Planche n° 12. Espaces préhilbertiens. Corrigé

Exercice n° 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\ell_n = (X^2 - 1)^n$ de sorte que $L_n = \ell_n^{(n)}$. L_n est un polynôme de degré n car ℓ_n est de degré $2n$.

1) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E$. Une intégration par parties fournit

$$(L_n|P) = \int_{-1}^{1} L_n(x)P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n)}(x)P(x)\,dx = \Big[(\ell_n)^{(n-1)}(x)P(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Maintenant, -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme ℓ_n et donc, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, -1 et 1 sont racines d'ordre $n-k$ de $\ell_n^{(k)}$ et en particulier racines de $(\ell_n)^{(k)}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donc

$$(L_n|P) = -\int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Plus généralement, si pour un entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$ alors

$$\begin{aligned}(L_n|P) &= (-1)^k \left(\Big[(\ell_n^{(n-k-1)}(x)P^{(k)}(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx\right)\\ &= (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$. En particulier

$$(L_n|P) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \ell_n(x)P^{(n)}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n P^{(n)}(x)\,dx \quad (*).$$

Cette dernière égalité reste vraie pour $n = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ (L_n|P) = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n P^{(n)}(x)\,dx.}$$

Soient alors n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p < n$. Puisque $\deg(L_p) = p < n$, on a $(L_n|L_p) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{La famille } (L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ est une base orthogonale de l'espace } (\mathbb{R}[X],\ |\ ).}$$

b) On applique maintenant la formule $(*)$ dans le cas particulier $P = L_n$. On obtient

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n L_n^{(n)}(x)\,dx = 2 \times (2n)! \int_{0}^{1} (1-x^2)^n\,dx = 2 \times (2n)! \int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2 t)^n(-\sin t)\,dt\\ &= 2 \times (2n)! \int_{0}^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = 2 \times (2n)! W_{2n+1} \text{ (intégrales de Wallis).}\end{aligned}$$

On « sait » que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}W_{2n-1} = \dfrac{(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \ldots \times 3}W_1 = \dfrac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$. On obtient alors

$$\|L_n\|^2 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!} \times 2 \times (2n)! = \frac{2^{2n+1}n!^2}{2n+1},$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}2^n n!.}$$

On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{1}{2^n n!}L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $(\mathbb{R}[X],\ |\ )$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n=\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X],\ |\ )$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(P_n)=n$ et donc la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}[X],\ |\ )$.

2) Chaque P_n, $n\in\mathbb{N}$, est de degré n et donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\text{Vect}(P_0,...,P_n)=\text{Vect}(1,X,...,X^n)$ et de plus, pour $n\in\mathbb{N}$

$$P_n|X^n=\frac{1}{\text{dom}}\left((P_n)|\text{dom}(P_n)X^n\right)=\frac{1}{\text{dom}(P_n)}\left(P_n|P_n\right)=\frac{1}{\text{dom}(P_n)}\|P_n\|^2$$

car $P_n\in(P_0,\ldots,P_{n-1})^{\perp}=(1,X,\ldots,X^{n-1})^{\perp}=(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. Ceci montre que $P_n|X^n>0$.

$$\boxed{\text{L'orthonormalisée de la base canonique de } \mathbb{R}[X] \text{ est la famille des polynômes de Legendre } \left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}.}$$

3) $\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$. Donc, la distance de X^3 à $\mathbb{R}_1[X]$ est bien définie.

Une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ est (P_0,P_1) avec $P_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $P_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\dfrac{1}{2}\times\left(X^2-1\right)'=\sqrt{\dfrac{3}{2}}X$.

