

Planche n° 14. Topologie des espaces vectoriels normés. Corrigé

Exercice n° 1

Cas de la boule fermée. Soit $B = \{u \in E / \|u\| \leq 1\}$. Soient $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \leq \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Ainsi, $\forall (x, y) \in B^2, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in B$ et donc B est convexe.

Cas de la boule ouverte. Soit $B = \{u \in E / \|u\| < 1\}$. Soient $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Puisque $0 \leq \lambda \leq 1$ et $0 \leq \|x\| < 1$, on en déduit que $\lambda\|x\| < 1$. D'autre part, $(1 - \lambda)\|y\| \leq 1$ (et même < 1) et donc

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| < 1.$$

La boule unité fermée (resp. ouverte) de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un convexe de l'espace vectoriel E .

Exercice n° 2

1) Puisque $p > 0$ et $q > 0$, $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{p}$ et donc $p > 1$. De même, $q > 1$. D'autre part, $q = \frac{p}{p-1}$.

a) 1ère solution. L'inégalité est immédiate quand $x = 0$ ou $y = 0$. Soient $x > 0$ et $y > 0$. La fonction \ln est concave sur $]0, +\infty[$. Donc,

$$\ln(xy) = \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q) \leq \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right)$$

puis par croissance de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

2ème solution. L'inégalité est immédiate quand $y = 0$. Soit $y > 0$ fixé.

Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$. Puisque $p > 1$, la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0, f'(x) = x^{p-1} - y$. f admet donc un minimum en $x_0 = y^{1/(p-1)}$ égal à

$$f(y^{1/(p-1)}) = \frac{y^{p/(p-1)}}{p} + \frac{y^{p/(p-1)}}{q} - y^{1/(p-1)}y = y^{p/(p-1)} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 0.$$

Finalement, f est positive sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

b) Posons $A = \sum_{k=1}^n |a_k|^p$ et $B = \sum_{k=1}^n |b_k|^q$.

Si A (ou B) est nul, tous les a_k (ou tous les b_k) sont nuls et l'inégalité est vraie.

On suppose dorénavant que $A > 0$ et $B > 0$. D'après la question a),

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \times \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{|a_k|^p}{pA} + \frac{|b_k|^q}{qB}\right) = \frac{1}{pA} \sum_{k=1}^n |a_k|^p + \frac{1}{qB} \sum_{k=1}^n |b_k|^q = \frac{1}{pA} \times A + \frac{1}{qB} \times B = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et donc $\sum_{k=1}^n |a_k||b_k| \leq A^{1/p}B^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}$. Comme $\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k||b_k|$, on a montré que

$$\forall ((a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q} \quad (\text{Inégalité de HÖLDER}).$$

Remarque. Quand $p = q = 2$, on a bien $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et l'inégalité de HÖLDER s'écrit

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}).$$

c) Soit $((a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2$. D'après l'inégalité de HÖLDER, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p &= \sum_{k=1}^n |a_k| (|a_k| + |b_k|)^{p-1} + \sum_{k=1}^n |b_k| (|a_k| + |b_k|)^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Si $\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p = 0$, tous les a_k et les b_k sont nuls et l'inégalité est claire.

Sinon $\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p > 0$ et après multiplication des deux membres de l'inégalité précédente par le réel strictement

positif $\left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{-1+\frac{1}{p}}$, on obtient $\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}$

$$\forall ((a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \quad (\text{Inégalité de MINKOWSKI}).$$

2) a) On sait déjà que N_1 est une norme sur \mathbb{R}^n . Soit $\alpha > 1$.

(1) N_α est bien une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^+ .

