

Planche n° 19. Fonctions de plusieurs variables.

Corrigé

Exercice n° 1

1) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Quand x tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si f a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.

Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{1}{2}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\frac{1}{2} \neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \times |xy| \leq \frac{1}{2}|xy|$. Comme $\frac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de f . $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

3) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $y \neq 0$, $f(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$. Quand y tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2}|x|}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

5) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x), x \in \mathbb{R}\}$.

Pour $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \frac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0)$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

6) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$.

$\frac{1 - \cos \sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\sim} \frac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \frac{|x|}{2}$ et donc f tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

7) f est définie sur \mathbb{R}^3 privé de la surface d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.

$f(x,0,0) = \frac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.

8) $f(2+h, -2+k, l) = \frac{h+k}{h^2 - k^2 + l^2 + 4h + 4k} = g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand h tend vers 0 et $g(0,0,l)$ tend vers 0 $\neq \frac{1}{4}$ quand l tend vers 0. Donc, f n'a pas de limite réelle quand (x,y,z) tend vers $(2,-2,0)$.

Exercice n° 2

• f est définie sur \mathbb{R}^2 .

• f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• **Continuité en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy||x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq |xy| \times \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$. On en

déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur \mathbb{R}^2 .

f est de classe C^0 au moins sur \mathbb{R}^2 .

• **Dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.** f est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (x^3 - xy^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x, y) \neq (0, 0)$ $f(x, y) = -f(y, x)$. Donc pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur \mathbb{R}^2 définies par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.** Pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| = \frac{|y||x^4 + 4x^2y^2 - y^4|}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y| \frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y| \frac{2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, on en déduit que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$ et finalement sur \mathbb{R}^2 . Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

f est au moins de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice n° 3

On pose $D = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ puis $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

- f est définie sur \mathbb{R}^2 .
- f est de classe C^1 sur Ω en vertu de théorèmes généraux et pour $(x, y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

- Etudions la continuité de f en $(0, 0)$. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \begin{cases} y^2 \left| \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq \begin{cases} y^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} = y^2.$$

Comme y^2 tend vers 0 quand (x, y) tend vers 0, $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \neq (0, 0)}} f(x, y) = f(0, 0)$ et donc f est continue en $(0, 0)$ puis

f est continue sur \mathbb{R}^2 .

- Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0} = \frac{0 - 0}{x - x_0} = 0.$$

Donc $\frac{f(x, x_0) - f(x_0, 0)}{x - x_0}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 . On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} = \frac{y^2 \sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{y} = y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left| \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} \right| \leq |y|$ puis que $\frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0}$ tend vers 0 quand y tend vers 0. Par suite, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) \right| = \begin{cases} |y| \left| \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq |y|.$$

Quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, $|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$ quand (x, y) tend vers $(x_0, 0)$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0, 0)$ et finalement

la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Supposons tout d'abord $x_0 = 0$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| = \begin{cases} \left| 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq 2|y| + |x|.$$

Quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, $|x| + 2|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.

Supposons maintenant $x_0 \neq 0$. Pour $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = 2y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0 \cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$. Quand y tend vers 0, $2y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right)$ tend vers 0 car $\left| 2y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) \right| \leq 2|y|$ et $x_0 \cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0 \neq 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0 et la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0, 0)$ si $x_0 \neq 0$. On a montré que

f est de classe C^1 sur $\Omega \cup \{(0, 0)\}$ et pas plus.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = \frac{y \cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$. On a montré que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et sont différents.

Exercice n° 4

On dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = r \lambda^{r-1} f(x),$$

et pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

Exercice n° 5

1) f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , (x_0, y_0) est un point critique de f .

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + \frac{2y}{1+y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , alors $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Réciproquement, pour tout réel $x \neq 0$, $f(x, x^2) - f(0, 0) = f(x, y) = x^4 + \ln(1 + x^4) > 0$. Puisque $(x, x^2) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} (0, 0)$,

l'expression $f(x, y) - f(0, 0)$ prend des valeurs strictement positives dans tout voisinage de $(0, 0)$.

D'autre part, pour tout réel $x \neq 0$, $f(x, -x^2) - f(0, 0) = f(x, y) = -x^4 + \ln(1 + x^4) < 0$ (inégalité de convexité). L'expression $f(x, y) - f(0, 0)$ prend aussi des valeurs strictement négatives dans tout voisinage de $(0, 0)$.