Le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est

$$(X_3|P_0)\,P_0+(X_3|P_1)\,P_1=\frac{1}{2}\left(X^3|1\right)1+\frac{3}{2}\left(X^3|X\right)X,$$

avec $X^3|1=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^3\ dt=0$ et $X^3|X=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^4\ dt=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$. Donc, le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{5}X=\dfrac{3}{5}X$. Par suite,

$$\begin{aligned}\left(d\left(X^3,\mathbb{R}_1[X]\right)\right)^2&=\left\|X^3-\frac{3}{5}X\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left(t^3-\frac{3}{5}t\right)^2 dt=2\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{9}{25}\times\frac{1}{3}\right)^2=2\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{25}\right)^2\\&=\frac{2\times4^2}{7^2\times25^2},\end{aligned}$$

et donc $d\left(X^3,\mathbb{R}_1[X]\right)=\dfrac{4\sqrt{2}}{7\times25}=\dfrac{4\sqrt{2}}{175}$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2

1) • Soient P et Q deux polynômes. La fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(P,Q)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de l'application φ sont claires. De plus, pour $P\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0&\Rightarrow\int_0^{+\infty}P^2(t)e^{-t}\ dt=0\\&\Rightarrow\forall t\in[0,+\infty[,\ P^2(t)e^{-t}=0\ \text{(fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\&\Rightarrow\forall t\in[0,+\infty[,\ P(t)=0\ (\text{car }\forall t\in[0,+\infty[,\ e^{-t}\neq0)\\&\Rightarrow P=0\ \text{(polynôme ayant une infinité de racines)}.\end{aligned}$$

Ainsi, la forme φ est définie et finalement

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) a) Soit $n\in\mathbb{N}$. La formule de Leibniz permet d'écrire

$$\left(X^ne^{-X}\right)^{(n)}e^X=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(X^n\right)^{(n-k)}\left(e^{-X}\right)^{(k)}\right)e^X=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}X^k.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(h_n) = n$ (et $\text{dom}(h_n) = (-1)^n$) et on sait que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X].}$$

b) Soient $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto (t^n e^{-t})^{(n-1)}$ et P sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = \int_0^A P(t)(t^n e^{-t})^{(n)}\,dt = \left[P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}\right]_0^A - \int_0^A P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}\,dt$$

Maintenant, $(t^n e^{-t})^{(n-1)}$ peut s'écrire $Q(t)e^{-t}$ où Q est un polynôme et donc $P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, la formule de Leibniz montre que le polynôme Q a une valuation au moins égale à 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}(t)$ s'annule en 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}\,dt.$$

De manière générale, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, les remarques précédentes s'appliquent à la fonction $t \mapsto P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k-1)}$ et par récurrence on obtient

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)}\,dt.$$

En particulier, pour $k = n$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t}\,dt$. Cette égalité reste vraie quand $n = 0$ et on a montré que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(P, h_n) = \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t}\,dt.$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(P) < n$, on a $P^{(n)} = 0$ et donc $\varphi(P, h_n) = 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(h_n) = n$, on en déduit en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi(h_n, h_k) = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X], \varphi).}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\deg(h_n) = n$ et $\text{dom}(h_n) = (-1)^n$, on a $h_n^{(n)} = (-1)^n n!$. La question précédente fournit alors

$$\|h_n\|^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t)t^n e^{-t}\,dt = n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = n!\Gamma(n+1) = n!^2,$$

et donc $\|h_n\| = n!$. Par suite,

$$\boxed{\text{la famille } \left(\frac{1}{n!}h_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthonormale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X], \varphi).}$$

Exercice n° 3

1) • Soit $(P, Q) \in E^2$. L'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$. Ensuite, l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand t tend vers 1, $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Puisque $\dfrac{1}{2} < 1$, on en déduit que l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand t tend vers 1, $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ et l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$ et $\varphi(P, Q)$ existe.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $P \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=0\\ &\Rightarrow \forall t\in]-1,1[,\ \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}=0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall t\in]-1,1[, P(t)=0\Rightarrow P=0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Ainsi, l'application φ est définie et finalement

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) a) Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$. En posant $t=\cos\theta$, on obtient

$$\varphi(T_n,T_p)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_{\pi}^{0}\frac{T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\,(-\sin\theta d\theta)=\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta,$$

(pour $\theta\in]0,\pi[$, $\sin\theta>0$ et donc $\sqrt{1-\cos^2\theta}=|\sin\theta|=\sin\theta$). Si de plus, $n\neq p$,

$$\varphi(T_n,T_p)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos((n+p)\theta)+\cos((n-p)\theta))\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p}+\frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p}\right]_0^{\pi}=0.$$

