Planche n° 15. Normes matricielles

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (*)

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par : $\forall P \in E,\ \|P\|_\infty = \mathrm{Sup}\left\{\left|\dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1) Vérifier que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.
2) Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E,\ f(P) = XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$.

Exercice n° 2 (**)

On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On considère les endomorphismes Δ et C de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall u \in E,\ \Delta(u) = v \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } \forall u \in E,\ C(u) = w \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que Δ et C sont continus sur $(E, \|\ \|_\infty)$.

Exercice n° 3 (* I)**

On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme 1 définie par $\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\ dt$.

On pose $T : \begin{array}{ccl} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & Tf : \begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt \end{array} \end{array}$ et on admet que T est un endomorphisme de E.

1) Démontrer que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$.
2) Déterminer $\mathrm{Sup}\left\{\dfrac{\|Tf\|}{\|f\|},\ f \in E \setminus \{0\}\right\}$ et que cette borne supérieure n'est pas atteinte.

Exercice n° 4 (* I)**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de normes respectivement notées $\|\ \|_E\|$ et $\|\ \|_F$. Pour $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$, on pose $\|f\| = \mathrm{Sup}\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$.

1) Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E, F)$.
2) Montrer que $\forall f \in \mathscr{L}_c(E, F),\ \|f\| = \mathrm{Sup}\{\|f(x)\|_F,\ \|x\|_E = 1\}$.
3) Montrer que $\forall (f, g) \in (\mathscr{L}_c(E)),\ \|f \circ g\| \leqslant \|f\| \times \|g\|$.
4) On suppose de plus que $\dim(E) < +\infty$. Montrer que $\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \|f\| = \mathrm{Max}\{\|f(x)\|_F,\ \|x\|_E = 1\}$.

Exercice n° 5 (***)

Déterminer $s = \mathrm{Sup}\left\{\dfrac{\|AB\|}{\|A\|\|B\|},\ (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\}$ quand $\|\ \|$ est **1)** $\|\ \|_1$, **2)** $\|\ \|_2$, **3)** $\|\ \|_\infty$.

Exercice n° 6 (**)

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB) \leqslant k(A)N(B)$.

Exercice n° 7 (*)

Existe-t-il une norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ telle que $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB) = N(A)N(B)$.

Exercice n° 8 (***)

On pose $\forall X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|X\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\|X\|_\infty = \mathrm{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\mathrm{Sup}\left\{\dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ et $\mathrm{Sup}\left\{\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$.

Exercice n° 9 (I)**

Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Pour $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A c'est-à-dire $\rho(A) = \text{Max}\{|\lambda|,\ \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

1) Montrer que $\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\text{Sup}\left\{\dfrac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(A)$.

2) Pour $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \rho(A)$. Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