Ainsi, $f(0, 0)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local et finalement, f n'a pas d'extremum local.

2) La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x-y) + 4x^3 = 0 \\ 4(x-y) + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ -4(x-y) + 4x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ (0, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \right\}. \end{aligned}$$

• Etude en $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$ et donc f admet aussi un minimum global en $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ égal à 8.

• Etude en $(0, 0)$. $f(0, 0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $f(x, x) = 2x^4 > 0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0, 0)$ dans tout voisinage de $(0, 0)$. Pour $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\setminus \{0\}$, $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0, 0)$ dans tout voisinage de $(0, 0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Exercice n° 6

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\| \cdot \|$. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On sait que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A + H \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour un tel H

$$(A + H)^{-1} - A^{-1} = (A + H)^{-1}(I_n - (A + H)A^{-1}) = -(A + H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned} (A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} &= -(A + H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = (A + H)^{-1}(-HA^{-1} + (A + H)A^{-1}HA^{-1}) \\ &= (A + H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}. \end{aligned}$$

Par suite, $\|f(A + H) - f(A) + A^{-1}HA^{-1}\| = \|(A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\| \leq \|(A + H)^{-1}\| \|A^{-1}\|^2 \|H\|^2$.

Maintenant, la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{t}(\text{com}(M))$, valable pour tout $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\|(A + H)^{-1}\|$ tend vers $\|A^{-1}\|$ quand H tend vers 0 . Par suite,

$$\lim_{H \rightarrow 0} \|(A + H)^{-1}\| \|A^{-1}\|^2 \|H\| = 0 \text{ et donc } \lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\|H\|} \|(A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\| = 0.$$

Comme l'application $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de f en A .

$$\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

Exercice n° 7

Pour tout complexe z tel que $|z| \leq 1$,

$$|\sin(z)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(|z|) \leq \text{sh}(1),$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z = i$ car $|\sin(i)| = \left| \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} \right| = \frac{e - e^{-1}}{2} = \text{sh}(1)$.

$$\text{Max}\{|\sin z|, z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\} = \text{sh}(1).$$

Exercice n° 8

1) Soit f une application de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Posons $f(x, y) = g(u, v)$ où $u = x + y$ et $v = x + 2y$. L'application $(x, y) \mapsto (x + y, x + 2y) = (u, v)$ est un automorphisme de \mathbb{R}^2 et en particulier de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g(u, v)) = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - 2\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite, $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = h(v) \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = h(x + 2y)$.

$$\text{Les solutions sont les } (x, y) \mapsto h(x + 2y) \text{ où } h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Par exemple, la fonction $(x, y) \mapsto \cos \sqrt{(x + 2y)^2 + 1}$ est solution.

2) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Posons $f(x, y) = g(r, \theta)$ où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. L'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f(x, y)) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x, y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}) / \forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[, g(r, \theta) = h_1(r) \\ &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = h_1(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = h(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Les solutions sont les $(x, y) \mapsto h(x^2 + y^2)$ où $h \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

3) Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. D'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Soit $\varphi :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Donc si on pose $f(x, y) = g(u, v)$, on a $g = f \circ \varphi$.

$$(u, v) \mapsto (u, uv) = (x, y)$$

Soit $(x, y, u, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

$$\varphi(u, v) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ uv = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \right) + \left(\frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{1}{x} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x} \frac{\partial g}{\partial v} + 2y \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \frac{2y}{x} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ &= x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \forall (u, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (u, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = h(v) \\ &\Leftrightarrow \exists (h, k) \in (C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2 / \forall (u, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, g(u, v) = uh(v) + k(v) \\ &\Leftrightarrow \exists (h, k) \in (C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2 / \forall (x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, f(x, y) = xh(xy) + k(xy). \end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les $(x, y) \mapsto xh(xy) + k(xy)$ où h et k sont deux fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Exercice n° 9

On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \|(x, y)\| = \text{Max}\{\|x\|_2, \|y\|_2\}$.

- Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h, k) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a, b) + (h, k)) = (a + h) \cdot (b + k) = a \cdot b + a \cdot h + b \cdot k + h \cdot k,$$

et donc $f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) = (a \cdot h + b \cdot k) + h \cdot k$. Maintenant l'application $L : (h, k) \mapsto a \cdot h + b \cdot k$ est linéaire et de plus, pour $(h, k) \neq (0, 0)$,

$$|f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) - L((h, k))| = |h \cdot k| \leq \|h\|_2 \|k\|_2 \leq \|(h, k)\|^2,$$

et donc $\frac{1}{\|(h, k)\|} |f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) - L((h, k))| \leq \|(h, k)\|$ puis

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\|(h, k)\|} |f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) - L((h, k))| = 0.$$

Puisque l'application $(h, k) \mapsto a \cdot h + b \cdot k$ est linéaire, on en déduit que f est différentiable en (a, b) et que $\forall (h, k) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $df_{(a, b)}(h, k) = a \cdot h + b \cdot k$.

Exercice n° 10

1ère solution. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $h \in \mathbb{R}^n$

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \frac{1}{\|x\|_2} \sum_{i=1}^n x_i h_i = \frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

2ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x + h\|_2 - \|x\|_2 = \frac{(\|x + h\|_2 - \|x\|_2)(\|x + h\|_2 + \|x\|_2)}{\|x + h\|_2 + \|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x + h\|_2 + \|x\|_2},$$

puis

$$\|x + h\|_2 - \|x\|_2 - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x + h\|_2 + \|x\|_2} - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{-(\|x + h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x + h\|_2 + \|x\|_2) \|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est continue sur \mathbb{R}^n . On en déduit que $\frac{1}{(\|x + h\|_2 + \|x\|_2) \|x\|_2} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x + h\|_2 - \|x\|_2$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ensuite, puisque $|(x|h)| \leq \|x\|_2 \|h\|_2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), on a $x|h \underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|h\|_2)$ puis $(\|x + h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|h\|_2)$.

Finalement, $\frac{-(\|x + h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x + h\|_2 + \|x\|_2) \|x\|_2} \underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x + h\|_2 \underset{h \rightarrow 0}{=} \|x\|_2 + \frac{x|h}{\|x\|_2} + o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h \mapsto \frac{x|h}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que f est différentiable en tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

• Vérifions que f n'est pas différentiable en 0. Soit L une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2} (\|0 + h\|_2 - \|0\|_2 - L(h)) = 1 - L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand h tend vers 0. Pour u vecteur non nul donné et t réel non nul, l'expression $1 - L\left(\frac{tu}{\|tu\|_2}\right) = 1 - \frac{t}{|t|}L\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers 0 quand t tend vers 0. Mais si t tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $L(u) = \|u\|_2$ et si t tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient $L(u) = -\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u \neq 0$. Donc f n'est pas différentiable en 0.

Exercice n° 11

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note \mathcal{A} l'aire du triangle ABC . Soit M un point intérieur au triangle ABC . On note I , J et K les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC) , (CA) et (AB) respectivement. On pose $u = \text{aire de } MBC$, $v = \text{aire de } MCA$ et $w = \text{aire de } MAB$. On a

$$d(M, (BC)) \times d(M, (CA)) \times d(M, (AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc}uv(\mathcal{A} - u - v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f : (u, v) \mapsto uv(\mathcal{A} - u - v)$ sur le domaine

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0 \text{ et } u + v \leq \mathcal{A}\}.$$

T est un compact de \mathbb{R}^2 . En effet :

- $\forall (u, v) \in T^2$, $\|(u, v)\|_1 = u + v \leq \mathcal{A}$ et donc T est bornée.
- Les applications $\varphi_1 : (u, v) \mapsto u$, $\varphi_2 : (u, v) \mapsto v$ et $\varphi_3 : (u, v) \mapsto u + v$ sont continues sur \mathbb{R}^2 en tant que formes linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0\} = \varphi_1^{-1}([0, +\infty[)$, $P_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / v \geq 0\} = \varphi_2^{-1}([0, +\infty[)$ et $P_3 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u + v \leq \mathcal{A}\} = \varphi_3^{-1}(] - \infty, \mathcal{A}])$ sont des fermés de \mathbb{R}^2 en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est un fermé de \mathbb{R}^2 en tant qu'intersection de fermés de \mathbb{R}^2 .

Puisque T est un fermé borné de \mathbb{R}^2 , T est un compact de \mathbb{R}^2 puisque \mathbb{R}^2 est de dimension finie et d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

f est continue sur le compact T à valeurs dans \mathbb{R} en tant que polynôme à plusieurs variables et donc f admet un maximum sur T .