Ainsi, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. De plus, on sait que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(T_n)=n$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{la famille } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien } (E,\varphi).}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Quand $p=n$, la formule précédente fournit

$$\|T_n\|^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos(2n\theta))\,d\theta=\left\{\begin{array}{l}\pi \text{ si } n=0\\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } n\geqslant 1\end{array}\right.,$$

et donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \|T_n\|=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\pi} \text{ si } n=0\\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \text{ si } n\geqslant 1\end{array}\right..}$$

Exercice n° 4

1) Montrons que E est un sous-espace de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.)$. La suite nulle est élément de E. Soient $(u,v)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout entier naturel n, $u_n^2+v_n^2-2u_nv_n=(u_n-v_n)^2\geqslant 0$ et donc

$$0\leqslant(\lambda u_n+\mu v_n)^2=\lambda^2u_n^2+2\lambda\mu u_nv_n+\mu^2v_n^2\leqslant\lambda^2u_n^2+\lambda\mu(u_n^2+v_n^2)+\mu^2v_n^2=(\lambda^2+\lambda\mu)u_n^2+(\lambda\mu+\mu^2)v_n^2.$$

Par hypothèse, la série de terme général $(\lambda^2+\lambda\mu)u_n^2+(\lambda\mu+\mu^2)v_n^2$ converge et on en déduit que la suite $\lambda u+\mu v$ est de carré sommable. On a montré que

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.).}$$

2) • Soient u et v deux éléments de E. Pour tout entier naturel n,

$$|u_nv_n|\leqslant\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2).$$

Ainsi, la série de terme général u_nv_n est absolument convergente et donc convergente. Ceci montre que $\varphi(u,v)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $u\in E$,

$$\varphi(u,u)=0\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2=0\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2=0\Rightarrow u=0.$$

En résumé, l'application φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Exercice n° 5

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\Phi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tA \times B) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

L'application Φ n'est autre que produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier est un produit scalaire. La base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (constituée des matrices élémentaires) est orthonormée pour ce produit scalaire.

L'application Φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Par exemple, si $A = iE_{1,1} \neq 0$ alors ${}^tAA = -E_{1,1}$ puis $\mathrm{Tr}({}^tAA) = -1 < 0$.

Exercice n° 6

Soit N une norme sur E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2\ (N(x + y))^2 + (N(x - y))^2 = 2((N(x))^2 + (N(y))^2)$.
Il faut montrer que la norme N est associée à un produit scalaire B. Si B existe, B est nécessairement défini par

$$\forall (x, y) \in E^2,\ B(x, y) = \frac{1}{4}((N(x + y))^2 - (N(x - y))^2).$$

Réciproquement,

• Pour tout $x \in E$, $B(x, x) = \frac{1}{4}((N(2x))^2 - (N(0))^2) = \frac{1}{4}(4(N(x))^2 - 0) = (N(x))^2$ et donc $\forall x \in E$, $B(x, x) \geqslant 0$ puis $B(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De plus, $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x, x)}$.
• $\forall (x, y) \in E^2$, $B(y, x) = \frac{1}{4}((N(y + x))^2 - (N(y - x))^2) = \frac{1}{4}((N(x + y))^2 - (N(x - y))^2) = B(x, y)$.
• Vérifions alors que l'application B est bilinéaire.

1) Montrons que $\forall (x, y, z) \in E^3$, $B(x + y, z) + B(x - y, z) = 2B(x, z)$.

$$\begin{aligned}
B(x + y, z) + B(x - y, z) &= \frac{1}{4}((N(x + y + z))^2 - (N(x + y - z))^2 + (N(x - y + z))^2 - (N(x - y - z))^2) \\
&= \frac{1}{4}((N(x + y + z))^2 + (N(x - y + z))^2) - ((N(x + y - z))^2 + (N(x - y - z))^2) \\
&= \frac{1}{4}(2(N(x + z))^2 + (N(y))^2) - 2((N(x - z))^2 + (N(y))^2) \text{ (par hypothèse sur N)} \\
&= \frac{2}{4}((N(x + z))^2 - (N(x - z))^2) = 2B(x, z).
\end{aligned}$$