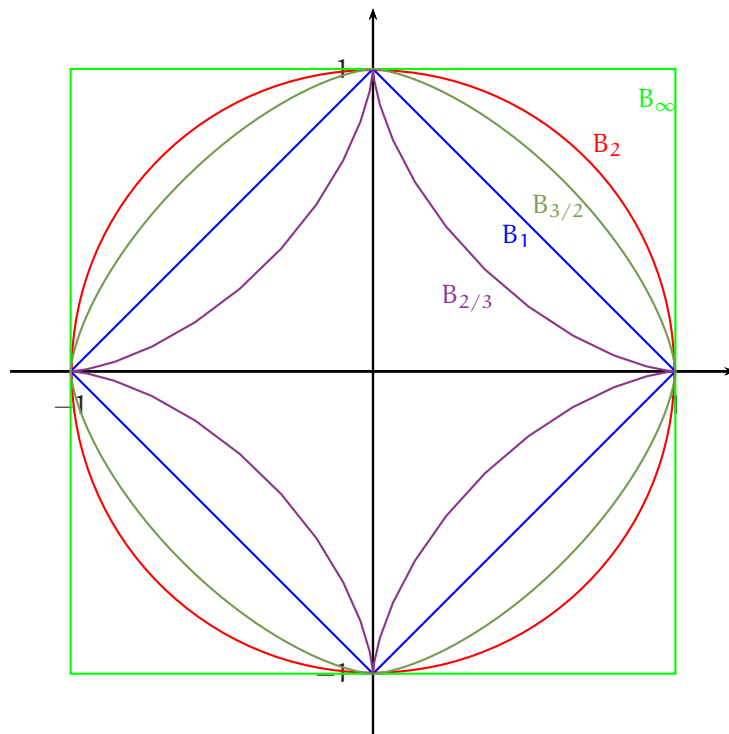
(2) Soit $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_k| = 0 \Rightarrow x = 0$.

(3) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(\lambda x) = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda x_k|^\alpha \right)^{1/\alpha} = (|\lambda|^\alpha)^{1/\alpha} N_\alpha(x) = |\lambda| N_\alpha(x)$.

(4) L'inégalité triangulaire est l'inégalité de MINKOWSKI.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, N_\alpha \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^n.$$

b) Quelques « boules unités » dans \mathbb{R}^2 .



Remarque. Toute boule unité est symétrique par rapport à O puisque $\forall x \in E, N(x) = N(-x)$ et donc

$$\forall x \in E, N(x) \leq 1 \Leftrightarrow N(-x) \leq 1.$$

c) Soient $\alpha > 0$ et $x \in E$. On a

$$N_\infty(x) \leq N_\alpha(x) \leq n^{1/\alpha} N_\infty(x),$$

et le théorème des gendarmes fournit $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x)$.

$$\forall x \in E, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x).$$

d) Soient $\alpha \in]0, 1[$ puis $B = \{x \in \mathbb{R}^n / N_\alpha(x) \leq 1\}$. Les vecteurs $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$ sont des éléments de B . Le milieu du segment $[x, y]$ est $z = \frac{1}{2}(1, 1, 0, \dots, 0)$.

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}(1^\alpha + 1^\alpha)^{1/\alpha} = 2^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1 \text{ car } \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$$

et donc $z \notin B$. Ainsi, B n'est pas convexe et donc N_α n'est pas une norme d'après l'exercice n° 1.

On peut remarquer que pour $n = 1$, les N_α coïncident toutes avec la valeur absolue.

Exercice n° 3

• Il est connu que N est une norme sur E .

• Montrons que N' est une norme sur E .

(1) N' est une application de E dans \mathbb{R}^+ car pour f dans E , f' est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc f' est intégrable sur le segment $[0, 1]$.

(2) Soit $f \in E$. Si $N'(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Par suite, f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 0 tel que $f(0) = 0$ et on en déduit que $f = 0$.

(3) $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)| dt = |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \right) = |\lambda| N'(f)$.

(4) Soit $(f, g) \in E^2$.

$$N'(f+g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt + \int_0^1 |g'(t)| dt = N'(f) + N'(g).$$

Donc N' est une norme sur E .

• Montrons que N'' est une norme sur E . On note que $\forall f \in E, N''(f) = |f(0)| + N'(f')$ et tout est immédiat.

N, N' et N'' sont des normes sur E .

• Soit $f \in E$ et $t \in [0, 1]$. Puisque la fonction f' est continue sur $[0, 1]$

$$|f(t)| = \left| f(0) + \int_0^t f'(u) \, du \right| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| \, du \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)| \, du = N'(f),$$

et donc $N(f) = \int_0^1 |f(t)| \, dt \leq \int_0^1 N'(f) \, dt = N'(f)$.

Ensuite en appliquant le résultat précédent à f' , on obtient

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leq |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

Finalement

$\forall f \in E, N(f) \leq N'(f) \leq N''(f)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, on pose $f_n(t) = t^n$.

$$N(f_n) = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1} \text{ et donc la suite } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } 0 \text{ dans l'espace vectoriel normé } (E, N).$$

Par contre, pour $n \geq 1, N'(f_n) = n \int_0^1 t^{n-1} \, dt = 1$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N') . On en déduit que

les normes N et N' ne sont pas des normes équivalentes.

