Planche n° 15. Normes matricielles. Corrigé

Exercice n° 1

1) • Soit $P \in E$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n$, $a_k = 0$. Donc $\|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}\right|,\ k \in \mathbb{N}\right\} =$ $\text{Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ existe dans $\mathbb{R}$.

• $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty \geqslant 0$.

• Soit $P \in E$. $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ |a_k| \leqslant 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 0 \Rightarrow P = 0$.

• Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\|_\infty = \text{Max}\{|\lambda a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \text{ Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda|\|P\|_\infty$.

• Soient $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \geqslant 0} b_k X^k$ deux polynômes. Pour $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ et donc $\|P + Q\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$.

$$\boxed{\|\ \|_\infty \text{ est une norme sur } E.}$$

2) $\forall P \in E$, $\|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$ et en particulier $\forall P \in E$, $\|f(P)\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$. Puisque f est un endomorphisme de E, ceci montre que f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$.

$$\boxed{f \in \mathscr{L}_c(E, \|\ \|_\infty).}$$

Exercice n° 2

• La linéarité de Δ est claire et de plus Δ est un endomorphisme de E car si u est une suite bornée, $\Delta(u)$ l'est encore. Plus précisément,

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\Delta(u)_n| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|\Delta(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

Puisque Δ est un endomorphisme de E, ceci montre que Δ est continu sur E.

• La linéarité de C est claire et de plus C est un endomorphisme de E car si u est bornée, $C(u)$ l'est encore. Plus précisément,

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |(C(u))_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|C(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Puisque C est un endomorphisme de E, ceci montre que C est continu sur E.

Exercice n° 3

1) Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_1 &= \int_0^1 |Tf(x)|\ dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\ dt\right| dx \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\ dt\right) dx \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\ dt\right) dx = \int_0^1 \|f\|_1\ dx = \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall f \in E$, $\|Tf\|_1 \leqslant \|f\|_1$. Puisque que T est un endomorphisme de E, ceci montre que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$.

2) Posons $A = \left\{\dfrac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1},\ f \in E \setminus \{0\}\right\}$. A est une partie non vide $\mathbb{R}$.

D'après ce qui précède, $\forall f \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1} \leqslant 1$. Donc, A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\text{Sup}(A)$ existe dans $\mathbb{R}$. De plus, 1 est un majorant de A et donc $\text{Sup}(A) \leqslant 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, posons $f_n(x) = (1 - x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-x)^n \, dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour $x \in [0,1]$, $Tf_n(x) = \displaystyle\int_0^x (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}(1-(1-x)^{n+1})$ et donc

$$\|Tf_n\|_1 = \int_0^1 |Tf_n(x)| \, dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-(1-x)^{n+1}) \, dx = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Sup}(A) \geqslant \dfrac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \text{Sup}(A) \leqslant 1$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\text{Sup}(A) = 1$.

Supposons qu'il existe $f \in E\setminus\{0\}$ tel que $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 1) est une égalité et en particulier $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| \, dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| \, dt\right) dx$ ou encore $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| \, dt - \int_0^x |f(t)| \, dt\right) dx = 0$.

Par suite, $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 |f(t)| \, dt - \int_0^x |f(t)| \, dt = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| = 0$ et finalement $f = 0$. Ceci est une contradiction et donc la borne supérieure n'est pas atteinte.

Exercice n° 4

1) • Soit $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$. On sait qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant \|x\|_E$. Par suite, $\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E\setminus\{0\}\right\}$ est une partie non vide et majorée (par C) de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\text{Sup}\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E\setminus\{0\}\right\}$ existe dans $\mathbb{R}$ ou encore $\|f\|$ existe.

• Pour tout $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$, $\|f\| \geqslant 0$.

• Soit $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$ tel que $\|f\| = 0$. Alors, pour tout $x \in E\setminus\{0\}$, $\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \|f\| = 0$ puis $\|f(x)\|_F = 0$ puis $f(x) = 0$ ce qui reste vrai pour $x = 0$. Donc, $f = 0$.

• Soient $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in E\setminus\{0\}$,

$$\frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |\lambda|\|f\|.$$

Donc, $|\lambda|\|f\|$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E\setminus\{0\}\right\}$. Puisque $\|\lambda f\|$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $\|\lambda f\| \leqslant |\lambda|\|f\|$.
Inversement, si $\lambda = 0$, on a $|\lambda|\|f\| = 0 = \|\lambda f\|$ et si $\lambda \neq 0$,

$$\|f\| = \left\|\frac{1}{\lambda}\lambda f\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|,$$

et donc $|\lambda|\|f\| \leqslant \|\lambda f\|$ puis $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$.

