

Planche n° 15. Normes matricielles. Corrigé

Exercice n° 1

1) • Soit $P \in E$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n, a_k = 0$. Donc $\|P\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \right|, k \in \mathbb{N} \right\} = \text{Max}\{|a_k|, 0 \leq k \leq n\}$ existe dans \mathbb{R} .

• $\forall P \in E, \|P\|_\infty \geq 0$.

• Soit $P \in E. \|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, |a_k| \leq 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a_k = 0 \Rightarrow P = 0$.

• Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}. \|\lambda P\|_\infty = \text{Max}\{|\lambda a_k|, 0 \leq k \leq n\} = |\lambda| \text{Max}\{|a_k|, 0 \leq k \leq n\} = |\lambda| \|P\|_\infty$.

• Soient $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \geq 0} b_k X^k$ deux polynômes. Pour $k \in \mathbb{N}, |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ et donc $\|P + Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$.

$\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur E .

2) $\forall P \in E, \|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$ et en particulier $\forall P \in E, \|f(P)\|_\infty \leq \|P\|_\infty$. Puisque f est un endomorphisme de E , ceci montre que f est continue sur $(E, \| \cdot \|_\infty)$.

$f \in \mathcal{L}_c(E, \| \cdot \|_\infty)$.

Exercice n° 2

• La linéarité de Δ est claire et de plus Δ est un endomorphisme de E car si u est une suite bornée, $\Delta(u)$ l'est encore. Plus précisément,

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |\Delta(u)_n| \leq |u_n| + |u_{n+1}| \leq 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E, \|\Delta(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty.$$

Puisque Δ est un endomorphisme de E , ceci montre que Δ est continu sur E .

• La linéarité de C est claire et de plus C est un endomorphisme de E car si u est bornée, $C(u)$ l'est encore. Plus précisément,

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |(C(u))_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E, \|C(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty.$$

Puisque C est un endomorphisme de E , ceci montre que C est continu sur E .

Exercice n° 3

1) Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned} \|Tf\|_1 &= \int_0^1 |Tf(x)| \, dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) \, dt \right| \, dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| \, dt \right) \, dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| \, dt \right) \, dx = \int_0^1 \|f\|_1 \, dx = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall f \in E, \|Tf\|_1 \leq \|f\|_1$. Puisque que T est un endomorphisme de E , ceci montre que T est continu sur $(E, \| \cdot \|_1)$.

2) Posons $A = \left\{ \frac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1}, f \in E \setminus \{0\} \right\}$. A est une partie non vide de \mathbb{R} .

D'après ce qui précède, $\forall f \in E \setminus \{0\}, \frac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1} \leq 1$. Donc, A est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . On en déduit que $\text{Sup}(A)$ existe dans \mathbb{R} . De plus, 1 est un majorant de A et donc $\text{Sup}(A) \leq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, posons $f_n(x) = (1-x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour $x \in [0, 1]$, $Tf_n(x) = \int_0^x (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}(1 - (1-x)^{n+1})$ et donc

$$\|Tf_n\|_1 = \int_0^1 |Tf_n(x)| dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1 - (1-x)^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Sup}(A) \geq \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2}$.

En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \text{Sup}(A) \leq 1$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\text{Sup}(A) = 1$.

Supposons qu'il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 1) est une égalité et en particulier $\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| dt \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right) dx$ ou encore $\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt - \int_0^x |f(t)| dt \right) dx = 0$.

Par suite, $\forall x \in [0, 1]$, $\int_0^1 |f(t)| dt - \int_0^x |f(t)| dt = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité, $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| = 0$ et finalement $f = 0$. Ceci est une contradiction et donc la borne supérieure n'est pas atteinte.

Exercice n° 4

1) • Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On sait qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq \|x\|_E$. Par suite, $\left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est une partie non vide et majorée (par C) de \mathbb{R} . On en déduit que $\text{Sup} \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ existe dans \mathbb{R} ou encore $\|f\|$ existe.

• Pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $\|f\| \geq 0$.

• Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ tel que $\|f\| = 0$. Alors, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|f\| = 0$ puis $\|f(x)\|_F = 0$ puis $f(x) = 0$ ce qui reste vrai pour $x = 0$. Donc, $f = 0$.

• Soient $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq |\lambda| \|f\|.$$

Donc, $|\lambda| \|f\|$ est un majorant de $\left\{ \frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$. Puisque $\|f\|$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $\|\lambda f\| \leq |\lambda| \|f\|$.

Inversement, si $\lambda = 0$, on a $|\lambda| \|f\| = 0 = \|\lambda f\|$ et si $\lambda \neq 0$,

$$\|f\| = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda f \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|,$$

et donc $|\lambda| \|f\| \leq \|\lambda f\|$ puis $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.

• Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}_c(E, F))^2$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} + \frac{\|g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|f\| + \|g\|.$$

Donc, $\|f\| + \|g\|$ est un majorant de $\left\{ \frac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$. Puisque $\|f+g\|$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

On a montré que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

2) Posons $A = \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$, $B = \{ \|f(x)\|_F, \|x\|_E = 1 \}$.

On a $B \subset A$. Inversement, pour $x \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| f \left(\frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \in B$ et donc $A \subset B$. Par suite, $A = B$ et en particulier, $\text{Sup}(A) = \text{Sup}(B)$.

3) Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|f\|$ et donc $\|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E$ ce qui reste vrai pour $x = 0$.
 Donc, pour tout $x \in E$, $\|f \circ g(x)\|_E \leq \|f\| \|g(x)\|_E \leq \|f\| \times \|g\| \times \|x\|_E$ puis pour $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|f \circ g(x)\|_E}{\|x\|_E} \leq \|f\| \times \|g\|.$$

Ceci montre que $\|f \circ g\| \leq \|f\| \times \|g\|$.

4) Supposons de plus que $\dim(E) < +\infty$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On sait que f est continue sur $(E, \|\cdot\|_E)$ et donc que $\text{Sup}\{\|f(x)\|_E, \|x\|_E = 1\}$ existe dans \mathbb{R} .

$\{x \in E / \|x\|_E = 1\}$ est une partie fermée (image réciproque du fermé $\{1\}$ de \mathbb{R} par l'application continue $x \mapsto \|f(x)\|_E$) et bornée de l'espace $(E, \|\cdot\|_E)$. D'après le théorème de BOREL-LEBESGUE, $\{x \in E / \|x\|_E = 1\}$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_E)$. L'application $x \mapsto \|f(x)\|_E$ est continue sur ce compact à valeurs dans \mathbb{R} . On sait alors que l'application $x \mapsto \|f(x)\|_E$ admet un maximum sur $\{x \in E / \|x\|_E = 1\}$ et donc $\|f\| = \text{Max}\{\|f(x)\|_E, \|x\|_E = 1\}$

Exercice n° 5

1) $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \text{Max}\{|a_{i,j}|, 1 \leq i,j \leq n\}$.

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Posons $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$.

Pour $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n \|A\|_\infty \|B\|_\infty,$$

et donc, $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$. Ainsi, $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty \|B\|_\infty} \leq n$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = (1)_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$, $\|A_0\|_\infty = \|B_0\|_\infty = 1$ puis $\|A_0 B_0\|_\infty = \|n A_0\|_\infty = n$ et donc $\frac{\|A_0 B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty \|B_0\|_\infty} = n$.

Ceci montre que

$$\text{Sup} \left\{ \frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty \|B\|_\infty}, (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\} = n.$$

En particulier, $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas une norme sous-multiplicative.

2) $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} |c_{i,j}| = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \right) = \sum_{1 \leq i,j,k \leq n} |a_{i,k}| |b_{k,j}| \\ &\leq \sum_{1 \leq i,j,k,l \leq n} |a_{i,j}| |b_{k,l}| = \|A\|_1 \|B\|_1. \end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1 \|B\|_1} \leq 1$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0 B_0 = E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0 B_0\|_1}{\|A_0\|_1 \|B_0\|_1} = 1$. Ceci montre que

$$\text{Sup} \left\{ \frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1 \|B\|_1}, (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\} = 1.$$

En particulier, $\|\cdot\|_1$ est une norme sous-multiplicative.

• $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \|AB\|_2^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{i,j}^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \quad (\text{inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2 \right) = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{1 \leq j, l \leq n} b_{l,j}^2 \right) = \|A\|_2 \|B\|_2 \end{aligned}$$

Donc $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2 \|B\|_2} \leq 1$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0 B_0 = E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0 B_0\|_2}{\|A_0\|_2 \|B_0\|_2} = 1$. Ceci montre que

$$\text{Sup} \left\{ \frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2 \|B\|_2}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\} = 1$$

En particulier, $\|\cdot\|_2$ est une norme sous-multiplicative.

Exercice n° 6

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'exercice n° 5, $\|\cdot\|_1$ est une norme sous-multiplicative.

Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , N et $\|\cdot\|_1$ sont des normes équivalentes. Par suite, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha \|\cdot\|_1 \leq N \leq \beta \|\cdot\|_1$.

Pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N(AB) \leq \beta \|AB\|_1 \leq \beta \|A\|_1 \|B\|_1 \leq \frac{\beta}{\alpha^2} N(A)N(B)$$

et le réel $k = \frac{\beta}{\alpha^2}$ est un réel strictement positif tel que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leq kN(A)N(B)$.