2) Montrons que $\forall (x, z) \in E^2$, $B(2x, z) = 2B(x, z)$. Tout d'abord, $B(0, z) = \frac{1}{4}((N(z))^2 - (N(-z))^2) = 0$ puis d'après 1)

$$B(2x, z) = B(x + x, z) + B(x - x, z) = 2B(x, z).$$

3) Montrons que $\forall (x, y, z) \in E^3$, $B(x, z) + B(y, z) = B(x + y, z)$.

$$\begin{aligned}
B(x, z) + B(y, z) &= B\left(\frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2}, z\right) + B\left(\frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2}, z\right) \\
&= 2B\left(\frac{x + y}{2}, z\right) \text{ (d'après 1))} \\
&= B(x + y, z) \text{ (d'après 2))}.
\end{aligned}$$

4) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $B(nx, y) = nB(x, y)$.
• C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\forall (x, y) \in E^2$, $B(nx, y) = nB(x, y)$ et $B((n + 1)x, y) = (n + 1)B(x, y)$. Alors

$$B((n + 2)x, y) + B(nx, y) = B((n + 2)x + nx, y) = B(2(n + 1)x, y) = 2B((n + 1)x, y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence, $B((n+2)x, y) = 2(n+1)B(x, y) - nB(x, y) = (n+2)B(x, y)$.

5) Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $B(nx, y) = nB(x, y)$. Le résultat est acquis pour $n \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B(nx, y) + B(-nx, y) = B(0, y) = 0 \text{ et donc } B(-nx, y) = -B(nx, y) = -nB(x, y),$$

6) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x, y) \in E^2$, $B\left(\dfrac{1}{n}x, y\right) = \dfrac{1}{n}B(x, y)$.

$$B(x, y) = B\left(\frac{1}{n}nx, y\right) = nB\left(\frac{1}{n}x, y\right) \text{ et donc } B\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}B(x, y).$$

7) Montrons que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $B(rx, y) = rB(x, y)$. Soient $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ puis $r = \dfrac{p}{q}$.

$$B(rx, y) = B\left(\frac{p}{q}x, y\right) = pB\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}B(x, y) = rB(x, y).$$

8) Montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$. Soit λ un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente de limite λ.
Maintenant, l'application $\begin{array}{rccc} N : & (E, N) & \rightarrow & (\mathbb{R}, |\,|) \\ & x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue sur E car 1-Lipschitzienne sur E. Donc

$$B(\lambda x, y) = B(\lim_{n \to +\infty} r_n x, y) = \lim_{n \to +\infty} B(r_n x, y) = \lim_{n \to +\infty} r_n B(x, y) = \lambda B(x, y).$$

Finalement, l'application B est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire. Puisque $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x, x)}$, N est la norme associée à ce produit scalaire. On a montré que

$$\boxed{\text{toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme hilbertienne.}}$$

Exercice n° 7

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_i|e_j)^2 = 1 + \sum_{j \neq i} (e_i|e_j)^2$$

et donc $\displaystyle\sum_{j \neq i} (e_i|e_j)^2 = 0$.On en déduit que $\forall j \neq i$, $(e_i|e_j) = 0$. Ainsi, pour tout couple d'indices (i, j) tel que $i \neq j$, on a $e_i|e_j = 0$. Par suite

la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille orthonormale.

Il reste à vérifier que si $F = \text{Vect}(e_1, ..., e_n)$ alors $F = E$.
Soit x un vecteur de E. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On peut donc définir le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F. On sait que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i.$$

On en déduit que $\|p_F(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = \|x\|^2$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = 0,$$

et donc $x = p_F(x)$ ce qui montre que $x \in F$. Donc $F = E$ et finalement

$$\boxed{\text{la famille } (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

Exercice n° 8

1) L'existence, la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\Phi(P,P) = 0 &\Rightarrow \int_0^1 f(t)P^2(t)\,dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t)P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}.\end{aligned}$$

Maintenant, la fonction f est continue, positive sur $[0,1]$ et n'est pas nulle. Donc la fonction f est strictement positive sur un intervalle ouvert non vide inclus dans le segment $[0,1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines et finalement $P = 0$.

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

2) L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ répond à la question.

