Planche n° 6. Séries numériques. Corrigé

Exercice n° 1

1) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. $\forall n \geqslant 1$, u_n existe

1ère solution.

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge.

2ème solution. Puisque $\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} - 1 = \frac{2}{n^2+n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} > 0.$$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge.

2) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. $\forall n \geqslant 2$, u_n existe et de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 2$, diverge et est positive, la série de terme général u_n diverge.

3) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Pour $n \geqslant 1$, $u_n > 0$ et

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)\left(-\ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln 2\ln(n) + o(1).\end{aligned}$$

Donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln 2 \ln n} = \dfrac{1}{n^{\ln 2}}$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\ln 2}}$, $n \geqslant 1$, diverge (série de Riemann d'exposant $\alpha \leqslant 1$) et est positive, la série de terme général u_n diverge.

4) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$. u_n existe pour $n \geqslant 2$. $\ln(\operatorname{ch} n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{e^n}{2}\right) = n - \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.

Vérifions alors que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge. La fonction $x \to x\ln x$ est continue, croissante et strictement positive sur $]1,+\infty[$ (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur $]1,+\infty[$). Donc, la fonction $x \to \dfrac{1}{x\ln x}$ est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

Par suite, pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Donc, la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ est divergente. Ainsi, u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente. La série de terme général u_n diverge.

5) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \text{Arccos}\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}$. u_n existe pour $n \geqslant 1$. De plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(u_n) = \sin\left(\text{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{1-1+\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{n} > 0 \end{aligned}$$

La série de terme général $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\times\dfrac{1}{n}$ est divergente. Donc, la série de terme général u_n diverge.

6) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant 1$.

1ère solution.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2}\times\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n converge.

2ème solution. Pour $n \geqslant 3$,

$$\frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{(n-1)(n-2)-3(n-1)-5}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!} - \frac{3}{n-2)!} - \frac{5}{(n-1)!}$$

est le terme général d'une série numérique convergente.

7) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. u_n est défini pour $n \geqslant 1$ car pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Ensuite

$$\begin{aligned} \ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Puis $n\ln\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n = e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La série de terme général $-\dfrac{1}{12n\sqrt{e}}$ est divergente et donc la série de terme général u_n diverge.

8)

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) &= \ln\left(1-\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n\pi} < 0. \end{aligned}$$

Donc, la série de terme général u_n diverge.

9) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif. De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{1}{n^2+0}\,dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n converge.

10) $-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=-\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}-1+O\left(\frac{1}{n}\right)$ puis

$$-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n\underset{n\to+\infty}{=}-\ln(n)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\ln(n)+o(1).$$

Par suite,

$$0<u_n=e^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-\ln n}=\frac{1}{n}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

11) $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n\underset{n\to+\infty}{=}e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e\left(1-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e}{2n}>0.$$

La série de terme général $\frac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

12)

$$\begin{aligned}1-n\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)&=1-n\left(\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}1-n\left(\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{24n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{24n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}1-n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{12n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{12n^2}<0$. Puisque la série numérique de terme général $-\frac{1}{12n^2}$ converge, il en est de même de la série numérique de terme général u_n.

Exercice n° 2

1) Si P n'est pas unitaire de degré 3, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.
Soit P un polynôme unitaire de degré 3. Posons $P=X^3+aX^2+bX+c$.

$$\begin{aligned}u_n&=n\left(\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/4}-\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}n\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(1+\frac{a}{3n}+\frac{b}{3n^2}-\frac{a^2}{9n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{a}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}+\frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

• Si $a\neq 0$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.
• Si $a=0$ et $\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\neq 0$, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\right)\frac{1}{n}$. u_n est donc de signe constant pour n grand et est équivalent au terme général d'une série divergente. Donc la série de terme général u_n diverge.
• Si $a=0$ et $\frac{1}{2}-\frac{b}{3}=0$, $u_n\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas, la série de terme général u_n converge (absolument).

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a=0$ et $b=\frac{3}{2}$ ou encore la série de terme général u_n converge si et seulement si P est de la forme $X^3+\frac{3}{2}X+c$, $c\in\mathbb{R}$.

2) Pour $n\geqslant 2$, posons $u_n=\frac{1}{n^\alpha}S(n)$. Pour $n\geqslant 2$,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2} S(n)$$

et donc $\forall n \geqslant 2,\ S(n) \leqslant \dfrac{S(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \frac{S(2)}{2^{n-2}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel α, la série numérique de terme général u_n converge.

3) $\forall u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Par suite, $\forall n \geqslant 2$, $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et par suite $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} > 0$. La série de terme général u_n diverge.

4) On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers.
Notons $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante d'entiers et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{p_n} = 0$.
Par suite, $0 < \dfrac{1}{p_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln\left(\left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ et les séries de termes généraux $\dfrac{1}{p_n}$ et $\ln\left(\left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ sont de même nature.
Il reste donc à étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.