De même en utilisant $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$, on montre que les normes N' et N'' ne sont pas équivalentes.

Exercice n° 4

1) Soit $\det : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{matrix}$. On sait que l'application d est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de n'importe quelle

norme) et que \mathbb{R}^* est un ouvert de \mathbb{R} en tant que réunion de deux intervalles ouverts.

Par suite, $GL_n(\mathbb{R}) = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynôme $\det(A - XI_n)$ n'a qu'un nombre fini de racines (éventuellement nul). Donc pour p entier naturel supérieur ou égal à un certain p_0 , $\det\left(A - \frac{1}{p}I\right) \neq 0$. La suite $\left(A - \frac{1}{p}I\right)_{p \geq p_0}$ est une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$, convergente, de limite A . Ceci montre que l'adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou encore $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant que complémentaire d'un ouvert.

Soit $n \geq 2$. Les matrices $A_p = pE_{1,1}$, $p \in \mathbb{N}$, sont non inversibles et la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est non bornée.

Par suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est non borné et donc non compact.

$\forall n \geq 2, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé mais non compact.

3) • Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé. Posons $g : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & (M, {}^tM) \end{matrix}$, $h : \begin{matrix} (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M, N) & \mapsto & MN \end{matrix}$ puis

$$f : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M {}^tM \end{matrix} \text{ de sorte que } f = h \circ g.$$

g est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie. h est continue sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que $f = h \circ g$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Enfin $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

• Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est borné. $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{i,j}| \leq 1$ et donc $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \|A\|_\infty \leq 1$.

D'après le théorème de BOREL-Lebesgue, puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$O_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe. En effet, les deux matrices I_n et $-I_n$ sont orthogonales mais le milieu du segment joignant ces deux matrices est 0 qui n'est pas une matrice orthogonale.

$O_n(\mathbb{R})$ est compact mais non convexe.

4) $S_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$S_n(\mathbb{R})$ est fermé.

5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et p un élément fixé de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ (le résultat est clair si $p=0$ ou $p=n$).

A est de rang inférieur ou égal à p si et seulement si tous ses mineurs de format $p+1$ sont nuls.

Soient I et J deux sous-ensembles donnés de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal $p+1$ et $A_{I,J}$ la matrice extraite de A de format $p+1$ dont les numéros de lignes sont dans I et les numéros de colonnes sont dans J .

Pour I et J donnés, l'application $A \mapsto A_{I,J}$ est continue car linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$. Par suite, l'application $f_{I,J} : A \mapsto \det(A_{I,J})$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices A telles que $\det(A_{I,J}) = 0$ est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (image réciproque du fermé $\{0\}$ de \mathbb{R} par l'application continue $f_{I,J}$) et l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés.

6) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $\text{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. On sait que toute matrice est triangulable dans \mathbb{C} et donc il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_{i,i} = \lambda_i$ telle que $A = PTP^{-1}$.

On munit dorénavant $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme multiplicative notée $\| \cdot \|$. Puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe un réel strictement positif K telle que pour toute matrice $M, \|M\| \leq K \|M\|_\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n -uplet de réels $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ tels que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \varepsilon_k \leq \frac{\varepsilon}{K \|P\| \|P^{-1}\|}$ et les $\lambda_k + \varepsilon_k$ sont deux

à deux distincts. (On prend $\varepsilon_1 = 0$ puis ε_2 dans $\left[0, \frac{\varepsilon}{K \|P\| \|P^{-1}\|}\right]$ tel que $\lambda_2 + \varepsilon_2 \neq \lambda_1 + \varepsilon_1$ ce qui est possible puisque

$\left[0, \frac{\varepsilon}{K \|P\| \|P^{-1}\|}\right]$ est infini puis ε_3 dans $\left[0, \frac{\varepsilon}{K \|P\| \|P^{-1}\|}\right]$ tel que $\lambda_3 + \varepsilon_3$ soit différent de $\lambda_1 + \varepsilon_1$ et $\lambda_2 + \varepsilon_2$ ce qui est

possible puisque $\left[0, \frac{\varepsilon}{K \|P\| \|P^{-1}\|}\right]$ est infini ...)