3) Soit n un entier naturel non nul. Le polynôme $P_n \in (P_0, ..., P_{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Soit p le nombre de racines réelles d'ordre impair du polynôme P_n. Soient a_1,..., a_p ces racines (deux à deux distinctes, réelles et d'ordre impair) dans le cas où $p \geqslant 1$. Si $p \geqslant 1$, on pose $Q = (X - a_1)...(X - a_p)$ et si $p = 0$, on pose $Q = 1$.

Si $p < n$, le polynôme Q est orthogonal à P_n car de degré strictement plus petit que le degré de P_n. D'autre part , au vu de la définition de Q, la fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est continue sur $[0,1]$, de signe constant sur $[0,1]$, d'intégrale nulle sur $[0,1]$. La fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est donc nulle. On en déduit que le polynôme P_n est le polynôme nul ce qui n'est pas. Donc $p = n$ ce qui signifie que le polynôme P_n a n racines réelles simples.

Exercice n° 9

1) Soit $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$ et $m = \dim F$. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}$. M est une matrice rectangulaire de format (m,n).

Soit $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice ${}^tMM$ est

$$\sum_{k=1}^{m} m_{k,i} m_{k,j} = (x_i|x_j),$$

et on a donc

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = {}^tMM.$$

Puisque $\text{rg}(x_1, ..., x_n) = \text{rg}M$, il s'agit de vérifier que $\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}M$. Pour cela, montrons que les matrices M et ${}^tMM$ ont même noyau.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$ et aussi

$$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}M.$$

Finalement, $\text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}M$ et donc, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1, ..., x_n) = \text{rg}M = \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(G(x_1, x_2, ..., x_n))$.

$$\boxed{\text{rg}(G(x_1, x_2, ..., x_n)) = \text{rg}(x_1, \ldots, x_n).}$$

2) D'après 1) et puisque ${}^tMM$ est une matrice carrée de format n,

$$\begin{aligned}(x_1, ..., x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \text{rg}(x_1, x_2, ..., x_n) < n \Leftrightarrow \text{rg}G(x_1, x_2, ..., x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1, x_2, ..., x_n) \notin GL_n(\mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow \gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.\end{aligned}$$

De plus, quand la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ libre, avec les notations de la question 1), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée, inversible. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(x_1, ..., x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0\\ (x_1, ..., x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n) > 0.\end{array}}$$

3) 1ère solution. Soit x un vecteur de E et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Dans la première colonne de $\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)$, le théorème de Pythagore permet d'écrire (puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$)

$$\begin{pmatrix} (x|x) \\ (x|x_1) \\ \vdots \\ (x|x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (p_F(x)|p_F(x)) \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n) + \gamma(p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n)$$

Maintenant, $p_F(x)$ est dans F et donc la famille $(p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée puis d'après la question 2) $\gamma(p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Il reste $\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n)$ et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x \in E,\ \gamma(x, x_1, \ldots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Finalement

$$\boxed{\|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n)}{\gamma(x_1, x_2, ..., x_n)}}.}$$

2ème solution. Posons $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ puis $d = \|x - p_F(x)\|$ de sorte que

$$d^2 = (x - p_F(x))|(x - p_F(x)) = (x - p_F(x))|x = \|x\|^2 - (x|p_F(x)).$$

D'autre part, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $x|x_i = (x - p_F(x)|x_i) + (p_F(x)|x_i) = (p_F(x)|x_i)$. Par suite, les $n+1$ réels d^2, λ_1,..., λ_n sont solutions du système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{ll} d^2 + & \lambda_1(x|x_1) + \ldots + \lambda_n(x|x_n) = \|x\|^2 \\ & \lambda_1(x_1|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_1|x_n) = (x|x_1) \\ & \vdots \\ & \lambda_1(x_n|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_n|x_n) = (x|x_n) \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système d'inconnues d^2, λ_1, $\ldots \lambda_n$, vaut $\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ et le système est de Cramer. Le déterminant associé à l'inconnue d^2 est $\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n)$ et les formules de Cramer refournissent

$$d^2 = \frac{\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)}{\gamma(x_1, \ldots, x_n)}.$$