Planche n^o 10. Séries entières

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n^o 1 (**) :

Déterminer le rayon de convergence de la série entière proposée dans chacun des cas suivants :

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^n z^n$ **2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n}\right)^n z^n$ **3)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\ln(n!))^2 z^n$ **4)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\text{ch}\,\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} z^n$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{n^n}z^n$ **6)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ln(n!))^a}{n!^b}z^n$ **7)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{1+b^n}z^n$, $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$

Exercice n^o 2

Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

1) (**) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ **2) (**)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n}{n+2}x^n$ **3) (*** I)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ **4) (**)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2n+1)!}x^n$

5) (*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ **6) (**)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\text{ch}\,n)x^n$ **7) (** I)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$ **8)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^n$

9) (I)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n$ **10) (*)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}$ **11) (**)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n$ **12) (**)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$

13) (***) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ où $a_0=a_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

14) (**) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ où a_n est le nombre de couples (x,y) d'entiers naturels tels que $x+5y=n$.

Exercice n^o 3

Développer en série entière les fonctions suivantes :

1) (*) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ **2) (*** I)** $\dfrac{1}{x^2-2tx+1}$, $t\in]-1,1[$ **3) (*)** $\ln(x^2-5x+6)$

4) (**) $\text{Arctan}\left(\dfrac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)$, $a\in]0,\pi[$ **5) (**)** $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(x-p)}$ **6) (*** I)** $(\text{Arcsin}\,x)^2$

7) (*) $\displaystyle\int_0^x\cos(t^2)\,dt$ **8) (*** I)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{t^4+t^2+1}$ **9) (**)** $\cos x\,\text{ch}\,x$.

Exercice n^o 4 (* I)

Pour x réel, on pose $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}\ \text{si}\ x\neq 0\\ 1\ \text{si}\ x=0\end{cases}$. Montrer que f est ce classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n^o 5 (* I)**

Soient $P_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$ et $R>0$ donné. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

Exercice n^o 6 (****) (Inverse d'une série entière)

Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ une série entière de rayon $R>0$ et telle que $a_0=1$ (ou plus généralement $a_0\neq 0$).

1) Montrer qu'il existe une et une seule suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\delta_{0,n}$.

2) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon strictement positif.

Exercice nº 7 (* I)**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice nº 8 (***) :

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$ pour x dans $]-1, 1[$.

Exercice nº 9 (* I)**

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$ pour x dans $]-1, 1[$ et en déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Exercice nº 10 (****)

Pour n entier naturel, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k+1}$. Convergence et somme de la série (numérique) de terme général u_n.

Exercice nº 11 (***)

Soit A une matrice carrée complexe de format $p \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergence et somme en fonction de χ_A de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^n) z^n$.

Exercice nº 12 (***)

Pour x réel, on pose $F(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2} \, dt$. En développant F en série entière par deux méthodes différentes, montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

Exercice nº 13 (**)

On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ puis pour tout entier naturel n, $\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{array}\right.$. Rayons et sommes de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$.

Exercice nº 14 (* I)**

Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}} x^n$ pour $x \in [0, 4[$.

Exercice nº 15 (* I)**

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite réelle k. (En particulier $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ si $k = 0$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ si $k = 1$).On suppose de plus que la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence égal à 1 et que la série de terme général a_n diverge.

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = k$.

2) Applications.

a) Equivalent simple quand x tend vers 1 de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)^p \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}x^n$ où p est un entier naturel non nul donné.

Exercice n° 16

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$. Pour x réel on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

On suppose que pour tout entier naturel p et tout réel positif x, $|f^{(p)}(x)|\leqslant 1$. Déterminer f.

Exercice n° 17 (** I)** (Développement en série entière de la fonction $x\mapsto \tan x$)

Pour $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose $f(x)=\tan x$.

1) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}=P_n\circ f$ et que les P_n sont à coefficients entiers naturels. (Utiliser $\tan'=1+\tan^2$).

2) En utilisant la formule de Taylor-Laplace, montrer que la série de Taylor à l'origine de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

3) On note a_n les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $(n+1)a_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$. En déduire que pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f(x)=g(x)$ et que $R=\dfrac{\pi}{2}$.

4) Calculer a_0, a_1, a_2,..., a_7.

5) Vérifier que la fonction $x\mapsto \operatorname{th} x$ est développable en série entière. Préciser le rayon et la valeur des coefficients en fonction des a_n.

Exercice n° 18 (* I)**

Développer en série entière $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)\,dt$ et en déduire que pour tout réel x, $F(x)=\dfrac{e^{-x^2/4}}{2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2/4}\,dt$.

Exercice n° 19 (***)

Soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $\left(\dfrac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice n° 20 (* I)** (Dénombrement de parenthésages)

1) Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne et a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléménts de E (($a_1=1$ conventionnellement), $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=5$, ...). Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$.

2) Soit f la série entière associée à la suite (a_n). On suppose momentanément le rayon R de cette série strictement positif. Montrer que pour tout x de $]-R,R[$, $(f(x))^2-f(x)+x=0$.

3) Calculer R et f.

4) En déduire a_n.