Planche n° 8. Intégration sur un intervalle quelconque

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1

Etudier l'existence des intégrales suivantes

1) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\,dx$ **2) (**)** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)\,dx$ **3) (**)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x+e^x}\,dx$

4) (***) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}\,dx$ **5) (**)** $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x^2-x}}\,dx$ **6) (**)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{-\ln x}\,dx$

7) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}\,dx$ **8) (**)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ **9) (**)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}\,dx$

10) (**) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **11) (**)** $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}\,dx$ **12) (***)** $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{\mathrm{Arccos}(1-x)}\,dx.$

Exercice n° 2

Etudier l'existence des intégrales suivantes

1) (* I)** $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^a\ln^b x}\,dx$ (Intégrales de BERTRAND) **2) (**)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\tan x)^a\,dx$

3) (**) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right)\,dx$ **4) (***)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x^b)}\,dx$

Exercice n° 3

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes

1) (I)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ **2) (**)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a}\,dx\ (a>0)$ **3) (**)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{ix^2}\,dx$

4) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^3\sin(x^8)\,dx$ **5) (**)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(e^x)\,dx.$

Exercice n° 4

Existence et calcul de

1) (I)** $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ **2) (** I)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$

3) (***) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\,dx$ **4)(***)** $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx\ (a>0)$

5) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx$ **6) (**)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{5\,\mathrm{ch}\,x+3\,\mathrm{sh}\,x+4}\,dx$

7) (***) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)\,dt$ **8) (** I)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx$

9) (I)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$ **10) (***)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$

11) (* I)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt\ (0<a<b)$

Exercice n° 5 (Deux calculs de $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$.)

1) (I)** En utilisant $\mathrm{J}=\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$, calculer I (et J).

2) (* I)** Calculer $P_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$ (commencer par P_n^2) et en déduire I.

Exercice n° 6 (I)**

En utilisant un développement de $\dfrac{1}{1-t}$, calculer $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\ln t}{t-1}\,dt$.

Exercice n° 7 (* I)**

Calculer $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{t-1}{\ln t}\,dt$ (en écrivant $\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{t-1}{\ln t}\,dt=\int_{0}^{x}\frac{t}{\ln t}\,dt-\int_{0}^{x}\frac{1}{\ln t}\,dt$).

Exercice n° 8

1) (I)** Trouver un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $e^{x^2}\displaystyle\int_{x}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$.

2) (***) Montrer que $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx\underset{a\to 0}{\sim}-\ln a$.

3) (*) Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3+a^2}\,dx\underset{a\to+\infty}{\sim}\frac{1}{a^2}$.

Exercice n° 9 (***)

Etude complète de $f\,:\,x\mapsto\displaystyle\int_{x}^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt$.

Exercice n° 10 (***)

Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$.

Exercice n° 11 (**)

Soit f définie, continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, intégrable sur $[1,+\infty[$.

Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice n° 12 (***)

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f'^2(x)\,dx\right)^2\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f''^2(x)\,dx\right)$. Cas d'égalité ?