On pose $D = \text{diag}(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ puis $T' = T + D$ et enfin $A' = PT'P^{-1}$. Tout d'abord les valeurs propres de A' sont deux à deux distinctes (ce sont les $\lambda_i + \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n$) et donc A' est diagonalisable. Ensuite

$$\|A' - A\| = \|PDP^{-1}\| \leq \|P\| \|D\| \|P^{-1}\| \leq K \|P\| \|P^{-1}\| \|D\|_\infty \leq \varepsilon.$$

En résumé, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall \varepsilon > 0, \exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \|A' - A\| \leq \varepsilon$ et A' diagonalisable. On a montré que

l'ensemble des matrices complexes diagonalisables dans \mathbb{C} est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On ne peut remplacer $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\chi_{A+E} = \begin{vmatrix} X-a & -c+1 \\ -b-1 & X-d \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) + (b-c) + 1.$$

Le discriminant de χ_{A+E} est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4$. Supposons de plus que $\|E\|_\infty \leq \frac{1}{4}$. Alors

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4 \leq \frac{1}{4} + 4 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) + 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) - 4 = -\frac{5}{4} < 0.$$

Par suite, aucune des matrices $A + E$ avec $\|E\|_\infty \leq \frac{1}{4}$ n'a de valeurs propres réelles et donc aucune de ces matrices n'est diagonalisable dans \mathbb{R} . On a montré que l'ensemble des matrices réelles diagonalisables dans \mathbb{R} n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7) Notons \mathcal{S} l'ensemble des matrices stochastiques.

• Vérifions que \mathcal{S} est borné. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}$. $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $0 \leq a_{i,j} \leq 1$ et donc $\|A\|_\infty \leq 1$. Ainsi, $\forall A \in \mathcal{S}$, $\|A\|_\infty \leq 1$ et donc \mathcal{S} est borné.

• Vérifions que \mathcal{S} est fermé.

Soit $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. L'application $f_{i,j} : A \mapsto a_{i,j}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} car linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. $[0, +\infty[$ est un fermé de \mathbb{R} car son complémentaire $] -\infty, 0[$ est un ouvert de \mathbb{R} . Par suite, $\{A = (a_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} / a_{i,j} \geq 0\} = f_{i,j}^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'application $g_i : A \mapsto \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} car linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est

de dimension finie. Le singleton $\{1\}$ est un fermé de \mathbb{R} . Par suite, $\left\{ A = (a_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} / \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \right\} = g_i^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

$\mathcal{S} = \left(\bigcap_{i,j} f_{i,j}^{-1}([0, +\infty[) \right) \cap \left(\bigcap_i g_i^{-1}(\{1\}) \right)$ est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En résumé, \mathcal{S} est un fermé borné de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie et donc \mathcal{S} est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

• Vérifions que \mathcal{S} est convexe. Soient $(A, B) \in (\mathcal{S})^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. D'une part, $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geq 0$ et d'autre part, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\sum_{j=1}^n ((1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = (1-\lambda) \sum_{j=1}^n a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^n b_{i,j} = (1-\lambda) + \lambda = 1,$$

ce qui montre que $(1-\lambda)A + \lambda B \in \mathcal{S}$. On a montré que $\forall (A, B) \in \mathcal{S}^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $(1-\lambda)A + \lambda B \in \mathcal{S}$ et donc \mathcal{S} est convexe.

L'ensemble des matrices stochastiques est un compact convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8) Soient A et B deux matrices réelles diagonalisables. Soient $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \text{Soit enfin } \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto (1-t)A + t \cdot 0 = (1-t)A & t &\mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \\ & & & \end{aligned}$$

γ_1 est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice nulle et γ_2 est un chemin continu joignant la matrice nulle à la matrice B. Donc γ est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice B. De plus, pour tout réel $t \in [0, 1]$, la matrice $\gamma_1(t) = (1-t)A$ est diagonalisable (par exemple, si $A = P \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} P^{-1}$ alors $(1-t)A = P \text{diag}((1-t)\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} P^{-1}$) et de même, pour tout réel $t \in [0, 1]$, la matrice $\gamma_2(t) = tB$ est diagonalisable. Finalement γ est un chemin continu joignant les deux matrices A et B diagonalisables dans \mathbb{R} , contenu dans l'ensemble des matrices diagonalisables dans \mathbb{R} . On a montré que

l'ensemble des matrices diagonalisables dans \mathbb{R} est connexe par arcs.

