# Planche n° 7. Suites et séries de fonctions

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

**Exercice n° 1**

Etudier les suites de fonctions suivantes (convergence simple, convergence uniforme, convergence localement uniforme)

$$\textbf{1) (**)}\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \textbf{2) (**)}\ f_n(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \quad \textbf{3) (**)}\ f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

**Exercice n° 2 (*** I)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \left\{\begin{array}{l}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n]\\ 0 \text{ si } x \geqslant n\end{array}\right.$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x}$.

**Exercice n° 3 (*** I)** (Polynômes de Bernstein. Théorème de Weierstrass).

**1)** Soit $f$ une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n$ entier naturel non nul, on définit le $n$-ème polynôme de Bernstein associé à $f$ par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k}.$$

**a)** Calculer $B_n(f)$ quand $f$ est la fonction $x \mapsto 1$, quand $f$ est la fonction $x \mapsto x$, quand $f$ est la fonction $x \mapsto x(x-1)$.

**b)** En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nX)^2X^k(1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.

**2)** En séparant les entiers $k$ tels que $\left|x-\dfrac{k}{n}\right| > \alpha$ et les entiers $k$ tels que $\left|x-\dfrac{k}{n}\right| \leqslant \alpha$ ($\alpha > 0$ donné), montrer que la suite de polynômes $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

**3)** Montrer le théorème de Weierstrass : soit $f$ une application continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $f$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

**Exercice n° 4 (** I)**

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$. Montrer que $f$ est un polynôme.

**Exercice n° 5 (**)**

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\sin(nx)}{n}$.

**1)** Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $]-1,1[$.

**2)** Calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout réel $x$ de $]-1,1[$, $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$.

**Exercice n° 6 (**)**

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

**1)** Vérifier que $f$ est bien définie sur $]1,+\infty[$.

**2)** Limites de $f$ en $1$ et $+\infty$.

**3)** Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

**Exercice n° 7 (**)**

Etudier (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) les séries de fonctions de termes généraux :

**1)** $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$ **2)** $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^3x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ **3)** $f_n(x) = (-1)^n\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

**Exercice n° 8 (**)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(t) = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$.

**1)** Etudier la convergence simple et uniforme de la série de terme général $f_n$ puis la continuité de la somme $f$.

**2)** Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$ à l'aide de la formule de Stirling.

**Exercice n° 9 (**)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, soit $f_n(t) = \dfrac{\text{Arctan}(nt)}{n^2}$.

Etude complète de $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ : domaine de définition, parité, limites, continuité, dérivabilité (vérifier que $f$ n'est pas dérivable en $0$), allure du graphe .

**Exercice n° 10 (**)**

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$. Trouver un équivalent simple de $f$ en $0$ à droite.

**Exercice n° 11 (***)**

Pour $x \in ]-1,1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Trouver un équivalent simple de $f$ en $1$ .