• Soit $(f,g) \in (\mathscr{L}_c(E,F))^2$. Pour $x \in E\setminus\{0\}$,

$$\frac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} + \frac{\|g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Donc, $\|f\| + \|g\|$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E\setminus\{0\}\right\}$. Puisque $\|f+g\|$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

On a montré que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$.

2) Posons $A = \left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E\setminus\{0\}\right\}$, $B = \{\|f(x)\|_F,\ \|x\|_E = 1\}$.

On a $B \subset A$. Inversement, pour $x \in E\setminus\{0\}$, $\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\|f\left(\dfrac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \in B$ et donc $A \subset B$. Par suite, $A = B$ et en particulier, $\text{Sup}(A) = \text{Sup}(B)$.

3) Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \|f\|$ et donc $\|f(x)\|_F \leqslant \|f\|\|x\|_E$ ce qui reste vrai pour $x = 0$.
Donc, pour tout $x \in E$, $\|f \circ g(x)\|_E \leqslant \|f\|\|g(x)\|_E \leqslant \|f\| \times \|g\| \times \|x\|_E$ puis pour $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|f \circ g(x)\|_E}{\|x\|_E} \leqslant \|f\| \times \|g\|.$$

Ceci montre que $\|f \circ g\| \leqslant \|f\| \times \|g\|$.

4) Supposons de plus que $\dim(E) < +\infty$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On sait que f est continue sur $(E, \| \ \|_E\|)$ et donc que $\text{Sup}\{\|f(x)\|_E,\ \|x\|_E = 1\}$ existe dans $\mathbb{R}$.

$\{x \in E/\ \|x\|_E = 1\}$ est une partie fermée (image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $x \mapsto \|f(x)\|_E$) et bornée de l'espace $(E, \| \ \|_E\|)$. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, $\{x \in E/\ \|x\|_E = 1\}$ est un compact de $(E, \| \ \|_E\|)$. L'application $x \mapsto \|f(x)\|_E$ est continue sur ce compact à valeurs dans $\mathbb{R}$. On sait alors que l'application $x \mapsto \|f(x)\|_E$ admet un maximum sur $\{x \in E/\ \|x\|_E = 1\}$ et donc $\|f\| = \text{Max}\{\|f(x)\|_E,\ \|x\|_E = 1\}$

Exercice n° 5

1) $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \text{Max}\{|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$|c_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty\|B\|_\infty = n\|A\|_\infty\|B\|_\infty,$$

et donc, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Ainsi, $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$, $\dfrac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty} \leqslant n$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$, $\|A_0\|_\infty = \|B_0\|_\infty = 1$ puis $\|A_0B_0\|_\infty = \|nA_0\|_\infty = n$ et donc $\dfrac{\|A_0B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty\|B_0\|_\infty} = n$.
Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\} = n.}$$

En particulier, $\| \ \|_\infty$ n'est pas une norme sous-multiplicative.

2) $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
\|AB\|_1 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |c_{i,j}| = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}|\right) = \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} |a_{i,j}||b_{k,l}| = \|A\|_1\|B\|_1.
\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\dfrac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1} \leqslant 1$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0B_0 = E_{1,1}$ et donc $\dfrac{\|A_0B_0\|_1}{\|A_0\|_1\|B_0\|_1} = 1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\} = 1.}$$

En particulier, $\| \ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.

• $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\|AB\|_2^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_{i,j}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2\\ &\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right) \text{ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)}\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2\right) = \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n} b_{l,j}^2\right) = \|A\|_2\|B\|_2\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\})^2$, $\dfrac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2}\leqslant 1$.

De plus, pour $A_0=B_0=E_{1,1}$, on a $A_0B_0=E_{1,1}$ et donc $\dfrac{\|A_0B_0\|_2}{\|A_0\|_2\|B_0\|_2}=1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=1}$$

En particulier, $\|\ \|_2$ est une norme sous-multiplicative.

Exercice n° 6

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'exercice n° 5, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.
Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, N et $\|\ \|_1$ sont des normes équivalentes. Par suite, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha\|\ \|_1\leqslant N\leqslant\beta\|\ \|_1$.

Pour $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N(AB)\leqslant\beta\|AB\|_1\leqslant\beta\|A\|_1\|B\|_1\leqslant\frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$$

et le réel $k=\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ est un réel strictement positif tel que $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB)\leqslant kN(A)N(B)$.