Exercice n° 5

1ère solution. Montrons qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Soient $d = y - x$ puis n un entier naturel non nul tel que $\frac{1}{n} < d$ (par exemple, $n = E\left(\frac{1}{d}\right) + 1$). Soient enfin $k = E(nx)$ et $r = \frac{k+1}{n}$. r est un rationnel et de plus

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{k+1}{n} = r \leq \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + d = y.$$

En résumé, $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} / x < r < y)$. Ceci montre que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

2ème solution. On sait que tout réel est limite d'une suite de décimaux et en particulier tout réel est limite d'une suite de rationnels. Donc \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

\mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

Exercice n° 6

1) Soit A une partie de E . \overline{A} est fermé et donc $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. $\overset{\circ}{A}$ est ouvert et donc $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$.

2) Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Si $\overline{A} = \emptyset$ (resp. $\overset{\circ}{A} = \emptyset$), alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ (resp. $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$). Sinon,

- Pour tout $x \in E, x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{B}$. Donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- Pour tout $x \in E, x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow B \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}$. Donc $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3) Soient A et B deux parties de E .

$\overline{A \cup B}$ est une partie fermée de E contenant $A \cup B$. Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$ (puisque $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé de E au sens de l'inclusion contenant $A \cup B$).

Réciproquement, $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$.

Finalement $\overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$.

$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$ et donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$.

Réciproquement, $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B} \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Finalement, $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

4) $\overline{A \cap B}$ est un fermé contenant $A \cap B$ et donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap B}$.

On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A = [0, 1[$ et $B =]1, 2]$, $A \cap B = \emptyset$ puis $\overline{A \cap B} = \emptyset$ mais $\overline{A} \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\} \neq \emptyset$.

$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cup B$ et donc $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$.

On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$, $A \cup B = [0, 2]$ puis $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0, 2[$ mais $\overset{\circ}{A \cup B} =]0, 1[\cup]1, 2[\neq]0, 2[$.

5) Soient A et B deux parties de E . Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{A \setminus B} &\Leftrightarrow A \setminus B \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists \mathcal{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathcal{B} \subset A \setminus B \\ &\Leftrightarrow \exists \mathcal{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathcal{B} \subset A \text{ et } \mathcal{B} \subset {}^c B \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x) \text{ et } {}^c B \in \mathcal{V}(x) \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \text{ et } x \in ({}^c \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \text{ et } x \in {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \cap {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \setminus \overline{B}. \end{aligned}$$

Donc $\overset{\circ}{A \setminus B} = \overset{\circ}{A} \setminus \overline{B}$.

6) Soit A une partie de E . $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{A}} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. D'autre part $\overset{\circ}{A} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A} \subset \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A}$. Finalement, $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A}$.

$\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{A}} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. D'autre part $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A}$. Finalement, $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A}$.

Exercice n° 7

L'exercice n° 6 montre que l'on ne peut pas faire mieux.

Soit $A = ([0, 1[\cup]1, 2]) \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5])$.

- $\overset{\circ}{A} =]0, 1[\cup]1, 2[$.
- $\overline{A} = [0, 2]$.
- $\overset{\circ}{\overline{A}} =]0, 2[$.
- $\overline{\overset{\circ}{A}} = [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]$
- $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} =]0, 2[\cup]4, 5[$.
- $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} = [0, 2] \cup [4, 5]$.

Les 7 ensembles considérés sont deux à deux distincts.

Exercice n° 8

Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n l'application définie par $\forall x \in [0, 1], g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \left| x - \frac{1}{2} \right|$.

Chaque fonction g_n est continue sur $[0, 1]$ mais non dérivable en $\frac{1}{2}$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n \in E \setminus D$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|f - g_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$. On en déduit que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ tend vers f dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

f est donc limite d'une suite d'éléments de cD et donc est dans l'adhérence de cD . Ceci montre que $\overline{{}^cD} = E$ ou encore ${}^c(\overset{\circ}{D}) = E$ ou enfin $\overset{\circ}{D} = \emptyset$.

Enfin, puisque $P \subset D$, on a aussi $\overset{\circ}{P} = \emptyset$.

Exercice n° 9

1) Soit $x \in E$. $\{\|x - a\|, a \in A\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de \mathbb{R} . $\{\|x - a\|, a \in A\}$ admet donc une borne inférieure dans \mathbb{R} . On en déduit l'existence de $d_A(x)$.

2) a) Soit A une partie fermée et non vide de E . Soit $x \in E$.

