

Planche n° 16. Suites et séries matricielles

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (a réel strictement positif donné).

Exercice n° 2 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $p \geq 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\text{Sp}(A) \subset B_o(0, 1)$ (disque unité ouvert).
- (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$
- (3) La série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$, converge.

Exercice n° 3 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Convergence et somme de la série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 4 (** I)

On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\| \cdot \|$. Soit A un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| < 1$. Montrer que la série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$, converge puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I - A)^{-1}$.

En déduire que $\|(I - A)^{-1} - (I + A)\| \leq \frac{\|A\|^2}{1 - \|A\|}$.

Exercice n° 5 (** I)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0$, $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice n° 6 (** I)

Calculer $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, si **1)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice n° 7 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Calculer $\ln(I_3 + tA) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} A^n$ en précisant les valeurs de t pour lesquelles la série converge.

Exercice n° 8 (**)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p$.

Exercice n° 9 (**)

Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A .