Pour tout (u, v) appartenant à la frontière de T , on a $f(u, v) = 0$. Comme f est strictement positive sur $\overset{\circ}{T} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u > 0, v > 0 \text{ et } u + v < \mathcal{A}\}$, f admet son maximum dans $\overset{\circ}{T}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{T}$ qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 , si f admet un maximum en $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{T}$, (u_0, v_0) est nécessairement un point critique de f . Soit $(u, v) \in \overset{\circ}{T}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(\mathcal{A} - 2u - v) = 0 \\ u(\mathcal{A} - u - 2v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = \mathcal{A} \\ u + 2v = \mathcal{A} \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{\mathcal{A}}{3}.$$

Puisque f admet un point critique et un seul à savoir $(u_0, v_0) = \left(\frac{\mathcal{A}}{3}, \frac{\mathcal{A}}{3}\right)$, f admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0, v_0) = \frac{\mathcal{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur au triangle ABC aux cotés de ce triangle est donc $\frac{8\mathcal{A}^3}{27abc}$.

Remarque. On peut démontrer que pour tout point M intérieur au triangle ABC , on a

$$M = \text{bar}((A, \text{aire de } MBC), (B, \text{aire de } MAC), (C, \text{aire de } MAB)).$$

Si maintenant M est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en G l'isobarycentre du triangle ABC .

Exercice n° 12

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(0, a)$ et $(a, 0)$ dans un certain repère \mathcal{R} orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} . Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = MA + MB \geq AB \text{ avec égalité si et seulement si } M \in [AB].$$

Donc f admet un minimum global égal à $AB = a\sqrt{2}$ atteint en tout couple (x, y) de la forme $(\lambda a, (1 - \lambda)a)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Exercice n° 13

Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur \mathbb{R} , g est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -2 \frac{\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= -4 \frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{\sin^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right) \\ &= -4 \frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{1 - \cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right). \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2 \frac{\cos(2x) \operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= -2 \cos(2x) \frac{2 \operatorname{ch}^3(2y) - 4 \operatorname{sh}^2(2y) \operatorname{ch}(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{\cos^2(2x) \operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right) \\ &= -4 \frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}^3(2y)} (-\operatorname{ch}^2(2y) + 2) f' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{\cos^2(2x) (\operatorname{ch}^2(2y) - 1)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\operatorname{ch}^2(2y)}{4} \Delta g(x, y) = -2 \frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)} \right) f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right).$$

Maintenant, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $-1 \leq \frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \leq 1$ et d'autre part, l'expression $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} = \cos(2x)$ décrit $[-1, 1]$ quand x décrit \mathbb{R} . Donc $\left\{ \frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = [-1, 1]$. Par suite,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \Delta g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1], (1 - t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0.$$

On cherche une application f de classe C^2 sur $] -1, 1[$. Or $\left| \frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right| = 1 \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \operatorname{ch}(2y) \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \operatorname{ch}(2y) = 1 \Leftrightarrow y = 0$ et $x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(\frac{k\pi}{2}, 0 \right), k \in \mathbb{Z} \right\}, \Delta g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in] -1, 1[, (1 - t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in] -1, 1[, ((1 - t^2)f'(t))' = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t \in] -1, 1[, f'(t) = \frac{\lambda}{1 - t^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in] -1, 1[, f(t) = \frac{\lambda}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) + \mu.$$

De plus, f n'est pas constante si et seulement si $\lambda \neq 0$.

$L'application t \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \text{ convient.}$

Exercice n° 14

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de f en (x, y) s'écrit $\begin{pmatrix} c(x, y) & -s(x, y) \\ s(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix}$ où c et s sont deux fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 telle que $c^2 + s^2 = 1$ (*). Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions c et s sont constantes sur \mathbb{R}^2 .

Puisque f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Ceci s'écrit encore $\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial s}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} (**).$$

En dérivant (*) par rapport à x ou à y , on obtient les égalités $c \frac{\partial c}{\partial x} + s \frac{\partial s}{\partial x} = 0$ et $c \frac{\partial c}{\partial y} + s \frac{\partial s}{\partial y} = 0$. Ceci montre que les

deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires. Mais l'égalité

(**) montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre. Finalement, pour tout

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications c et s

sont constantes sur \mathbb{R}^2 et donc, il existe θ dans \mathbb{R} tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f en (x, y) est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Soit g la rotation d'angle θ prenant la même valeur que f en $(0, 0)$. f et g ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f = g$ et f est une rotation affine.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation.
Montrer que f est une rotation affine.