Planche n° 11. Intégrales dépendant d'un paramètre

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$.
1) Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0, +\infty[$.
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt$.

Exercice n° 2 (* I) (très long)** (Intégrale de Poisson)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,d\theta$.

1) a) Montrer que F est paire, définie et continue sur $\mathbb{R}$,

b) Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

c)Montrer que F est dérivable sur $]-1, 1[$ puis sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Préciser une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.

d) Calculer $F'(x)$.

e) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (F(x) - 4\pi\ln x)$.

f) En déduire $F(x)$ pour tout réel x. Tracer le graphe de F.

2) a) Quand $x \in]-1, 1[$, retrouver ce résultat en écrivant d'abord $\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$ comme somme d'une série (commencer par dériver la fonction de θ).
b) En déduire $F(x)$ pour tout réel x de $]-1, 1[$ puis pour tout réel x.

Exercice n° 3 (I)** (Un calcul de l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$.

1) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
2) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser G'.
3) Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5) En déduire I.
6) Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Exercice n° 4 (***)

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt$ (on admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice n° 5 (***)

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\,dt$.

Exercice n° 6 (** I) (très long)**

Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,dt$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ (indication : trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par ces deux fonctions).

Exercice n° 7 (I)** (Produit de convolution)

1) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues et T-périodiques (T réel strictement positif). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f * g(x) = \int_0^T f(x-t)g(t)\ dt.$$

Montrer que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et T-périodique.

2) $*$ est donc une loi interne sur E, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Montrer que cette loi est commutative.