

# Révisions oraux 1

**n° 1. ADJEMOUT** (exercice n° 62 oraux CCP)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = Id_E$ .

- 1) Montrer que  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$ .
- 2) Montrer que  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$ .
- 3) Montrer que  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ .

**n° 2. ALONZO** (exercice n° 52 oraux CCP)

1) Prouver que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

2) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Quel est le domaine de définition de  $f$ ?  
Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Justifier l'existence et calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- c) Justifier l'existence et calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
- d)  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**n° 3. ANDRIEU** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $2A^3 = 4A^2 - 3A + I_n$ . Montrer que la suite  $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice de projection que l'on déterminera en fonction de  $A$ .

**n° 4. BEAUDUN** Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme :

$$P = X^{2n} - 2X \cos(n\theta) + 1.$$

**n° 5. BENEZECH** Etudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n + \cos n}$ .

**n° 6. BERNARD** Montrer que  $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  est une norme, et qu'elle n'est pas équivalente à

$$P \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(k)|$$

$$N(P) = \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|.$$

**n° 7. BETTANE** Extrema locaux et globaux de  $f(x, y) = y(x^2 + \ln^2 y)$ .

**n° 8. BIRSAL** Soient  $r_1, \dots, r_n, a$  et  $b$  des complexes tels que  $a \neq b$ . Montrer que

$$P(x) = \begin{vmatrix} r_1 + x & b + x & \dots & b + x \\ a + x & r_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ a + x & \dots & a + x & r_n + x \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré au plus égal à 1. En déduire la valeur de  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} r_1 & b & \dots & b \\ a & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & r_n \end{vmatrix}$

et la valeur de  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{vmatrix}$ . Que vaut  $\Delta_2$  quand  $a = b$  ?

**n° 9. BONNEFOND** Montrer que l'ensemble des fonctions réelles lipschitziennes est un espace vectoriel que l'on notera  $L$ . Montrer que le produit de deux fonctions bornées et éléments de  $L$  est dans  $L$ . Montrer que l'on ne peut enlever l'hypothèse « bornées ».

Soit  $f \in L$ . Montrer que :  $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq A|x| + B$ .

**n° 10. BORTOLI** (exercice n° 41 oraux CCP)

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermé et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans  $\mathbb{R}^2$ .

Les théorèmes énoncés pourront être utilisés oralement à travers les exemples choisis.

**Remarques.**

- 1) On utilisera au moins une fois des suites.
- 2) On utilisera au plus une fois le passage au complémentaire.
- 3) Ne pas utiliser le fait que  $\mathbb{R}^2$  et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

**n° 11. BOUTAHAR** (exercice n° 43 oraux CCP)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = x_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$ .

- 1) (a) Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de  $x_0$  le sens de variation de  $(u_n)$ .  
(b) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
- 2) Déterminer l'ensemble des fonctions  $h$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan}x)$ .

**n° 12. BRIOT** Résoudre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'équation  $A^t A A = I_n$ .

**n° 13. CECCALDI** (exercice n° 31 oraux CCP)

- 1) Déterminer une primitive de  $x \mapsto \cos^4 x$ .
- 2) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y'' + y = \cos^3 x$  en utilisant la méthode de variations des constantes.

**n° 14. CHAFFER** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = A + I_n$ . Montrer que  $\det A > 0$ .

**n° 15. DAOUD** Soit  $\alpha > 0$ . Nature de la série de terme général  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}} \right)$ .

**n° 16. DRAY** Pour  $n \in \mathbb{R}$ , on pose  $u_n = \frac{\cos(2n\pi/3)}{n + \cos(2n\pi/3)}$ . Rayon de convergence de  $\sum u_n x^n$  et étude pour  $x = \pm R$ .

**n° 17. GABRIEL** Pour  $1 \leq k \leq n$ , on pose  $u_{n,k} = \sin \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n^2}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_{n,k}$ .

**n° 18. GALLINI** Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $A, B, C$  les points d'affixes respectives  $z, z^2$  et  $z^3$ . Déterminer l'ensemble des complexes  $z$  tels que le triangle  $(ABC)$  soit un triangle rectangle.

**n° 19. GUEDJ** Pour  $x$  réel, on note  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)} \right)$ .

- 1) Domaine de définition, signe, continuité, dérivabilité et sens de variations de  $f$ .
- 2) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  sous forme d'une série puis déterminer la somme de cette série.

**n° 20. GUITAOU** Soit  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$ .

- 1) Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement, encore noté  $f$ , admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.
- 2) En utilisant  $\int_0^1 (1+x)^t dt$ , montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .

**n° 21. HARRARI** Soit  $n \in \mathbb{N}$  supérieur ou égal à 2. On note  $S(n)$  la somme des diviseurs de  $n$ .

- 1) Exprimer  $S(n)$  à l'aide de la décomposition primaire de  $n$  (on pourra commencer par le cas où  $n$  est puissance d'un nombre premier).
- 2) On note  $E$  l'ensemble des  $n$  tels que  $S(n) = 2n$ . Montrer que si  $2^p - 1$  est premier alors  $2^{p-1}(2^p - 1)$  est dans  $E$ .
- 3) Soit  $n$  pair dans  $E$ . Montrer qu'il existe un nombre  $p$  tel que  $2^p - 1$  soit premier et  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ .

**n° 22. KHATCHOUGUIAN** (exercice n° 48 oraux CCP)

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ .

- 1) Énoncer le théorème de WEIERSTRASS d'approximation par des fonctions polynômes.
- 2) Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment  $[0, 1]$  vers  $f$ .
  - (a) Montrer que la suite de fonctions  $(P_n f)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur le segment  $[0, 1]$  vers  $f^2$ .
  - (b) Démontrer que  $\int_0^1 f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$ .
  - (c) Calculer  $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$ .
- 3) En déduire que  $f$  est la fonction nulle sur le segment  $[0, 1]$ .

**n° 23. KUNZTMANN** Résoudre le système différentiel  $\begin{cases} x' = -3x + y - z \\ y' = -7x + 5y - z \\ z' = -6x + 6y + 2z \end{cases}$ .

**n° 24. LIEUTAUD** (exercice n° 72 oraux CCP)

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , et soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On suppose que  $f(e_1) = \dots = f(e_n) = v$ , où  $v$  est un vecteur donné de  $E$ .

- 1) Quel est le rang de  $f$ ?
- 2)  $f$  est-il diagonalisable? (discuter en fonction du vecteur  $v$ ).

**n° 25. MASSABO** Soit  $E$  un espace euclidien. On note  $O(E)$  le groupe des endomorphismes orthogonaux de  $E$  et on définit l'ensemble

$$\Gamma = \{u \in \mathcal{L}(E) / \forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|\}.$$

- 1) Montrer que  $\Gamma$  est une partie convexe de  $\mathcal{L}(E)$  qui contient  $O(E)$ .
- 2) Soit  $u \in \Gamma$  tel qu'il existe  $(f, g) \in \Gamma^2$  vérifiant  $f \neq g$  et  $u = \frac{1}{2}(f + g)$ . Montrer que  $u \notin O(E)$ .

**n° 26. PAPPALARDO** Soit  $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$  et  $x_1, x_2$  et  $x_3$  les trois racines de  $P$ . Calculer, en cas d'existence,

$$S = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}.$$

**n° 27. PONT** Quel est le nombre de solutions de l'équation  $2n_1 + 3n_2 = n$  d'inconnues  $n_1$  et  $n_2$  (avec  $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ )?

**n° 28. QUERETTE** Quel est le pgcd de  $5^n + 6^n$  et  $5^{n+1} + 6^{n+1}$ ?

**n° 29. RENOULT** Soit  $n \geq 2$ .

- 1) Montrer qu'il existe un unique réel positif  $x_n$  tel que  $x^n = 1 + x$ .
- 2) Démontrer que la suite  $(x_n)$  est décroissante
- 3) Déterminer la limite de  $x_n$ .
- 4) Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x_n - 1) = \ln 2$ .

**n° 30. ROLLAND** Pour  $0 \leq k \leq n$ , on pose  $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ . Montrer que  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  puis déterminer les coordonnées de  $1, X, X^2, \dots, X^n$  dans cette base.

**n° 31. SABIANI** Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$  tel que  $AB = 0$ . Montrer que  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun.

**n° 32. SALUR** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $|\lambda| < 1$ . Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\lambda x)$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$ .  $f$  est-elle développable en série entière? Si oui, donner son développement.

**n° 33. SEGNING NGUENA** Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax) dx, a \in \mathbb{R}$ .

**n° 34. TEUMA**

1) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que la série  $\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$  converge. On note  $\sin(A)$  sa somme.

2) Calculer  $\sin(A)$  pour  $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ .

3) Peut-on trouver  $A$  telle que  $\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

**n° 35. TRICOIRE** Soit  $(u_n)$  une suite réelle positive. On suppose que la série de terme général  $u_n$  converge.

1) Peut-on affirmer qu'il existe un réel  $\alpha > 1$  tel que  $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$ ?

2) Montrer que si la suite  $(u_n)$  est décroissante, alors  $u_n = o(\frac{1}{n})$ .

3) Peut-on enlever l'hypothèse «  $(u_n)$  est décroissante »?

**n° 36. YOUSSEFI** Les deux matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sont-elles semblables dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ?