

# Planche n° 19. Fonctions de plusieurs variables

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable

## Exercice n° 1 (\*\* I)

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ en } (0,0) & 2) \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ en } (0,0) & 3) \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4} \text{ en } (0,0) & 4) \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}} \text{ en } (0,0) \\ 5) \frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y} \text{ en } (0,0) & 6) \frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \text{ en } (0,0) & 7) \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2} \text{ en } (0,0,0) & 8) \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2} \text{ en } (2,-2,0) \end{array}$$

## Exercice n° 2 (\*\*\*) I

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  (au moins) sur  $\mathbb{R}^2$ .

## Exercice n° 3 (\*\*\*) I

Soit  $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ .

Déterminer le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel  $f$  est de classe  $C^1$ . Vérifier que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  existent et sont différents.

## Exercice n° 4 (\*)

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On dit que  $f$  est positivement homogène de degré  $r$  ( $r$  réel donné) si et seulement si  $\forall \lambda \in ]0, +\infty[$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ .

Montrer pour une telle fonction l'identité d'EULER :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

## Exercice n° 5 (\*\* I)

- 1) Extrema de la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^2y + \ln(1+y^2)$ .
- 2) Extrema de la fonction  $f : (x, y) \mapsto -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$ .

## Exercice n° 6 (\*\*\*) I

Soit  $f : \begin{array}{ccc} \text{GL}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$ . Montrer que  $f$  est différentiable en tout point de  $\text{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  et déterminer sa différentielle.

## Exercice n° 7 (\*)

Déterminer  $\text{Max}\{|\sin z|, z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ .

## Exercice n° 8 (\*\*\*) I

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

- 1)  $2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  en posant  $u = x + y$  et  $v = x + 2y$ .
- 2)  $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  en passant en polaires.
- 3)  $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  en posant  $x = u$  et  $y = uv$ .

**Exercice n° 9 (\*\*)**

Déterminer la différentielle en tout point de  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  .  
 $(x, y) \mapsto x \cdot y$

**Exercice n° 10 (\*\*)**

$E = \mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable sur  $E \setminus \{0\}$  et  
 $x \mapsto \|x\|_2$   
préciser  $df$ . Montrer que  $f$  n'est pas différentiable en 0.

**Exercice n° 11 (\*\*\*)**

Maximum du produit des distances d'un point  $M$  intérieur à un triangle  $ABC$  aux cotés de ce triangle.

**Exercice n° 12 (\*)**

Minimum de  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - a)^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$ ,  $a$  réel donné.

**Exercice n° 13 (\*\*\*)**

Trouver une application non constante  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que l'application  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $g(x, y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$  ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de  $g$  est  $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ . Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

**Exercice n° 14 (\*\*\*) I)**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que  $f$  est une rotation affine.