B_n)\times P_{B_n}(B_{n+1})+P\left(\overline{B_n}\right)\times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\
&= p_n\times\frac{2}{5}+(1-p_n)\times\frac{4}{7}=-\frac{6}{35}p_n+\frac{4}{7}.
\end{aligned}
$$

3) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.
La fonction affine $x\mapsto -\dfrac{6}{35}x+\dfrac{4}{7}$ admet un point fixe et un seul :

$$x=-\frac{6}{35}x+\frac{4}{7}\Leftrightarrow\frac{41}{35}x=\frac{4}{7}\Leftrightarrow x=\frac{20}{41}.$$

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1}-\dfrac{20}{41}=-\dfrac{6}{35}\left(p_n-\dfrac{20}{41}\right)$ puis que pour tout entier naturel non nul n,

$$p_n-\frac{20}{41}=\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{20}{41}\right)=\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(\frac{17}{35}-\frac{20}{41}\right)=-\frac{3}{1435}\times\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1},$$

et donc

$$p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}.$$

Pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \dfrac{20}{41} - \dfrac{3}{1435} \times \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1}$.

Exercice n° 108.

1) $X(\Omega) = \mathbb{N} = Y(\Omega)$. Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!} = \frac{1}{e2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \\ &= \frac{1}{2^{i+1}}. \end{aligned}$$

Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!} = \frac{1}{ej!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= \frac{1}{ej!} \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{ej!} = \frac{1^j}{j!} e^{-1}. \end{aligned}$$

2) a) Soit $Z = 1 + X$. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(Z = n) = P(X = n - 1) = \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Donc, Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$. On sait que $E(Z) = \dfrac{1}{p} = 2$ et que $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2} = 2$.

On en déduit que $E(X) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = 1$ et $V(X) = V(Z - 1) = V(Z) = 2$.

b) Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. Donc, $E(Y) = \lambda = 1$ et $V(Y) = \lambda = 1$.

3) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

$$P(X = i) \times P(Y = j) = \frac{1}{2^{i+1}} \times \frac{1}{ej!} = \frac{1}{e2^{i+1}j!} = P((X = i) \cap (Y = j)).$$

Donc le variables X et Y sont indépendantes.

4)

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = i)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}i!} = \frac{1}{2e} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^i}{i!} = \frac{1}{2e} e^{1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

Exercice n° 109.

Ω est l'ensemble des tirages successifs sans remise des $n+2$ boules ou encore l'ensemble des permutations des $n+2$ boules. Le nombre de tirages successifs et sans remise des $n+2$ boules est $(n+2)!$ ou encore $\text{card}(\Omega) = (n+2)!$.

1) L'urne contient $n+2$ boules. La première boule blanche peut apparaître au premier, deuxième ou troisième tirage ou encore $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

• $X = 1$ est l'événement : « la première boule tirée est blanche ». On a n possibilités de tirer la première boule parmi les n blanches puis pour chacune de ces n possibilités, on a $(n+1)!$ possibilités de tirer les $n+1$ boules restantes. Donc

$$p(X = 1) = \frac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{n}{n+2}.$$

• $X = 3$ est l'événement : « les deux premières boules tirées sont noires ». On a $2! = 2$ possibilités de tirer les deux premières boules puis pour chacune de ces deux possibilités, on a $n!$ possibilités de tirer les n boules restantes. Donc,

$$p(X = 3) = \frac{2 \times n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

• Enfin

$$\begin{aligned}p(X=2) &= 1-p(X=1)-p(X=3) = 1-\frac{n}{n+2}-\frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2)-n(n+1)-2}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{2n}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{X(\Omega)=[\![1,3]\!] \text{ et } p(X=1)=\frac{n}{n+2},\ p(X=2)=\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \text{ et } p(X=3)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}.}$$

2) La première boule numérotée 1 peut sortir au premier, deuxième, ..., $(n+1)$-ème tirage ou encore $Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]$.
Soit $k\in[\![2,n+1]\!]$. L'événement $Y=k$ est l'événement « les $k-1$ premières boules ne portent pas le numéro 1 et la k-ème porte le numéro 1 ». Pour les $k-1$ premières boules, on a $n(n-1)\times\ldots\times(n-k+2)=\dfrac{n!}{(n-k+1)!}$ tirages possibles puis pour chacun des ces tirages on a 2 possibilités pour la k-ème boule et donc $2\times\dfrac{n!}{(n-k+1)!}$ tirages possibles pour les k premières boules. Pour chacun de ces tirages, on a $(n+2-k)!$ tirages possibles des $n+2-k$ boules restantes. Finalement,

$$p(Y=k)=\frac{\dfrac{n!}{(n-k+1)!}\times 2\times(n+2-k)!}{(n+2)!}=\frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.$$

L'événement $Y=1$ est l'événement « la première boule porte le numéro 1 ». Il y a 2 tirages possibles pour la première boule puis pour chacun de ces deux tirages, il y a $(n+1)!$ tirages possibles des $n+1$ boules restantes. Donc

$$p(Y=1)=\frac{2\times(n+1)!}{(n+2)!}=\frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{2(n+2-1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Finalement

$$\boxed{Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!] \text{ et } \forall k\in[\![1,n+1]\!],\ p(Y=k)=\frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.}$$

Exercice n° 110.

1) a) Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $a_n=P(X=n)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leqslant b_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n=1$. Donc, $R_X=R_a\geqslant R_b=1$.
On a montré que $R_X\geqslant 1$.

Puisque $R\geqslant 1$, $]-1,1[\subset D_{G_X}$. De plus, $\sum a_n$ converge ($\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)=1$) et $\sum(-1)^n a_n$ converge absolument (car $\forall n\in\mathbb{N}$, $|(-1)^n a_n|=a_n$) et donc converge. Finalement, $[-1,1]\subset D_{G_X}$.

Immédiatement, $\forall t\in D_{G_X}$, $G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}t^nP(X=n)=E\left(t^X\right)$.

b) On sait que G_X est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et en particulier G_X est de classe C^∞ sur $]-1,1[$. On sait de plus que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=a_k=\frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

2) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=P(X=n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$. Pour tout réel t, la série de terme général $a_nt^n=\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda}$ converge et

$$\forall t\in\mathbb{R},\ G_X(t)=e^{\lambda t}e^{-\lambda}=e^{\lambda(t-1)}.$$

En particulier, $R=+\infty$ puis $D_{G_X}=\mathbb{R}$.

b) Puisque X et Y sont indépendantes, on sait que t^X et t^Y sont indépendantes. Pour tout réel $t\in[-1,1]$,

$$\begin{aligned}G_{X+Y}(t) &= E\left(t^{X+Y}\right) = E\left(t^X t^Y\right) = E\left(t^X\right) E\left(t^Y\right) \text{ (car } t^X \text{ et } t^Y \text{ sont indépendantes)}\\ &= G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda_1(t-1)}e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.\end{aligned}$$

D'après la question 1)b), $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X+Y=n) = a_n = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$. $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

Exercice n° 111.

1) • $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=k)\cap(Y=n)) \geqslant 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = p(1-p)^n < +\infty$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = \frac{p}{1-(1-p)} = 1 < +\infty$$

Donc, la famille $(P((X=k)\cap(Y=n)))_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} P((X=k)\cap(Y=n)) = 1$.

On a donc bien défini une loi de probabilité.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P(Y=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p(1-p)^n.$$

b) Posons $Z = 1+Y$. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(1+Y=n) = P(Y=n-1) = p(1-p)^{n-1}.$$

Donc, $1+Y$ suit une loi géométrique de paramètre p.

c) On sait alors que $E(Y) = E(Z-1) = E(Z)-1 = \dfrac{1}{p}-1 = \dfrac{1-p}{p}$.

3) $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}P(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n)) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k}\\ &= p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k \frac{1}{\left(1-\dfrac{1-p}{2}\right)^{k+1}} \text{ (car } 0 < \frac{1-p}{2} < \frac{1}{2} < 1)\\ &= p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\left(\frac{2}{1+p}\right)^{k+1} = \frac{2p}{1+p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k.\end{aligned}$$

Exercice n° 112.

1) 1ère solution. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Soit B une partie fixée à k éléments. Le nombre de couples (A,B) tels que $A \subset B$ est encore le nombre de parties A telles que $A \subset B$. Le nombre de ces parties A est

$$\text{card}\left(\mathcal{P}(B)\right) = 2^k.$$

Ensuite, il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments et donc $\binom{n}{k}2^{n-k}$ couples (A, B) tels que $\text{card}(B) = k$ et $A \subset B$. En faisant varier k, on obtient

$$a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n.$$

2ème solution. Notons F l'ensemble des couples (A, B) tels que $A \subset B$.

Pour $(A, B) \in F$, définissons $\begin{array}{cccc} \varphi_{(A,B)} : & E & \to & \{0,1,2\} \\ & x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in A \\ 1 \text{ si } x \in B \setminus A \\ 2 \text{ si } x \notin B \end{array}\right. \end{array}$. $\varphi_{(A,B)}$ est une application de E dans $\{0, 1, 2\}$.

Soit alors $\begin{array}{cccc} \varphi : & F & \to & \{0,1,2\}^E \\ & (A,B) & \mapsto & \varphi_{(A,B)} \end{array}$. φ est bien sûr une bijection. Démontrons-le.

- φ est une application de F vers $\{0, 1, 2\}^E$.

- Soit $((A, B), (A', B')) \in F^2$ tel que $\varphi_{(A,B)} = \varphi_{(A',B')}$.
Soit $x \in E$. $x \in A \Leftrightarrow \varphi_{(A,B)}(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{(A',B')}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A'$. Donc, $A = A'$.
Soit $x \in E$. $x \in B \setminus A \Leftrightarrow \varphi_{(A,B)}(x) = 1 \Leftrightarrow \varphi_{(A',B')}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B' \setminus A'$. Donc, $B \setminus A = B' \setminus A'$ puis $B = B'$ car $A \subset B$, $A' \subset B'$ et $A = A'$. Finalement, $(A, B) = (A', B')$.
On a montré que φ est injective.

- Soit $f \in \{0, 1, 2\}^E$. Soient A l'ensemble des x de E tels que $f(x) = 0$ puis B la réunion de A et de l'ensemble des x de E tels que $f(x) = 1$. Alors $A \subset B$ puis $\varphi((A, B)) = f$. On a montré que φ est surjective et finalement que φ est bijective.

Puisque φ est une bijection, $\text{card}(F) = \text{card}\left(\{0, 1, 2\}^E\right) = 3^n$.

$$\boxed{a = 3^n.}$$

2) Soit $G = \left\{(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 / \ A \cap B = \varnothing\right\}$. Soit $\begin{array}{cccc} \psi : & G & \to & F \\ & (A,B) & \mapsto & (A, A \cup B) \end{array}$. φ est bien une bijection de réciproque $\begin{array}{cccc} \psi^{-1} : & F & \to & G \\ & (A,B) & \mapsto & (A, B \setminus A) \end{array}$. Donc, F et G sont équipotents puis

$$\boxed{b = a = 3^n.}$$

3) Pour chaque couple (A, B) tels que $A \cap B = \varnothing$, il y a exactement un triplet $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$ à savoir le triplet $(A, B, C_E(A \cup B))$. Réciproquement, chaque triplet $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$ fournit un et un seul couple $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tel que $A \cap B = \varnothing$. Donc,

$$\boxed{c = b = a = 3^n.}$$