• Supposons que $x \in A$. Alors $0 \leq f(x) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\} \leq \|x - x\| = 0$ et donc $d_A(x) = 0$.

• Supposons que $d_A(x) = 0$. Par définition d'une borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon \in A / \|x - a_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Soit V un voisinage de x . V contient une boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ puis d'après ce qui précède, V contient un élément de A . Finalement, $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$ et donc $x \in \overline{A} = A$.

Si A est fermée, $\forall x \in E, (d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A)$.

b) Posons $d = d_A(x)$. Pour chaque entier naturel n , il existe $a_n \in A$ tel que $d \leq \|x - a_n\| \leq d + \frac{1}{n}$.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^* \|a_n\| \leq \|a_n - x\| + \|x\| \leq d + \frac{1}{n} + \|x\| \leq d + \|x\| + 1$.

Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut extraire de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite $(a_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ convergeant vers un certain élément a de E .

Ensuite, puisque A est fermée, on en déduit que $a \in A$. Puis, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d \leq \|x - a_{\varphi(n)}\| \leq d + \frac{1}{\varphi(n)},$$

et puisque $\varphi(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$, on obtient quand n tend vers l'infini, $d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\|$.

Maintenant on sait que l'application $y \mapsto \|y\|$ est continue sur l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\| = \left\| x - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\varphi(n)} \right\| = \|x - a\|.$$

On a montré qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.

3) Soit $x \in E$.

Puisque $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}}(x)$ est un minorant de $\{\|x - a\|, a \in A\}$. Comme $d_A(x)$ est le plus grand des minorants de $\{\|x - a\|, a \in A\}$, on a donc $d_{\overline{A}}(x) \leq d_A(x)$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in \overline{A}$ tel que $\|x - y\| < d(x, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$ et puis il existe $a \in A$ tel que $\|y - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que

$$d_A(x) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\| < d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, d_A(x) < d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$. Quand ε tend vers 0, on obtient $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x)$.

Finalement

$\forall x \in E, d_A(x) = d_{\overline{A}}(x)$.

4) Montrons que l'application d_A est lipschitzienne. Soit $(x, y) \in E^2$.

Soit $a \in A$. $d_A(x) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$. Donc, $\forall a \in A, d_A(x) - \|x - y\| \leq \|y - a\|$ ou encore $d_A(x) - \|x - y\|$ est un minorant de $\{\|y - a\|, a \in A\}$. Puisque $d_A(y)$ est le plus grand des minorants de $\{\|y - a\|, a \in A\}$, on a donc $d_A(x) - \|x - y\| \leq d_A(y)$.

En résumé, $\forall (x, y) \in E^2, d_A(x) - d_A(y) \leq \|x - y\|$.

En échangeant les rôles de x et y , on obtient $\forall(x, y) \in E^2, d_A(y) - d_A(x) \leq \|x - y\|$ et finalement

$$\forall(x, y) \in E^2, |d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|.$$

Ainsi l'application $d_A : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est 1-lipschitzienne et en particulier d_A est continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

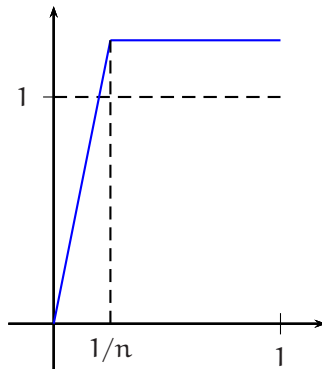
5) Soient A et B deux parties fermées et non vides de E telles que $d_A = d_B$.

Soit $a \in A$. $d_B(a) = d_A(a) = 0$ (d'après 2)) et donc $a \in B$ (d'après 2)). Ainsi $A \subset B$ puis, par symétrie des rôles, $B \subset A$ et finalement $A = B$.

6) (A n'est pas un sous espace vectoriel de E .)

Soit $f \in A$. $1 \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty$. Ainsi, $\forall f \in A, \|f\|_\infty \geq 1$ et donc $d_A(0) \geq 1$.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in [0, 1], \text{ on pose } f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 + \frac{1}{n}x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$



Pour chaque entier naturel non nul n , la fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ et

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \geq 1.$$

Donc, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de A . On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_A(0) \leq \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$.

En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq d_A(0) \leq 1 + \frac{1}{n}$ et finalement

$$d_A(0) = 1.$$

Remarque. A est fermée mais la distance à A n'est malgré tout pas atteinte. En effet

• Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A convergeant dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$ vers un certain élément f de E . La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ et donc d'une part, $f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$

et d'autre part $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \geq 1$. Donc $f \in A$ et on a montré que A est fermée.