Remarque. Le résultat précédent signifie que $N' = \frac{1}{k}N$ est une norme sous-multiplicative car pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N'(AB) = \frac{1}{k^2} N(AB) \leq \frac{1}{k^2} N(A)N(B) = \frac{1}{k} N(A) \frac{1}{k} N(B) = N'(A)N'(B).$$

Exercice n° 7

Non, car si $A = E_{1,1} \neq 0$ et $B = E_{2,2} \neq 0$ alors $AB = 0$ puis $N(AB) < N(A)N(B)$.

Exercice n° 8

• Pour $\|\cdot\|_1$. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \right) = \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right) \text{Max} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, 1 \leq j \leq n \right\} = \text{Max}\{\|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n\} \times \|X\|_1, \end{aligned}$$

en notant C_1, \dots, C_n les colonnes de la matrice A . Donc,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} \leq \text{Max}\{\|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n\}.$$

Soit alors $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|C_{j_0}\|_1 = \text{Max}\{\|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n\}$. On note X_0 le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la j_0 -ème qui est égale à 1 de sorte que $AX_0 = C_{j_0}$. X_0 est un vecteur non nul tel que

$$\|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = \text{Max}\{\|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n\} \times \|X_0\|_1.$$

En résumé,

$$(1) \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leq \text{Max}\{\|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n\},$$

$$(2) \exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1} = \text{Max}\{\|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n\}.$$

On en déduit que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \text{Max}\{\|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n\}.$$

• Pour $\|\cdot\|_\infty$. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} |(AX)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \|X\|_\infty \\ &\leq \text{Max} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, 1 \leq i \leq n \right\} \|X\|_\infty = \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\} \times \|X\|_\infty, \end{aligned}$$

en notant L_1, \dots, L_n les lignes de la matrice A . Donc,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} \leq \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\}.$$

Soit alors $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\}$. On pose $X_0 = (\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq n}$ où $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ε_j est un élément de $\{-1, 1\}$ tel que $a_{i_0,j} = \varepsilon_j |a_{i_0,j}|$ (par exemple, $\varepsilon_j = \frac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ et $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 0$).

$$\begin{aligned} \|AX_0\|_\infty &= \text{Max} \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \varepsilon_j \right|, 1 \leq i \leq n \right\} \\ &\geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \varepsilon_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\} \times \|X_0\|_\infty. \end{aligned}$$

En résumé,

$$(1) \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\},$$

$$(2) \exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty} \geq \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\}.$$

On en déduit que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\}.$$

Exercice n° 9

Soit $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2} \leq \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = \rho(D) \|X\|_2,$$

De plus, si λ est une valeur propre de D telle que $|\lambda| = \rho(D)$ et X_0 est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda| \|X_0\|_2 = \rho(D) \|X_0\|_2.$$

En résumé

$$(1) \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leq \rho(D),$$

$$(2) \exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D).$$

On en déduit que $\forall D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), \text{Sup} \left\{ \frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \rho(D)$.

Soit alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PD^tP$. De plus $\rho(A) = \rho(D)$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|AX\|_2 &= \|PD^tPX\|_2 \\ &= \|D(^tPX)\|_2 \text{ (car } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|PY\|_2 = \|Y\|_2) \\ &= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X' = ^tPX. \end{aligned}$$

Maintenant l'application $X \mapsto ^tPX = X'$ est une permutation de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car la matrice tP est inversible et donc X décrit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si X' décrit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout vecteur colonne X , $\|X'\|_2 = \|^tPX\|_2 = \|X\|_2$. On en déduit que $\left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \left\{ \frac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2}, X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}$ et en particulier,

$$\text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \text{Sup} \left\{ \frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \rho(A).}$$

2) • $\rho : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien une application de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ .
 $A \mapsto \rho(A)$

• Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(A) = 0$. Toutes les valeurs propres de A sont nulles. Puisque A est diagonalisable, A est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle.

• Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\text{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\text{Sp}(\lambda A) = (\lambda\lambda_1, \dots, \lambda\lambda_n)$ et en particulier, $\rho(\lambda A) = |\lambda|\rho(A)$.

• Soit $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|(A+B)X\|_2}{\|X\|_2} \leq \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} + \frac{\|BX\|_2}{\|X\|_2} \leq \rho(A) + \rho(B),$$

et donc $\rho(A+B) = \text{Sup} \left\{ \frac{\|(A+B)X\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} \leq \rho(A) + \rho(B)$.

L'application $A \mapsto \rho(A) = \text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}$ est donc une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (et de plus cette norme est sous-multiplicative d'après l'exercice n° 4, 3)).