Remarque. Le résultat précédent signifie que $N'=\dfrac{1}{K}N$ est une norme sous-multiplicative car pour $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N'(AB)=\frac{1}{k^2}N(AB)\leqslant\frac{1}{k^2}N(A)N(B)=\frac{1}{k}N(A)\frac{1}{k}N(B)=N'(A)N'(B).$$

Exercice n° 7

Non, car si $A=E_{1,1}\neq 0$ et $B=E_{2,2}\neq 0$ alors $AB=0$ puis $N(AB)<N(A)N(B)$.

Exercice n° 8

• Pour $\|\ \|_1$. Soient $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j|\right)=\sum_{j=1}^n |x_j|\left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)\\ &\leqslant\left(\sum_{j=1}^n|x_j|\right)\text{Max}\left\{\sum_{i=1}^n|a_{i,j}|,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}=\text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\times\|X\|_1,\end{aligned}$$

en notant $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de la matrice A. Donc,

$$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1},\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\right\}\leqslant\text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}.$$

Soit alors $j_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\|C_{j_0}\|_1=\text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$. On note X_0 le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la j_0-ème qui est égale à 1 de sorte que $AX_0=C_{j_0}$. X_0 est un vecteur non nul tel que

$$\|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}| = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \times \|X_0\|_1.$$

En résumé,

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leqslant \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \dfrac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1} = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

On en déduit que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}.}$$

• Pour $\|\ \|_\infty$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}|(AX)_i| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)\|X\|_\infty \\ &\leqslant \text{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\}\|X\|_\infty = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \times \|X\|_\infty,\end{aligned}$$

en notant $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de la matrice A. Donc,

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} \leqslant \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Soit alors $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On pose $X_0 = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $\forall j \in [\![1,n]\!]$, ε_j est un élément de $\{-1,1\}$ tel que $a_{i_0,j} = \varepsilon_j |a_{i_0,j}|$ (par exemple, $\varepsilon_j = \dfrac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ et $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 1$).

$$\begin{aligned}\|AX_0\|_\infty &= \text{Max}\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_j\right|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \\ &\geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\varepsilon_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \times \|X_0\|_\infty.\end{aligned}$$

En résumé,

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \dfrac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty} \geqslant \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

On en déduit que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.}$$

Exercice n° 9

Soit $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2} \leqslant \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \rho(D)\|X\|_2,$$

De plus, si λ est une valeur propre de D telle que $|\lambda| = \rho(D)$ et X_0 est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda|\|X_0\|_2 = \rho(D)\|X_0\|_2.$$

En résumé

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \rho(D)$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D)$.

On en déduit que $\forall D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$, $\text{Sup}\left\{\dfrac{\|DX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(D)$.

Soit alors $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PD{}^tP$. De plus $\rho(A) = \rho(D)$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|AX\|_2 &= \|PD{}^tPX\|_2\\ &= \|D({}^tPX)\|_2 \text{ (car } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PY\|_2 = \|Y\|_2)\\ &= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X' = {}^tPX.\end{aligned}$$

Maintenant l'application $X \mapsto {}^tPX = X'$ est une permutation de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car la matrice ${}^tP$ est inversible et donc X décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si X' décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout vecteur colonne X, $\|X'\|_2 = \|{}^tPX\|_2 = \|X\|_2$. On en déduit que $\left\{\dfrac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \left\{\dfrac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2},\ X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ et en particulier,

$$\text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \text{Sup}\left\{\frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(A).}$$

2) • $\begin{array}{rccc}\rho : & \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^+\\ & A & \mapsto & \rho(A)\end{array}$ est bien une application de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$.

• Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(A) = 0$. Toutes les valeurs propres de A sont nulles. Puisque A est diagonalisable, A est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle.

• Soient $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\text{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\text{Sp}(\lambda A) = (\lambda\lambda_1, \ldots, \lambda\lambda_n)$ et en particulier, $\rho(\lambda A) = |\lambda|\rho(A)$.

• Soit $(A, B) \in (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^2$. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|(A+B)X\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} + \frac{\|BX\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \rho(A) + \rho(B),$$

et donc $\rho(A+B) = \text{Sup}\left\{\dfrac{\|(A+B)X\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} \leqslant \rho(A) + \rho(B)$.

L'application $A \mapsto \rho(A) = \text{Sup}\left\{\dfrac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ est donc une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (et de plus cette norme est sous-multiplicative d'après l'exercice n° 4, 3)).