• Supposons qu'il existe $f \in A$ telle que $\|f\|_\infty = 1$. Alors l'encadrement $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \|f\|_\infty = 1$ fournit $\int_0^1 f(x) dx = \|f\|_\infty = 1$ puis $\int_0^1 (\|f\|_\infty - f(x)) dx = 0$ et donc $\|f\|_\infty - f = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) ou encore $f = 1$ ce qui contredit $f(0) = 0$. On ne peut donc pas trouver $f \in A$ tel que $d_A(0) = d(0, f)$.

Exercice n° 10

1) Soit $x \in E$. Puisque D est dense dans E , il existe une suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers x et puisque f et g sont continues et coïncident sur D et donc en chaque d_n ,

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(d_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(d_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n\right) = g(x).$$

On a montré que $f = g$.

2) Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On suppose que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$. Soit $a = f(1)$.

- $x = y = 0$ fournit $f(0) = 0 = a \times 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. $f(nx) = f(x + \dots + x) = f(x) + \dots + f(x) = nf(x)$. Ceci reste vrai pour $n = 0$.
- En particulier $x = 1$ fournit pour tout entier naturel non nul n , $f(n) = nf(1) = an$ puis $x = \frac{1}{n}$ fournit $nf\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = a$ et donc $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}$.
- Ensuite, $\forall(p, q) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)^2$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{p}{q}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ fournit $f(-x) = -f(x)$.
- En particulier, $\forall(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f\left(-\frac{p}{q}\right) = -f\left(\frac{p}{q}\right) = -a\frac{p}{q}$.

En résumé, si f est morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$ où $a = f(1)$.

Si de plus f est continue sur \mathbb{R} , les deux applications $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto ax$ sont continues sur \mathbb{R} et coïncident sur \mathbb{Q} qui est dense dans \mathbb{R} . D'après le 1), $f = g$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ où $a = f(1)$.

Réciproquement, toute application linéaire $x \mapsto ax$ est en particulier un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, continu sur \mathbb{R} .

Les morphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même sont les applications linéaires $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 11

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ ayant une unique valeur d'adhérence que l'on note ℓ . Montrons que la suite u converge vers ℓ .

Supposons par l'absurde que la suite u ne converge pas vers ℓ . Donc

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 / \|u_n - \ell\| > \varepsilon \quad (*).$$

ε est ainsi dorénavant fixé.

En appliquant $(*)$ à $n_0 = 0$, il existe un rang $\varphi(0) \geq n_0 = 0$ tel que $\|u_{\varphi(0)} - \ell\| \geq \varepsilon$.

Puis en prenant $n_0 = \varphi(0) + 1$, il existe un rang $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(1)} - \ell\| \geq \varepsilon \dots$ et on construit ainsi par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \geq \varepsilon$.

Maintenant, la suite u est bornée et il en est de même de la suite $(u_{\varphi(n)})$. Puisque E est de dimension finie, le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS permet d'affirmer qu'il existe une suite $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(u_{\varphi(n)})$ et donc de u convergeant vers un certain $\ell' \in E$. ℓ' est donc une valeur d'adhérence de la suite u . Mais quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité $\|u_{\psi(n)} - \ell\| \geq \varepsilon$, on obtient $\|\ell' - \ell\| \geq \varepsilon$ et donc $\ell \neq \ell'$. Ceci constitue une contradiction et donc u converge vers ℓ .

Exercice n° 12

Pour $\alpha \in]0, \pi[$, posons $f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sin(n\alpha)|$.

- Tout d'abord $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n(\pi - \alpha))| = |\sin(n\alpha)|$ et donc $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $f(\pi - \alpha) = f(\alpha)$.

On en déduit que $\inf_{\alpha \in]0, \pi[} f(\alpha) = \inf_{\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[} f(\alpha)$.

- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sup \left\{ 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Ensuite, si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(\alpha) \geq \sin(\alpha) \geq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Par suite $\inf_{\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[} f(\alpha) = \inf_{\alpha \in]0, \frac{\pi}{3}[} f(\alpha)$.

- Soit alors $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$. Montrons qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $n_0\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Il existe un unique entier naturel n_1 tel que $n_1\alpha \leq \frac{\pi}{3} < (n_1 + 1)\alpha$ à savoir $n_1 = E\left(\frac{\pi}{3\alpha}\right)$.

