

Planche n° 14. Topologie des espaces vectoriels normés

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé est un convexe de cet espace.

Exercice n° 2 (***) I

1) Inégalités de HÖLDER et de MINKOWSKI. Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que pour $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

b) En déduire que $\forall ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$.

c) En déduire que $\forall ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}$.

2) Soit α un réel strictement positif. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $N_\alpha(x) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha \right)^{1/\alpha}$.

a) Montrer que $\forall \alpha \geq 1$, N_α est une norme sur \mathbb{R}^n .

b) Dessiner les « boules unités » de \mathbb{R}^2 dans le cas où $\alpha \in \left\{ \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, +\infty \right\}$.

c) Montrer que, pour $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ fixé, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_\alpha(x) = \text{Max}\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\} = N_\infty(x)$.

d) Montrer que si $0 < \alpha < 1$, N_α n'est pas une norme sur \mathbb{R}^n (si $n \geq 2$).

Exercice n° 3 (** I)

Soit $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour f élément de E , on pose $N(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$, $N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$ et

$N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)| dt$. Montrer que N , N' et N'' sont des normes et les comparer.

Exercice n° 4 (***) I (topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé mais non compact (pour $n \geq 2$).

3) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?

4) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est fermé.

5) Soit $p \in [0, n]$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Peut-on remplacer $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

7) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $a_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in [1, n]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$) est un compact convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice n° 5 (**)

Montrer qu'entre deux rationnels distincts, il existe un irrationnel (ou encore montrer que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}).

Exercice n° 6 (**)

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E . Montrer que

1) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$.

- 2) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
 3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
 4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $A \overset{\circ}{\cup} B \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.
 5) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.
 6) $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

Exercice n° 7 ()**

Trouver une partie A de \mathbb{R} telle que les sept ensembles $A, \overline{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\overline{A}}, \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ soient deux à deux distincts.

Exercice n° 8 ()**

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On munit E de $\| \cdot \|_{\infty}$.
 D est la partie de E constituée des applications dérivables et P est la partie de E constituée des fonctions polynomiales.
 Déterminer l'intérieur de D et l'intérieur de P .

Exercice n° 9 (I) (Distance d'un point à une partie)**

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$.
 Pour $x \in E$, on pose $d_A(x) = d(x, A)$ où $d(x, A) = \inf \{ \|x - a\|, a \in A \}$.

- 1) Justifier l'existence de $d_A(x)$ pour chaque x de E .
- 2) a) Montrer que si A est fermée, $\forall x \in E, d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.
 b) Montrer que si A est fermée et E est de dimension finie, $\forall x \in E, \exists a \in A / d_A(x) = \|x - a\|$.
- 3) Si A est quelconque, comparer $d_A(x)$ et $d_{\overline{A}}(x)$.
- 4) Montrer d_A est continue sur E .
- 5) A chaque partie fermée non vide A , on associe l'application d_A définie ci-dessus. Montrer que l'application $A \mapsto d_A$ est injective.
- 6) Dans l'espace des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} muni de la norme de la convergence uniforme, on considère $A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$. Calculer $d_A(0)$.

Exercice n° 10 ()**

- 1) Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés. Soient f et g deux applications continues sur E à valeurs dans F . Soit D une partie de E dense dans E . Montrer que si $f|_D = g|_D$ alors $f = g$.
- 2) Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.

Exercice n° 11 (*)**

Soit u une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie ayant une unique valeur d'adhérence. Montrer que la suite u converge.

Exercice n° 12 (*)**

Calculer $\inf_{\alpha \in]0, \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\}$.

Exercice n° 13 (*) I)**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur \mathbb{R} . Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x| + b$.

Exercice n° 14 (*) I) :**

Donner un développement à la précision $\frac{1}{n^2}$ de la n -ième racine positive x_n de l'équation $\tan x = x$.

Exercice n° 15 (*) I)**

Soit z un nombre complexe. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$.