Mais alors, $\frac{\pi}{3} < (n_1 + 1)\alpha = n_1\alpha + \alpha \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et l'entier $n_0 = n_1 + 1$ convient.

Ceci montre que $f(\alpha) \geq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Finalement $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $f(\alpha) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et donc $\inf_{\alpha \in]0, \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\} = \min_{\alpha \in]0, \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\inf_{\alpha \in]0, \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice n° 13

Soit f une application uniformément continue sur \mathbb{R} . $\exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ (le travail est analogue si $x \in \mathbb{R}^-$).

Pour $n \in \mathbb{N}$

$$|x - n\alpha| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x - n\alpha \leq \alpha \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - 1 \leq n \leq \frac{x}{\alpha} + 1 \Leftrightarrow n = E\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

On pose $n_0 = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f(x - \alpha)| + |f(x - \alpha) - f(x - 2\alpha)| + \dots + |f(x - (n_0 - 1)\alpha) - f(x - n_0\alpha)| + |f(x - n_0\alpha) - f(0)| + |f(0)| \\ &\leq n_0 + 1 + |f(0)| \text{ (car } |x - n_0\alpha - 0| \leq \alpha) \\ &\leq \frac{x}{\alpha} + 2 + |f(0)|. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq \frac{x}{\alpha} + 2 + |f(0)|$. Par symétrie des calculs (ou en appliquant à la fonction $x \mapsto f(-x)$), $\forall x \in \mathbb{R}^-,$

$$|f(x)| \leq \frac{-x}{\alpha} + 2 + |f(0)| \text{ et donc } \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{|x|}{\alpha} + 2 + |f(0)|.$$

$$f \text{ uniformément continue sur } \mathbb{R} \Rightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x| + b.$$

Exercice n° 14

Posons $I_0 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ et enfin $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Pour $x \in D$, posons $f(x) = \tan x - x$. La fonction f est dérivable sur D et pour $x \in D$, $f'(x) = \tan^2 x$. La fonction f est ainsi strictement croissante sur chaque I_n et s'annule donc au plus une fois dans chaque I_n .

$f(0) = 0$ et donc f s'annule exactement une fois dans I_0 en $x_0 = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur I_n et de plus $f\left(\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+\right) \times f\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-\right) = -\infty \times +\infty < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois dans I_n et donc exactement une fois dans I_n .

L'équation $\tan x = x$ admet donc dans chaque intervalle I_n , $n \in \mathbb{N}$, une et une seule solution notée x_n . De plus, $\forall n \geq 1$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc $x_n \in \left]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

Pour $n \geq 1$, $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ puis $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$ et même

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + O(1).$$

Ensuite, puisque $x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$, $x_n - n\pi = \text{Arctan}(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2}$. Donc

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Posons $y_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Alors d'après ce qui précède, $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. De plus, l'égalité $\tan(x_n) = x_n$ fournit $\tan\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n$ ou encore

$$n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n = -\cotan(y_n).$$

Puisque $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$, on obtient $n\pi \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{y_n}$ ou encore $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons $z_n = y_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. D'après ce qui précède, $\tan\left(-\frac{1}{n\pi} + z_n\right) = -\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + z_n}$ et aussi

$z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. On en déduit que

$$z_n = \frac{1}{n\pi} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + z_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice n° 15

1ère solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $1 + \frac{z}{n} = r_n e^{i\theta_n}$ où $r_n \geq 0$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ de sorte que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n}.$$

Puisque $1 + \frac{z}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, pour n assez grand on a $r_n > 0$ et $\theta_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Mais alors pour n assez grand

$$r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right).$$

Maintenant, $r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(x + o(1))$ et donc r_n^n tend vers e^x quand n tend vers $+\infty$.

Ensuite $n\theta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} y + o(1)$ et donc $n\theta_n$ tend vers y quand n tend vers $+\infty$.

Finalement, $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n}$ tend vers $e^x \times e^{iy} = e^z$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

2ème solution. Le résultat est connu quand z est réel. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}\right) z^k\right| \leq \sum_{k=0}^n \left|\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}\right| |z|^k.$$

Maintenant, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}^k}{\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_k}\right) \geq 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^n \left|\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}\right| |z|^k = \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^{|z|} - e^{|z|} = 0.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et puisque $\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ tend vers e^z quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.