Montrons que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) \geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right)$.
Soit $n \geqslant 1$. Alors $\dfrac{1}{p_n} < 1$ et la série de terme général $\dfrac{1}{p_n^k}$, $k \in \mathbb{N}$, est une série géométrique convergente de somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$.
Soit alors N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p_1 < p_2 \ldots < p_n$ la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N.
Tout entier entre 1 et N s'écrit de manière unique $p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i = E\left(\dfrac{\ln(N)}{\ln(p_i)}\right)$ et deux entiers distincts ont des décompositions distinctes. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) \text{ (car } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} > 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^i}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right)\right) = \ln\left(\sum_{0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \ldots 0 \leqslant \beta_n \leqslant \alpha_n} \frac{1}{p_1^{\beta_1} \ldots,\ p_n^{\beta_n}}\right) \\
&\geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{N \to +\infty} \ln\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right) = +\infty$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) = +\infty$.
La série de terme général $\ln\left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right)^{-1}$ diverge et il en est de même de la série de terme général $\dfrac{1}{p_n}$.
(Ceci montre qu'il y a beaucoup de nombres premiers et en tout cas beaucoup plus de nombres premiers que de carrés parfaits par exemple).

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = a_p \times 10^p + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$ où $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ et $a_p \neq 0$. Alors $c(n) = p + 1$.
Déterminons p est en fonction de n. On a $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ et donc $p = E(\log(n))$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n(E(\log n)+1)^\alpha}.$$

Par suite, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^\alpha(10)}{n\ln^\alpha(n)}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$ (séries de Bertrand). Redémontrons ce résultat qui n'est pas un résultat de cours.

La série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ est divergente (voir n° 1, 4)). Par suite, si $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln^\alpha(n)}$ est divergente car $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n\ln^\alpha(n)} \geqslant \dfrac{1}{n\ln n}$.

Soit $\alpha > 1$. Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^\alpha x}$ est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, pour $k \geqslant 3$,

$$\frac{1}{k\ln^\alpha k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx$$

puis, pour $n \geqslant 3$, en sommant pour $k \in [\![3,n]\!]$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^\alpha k} \leqslant \sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)} - \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(n)}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs, de terme général $\dfrac{1}{k\ln^\alpha k}$, est majorée et donc la série de terme général $\dfrac{1}{k\ln^\alpha k}$ converge.

6) Soit $n \geqslant 2$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln^a(n+1)}{(n+1)^b} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1 \text{ (d'après un théorème de croissances comparées)}$$

et d'après la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n converge.

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 0$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \tan(u_n) \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^a} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\frac{2a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par suite, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$.

8) La fonction $x \mapsto x^{3/2}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc pour $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant k^{3/2} \leqslant \int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n x^{3/2}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx = \int_1^{n+1} x^{3/2}\,dx$$

ce qui fournit

$$\frac{2}{5}n^{5/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \frac{2}{5}((n+1)^{5/2}-1) \text{ et donc } \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n^{\frac{5}{2}-\alpha}}{5} > 0$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\dfrac{5}{2} - \alpha < -1$ ou encore $\alpha > \dfrac{7}{2}$.

9) Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{n^\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right) - 1 \geqslant \frac{1}{n^\alpha} + \frac{2}{n^\alpha} + \ldots + \frac{n}{n^\alpha} = \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} > 0.$$

Comme $\dfrac{n(n+1)}{2n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{\alpha-2}}$, si $\alpha \leqslant 3$, on a $\alpha - 2 \leqslant 1$ et la série de terme général u_n diverge.

Si $\alpha > 3$,

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\leqslant \left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right)^n - 1 = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \text{ (car } n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-2}} \text{ terme général d'une série de RIEMANN convergente,} \end{aligned}$$

et, puisque $\alpha - 2 > 1$, la série de terme général u_n converge. Finalement, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 3$.

Exercice n° 3

1) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + (n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

La suite $\left((-1)^{n-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général u_n converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2) (Attention, la suite $\left(\dfrac{1}{n+(-1)^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroisante à partir d'un certain rang).

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

3) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ sont convergentes et la série de terme général $-\dfrac{1}{2n}$ est divergente. Si la série de terme général u_n convergeait alors la série de terme général $-\dfrac{1}{2n} = u_n - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergerait ce qui n'est pas. Donc la série de terme général u_n diverge.

Remarque. La série de terme général u_n diverge bien que u_n soit équivalent au terme général d'une série convergente.

4) Pour $x \in]0,+\infty[$, posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > e$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x} < 0$.

Donc, la fonction f est décroissante sur $[e,+\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est une suite décroissante et converge vers 0. Mais alors la série de terme général $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

5) • Si $\deg P \geqslant \deg Q$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

• Si $\deg P \leqslant \deg Q - 2$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.

• Si $\deg P = \deg Q - 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\dfrac{\mathrm{dom}P}{n\,\mathrm{dom}Q} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. u_n est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général u_n converge.

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\deg P < \deg Q$.

7) $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ puis pour $n \geqslant 2$, $n!e = 1 + n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $\dfrac{n!}{k!}$ est un entier divisible par $n(n-1)$ et est donc un entier pair que l'on note $2K_n$. Pour $n \geqslant 2$, on obtient

$$\sin(n!\pi e) = \sin\left(2K_n\pi + (n+1)\pi + \pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right).$$

Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}.$$

Maintenant, pour $k \geqslant n+3$, $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{k(k-1)\ldots(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et donc

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!} \leqslant \sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{(n+1)^3}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement , $\sin(n!\pi e) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
$\sin(n!\pi e)$ est somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général $\sin(n!\pi e)$ converge.
Si $p \geqslant 2$, $|\sin^p(n!\pi e)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^p}{n^p}$ et la série de terme général $\sin^p(n!\pi e)$ converge absolument.

Exercice n° 4

1) D'après un théorème de croissances comparées, $\dfrac{n+1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par suite, la série de terme général $\dfrac{n+1}{3^n}$ converge.

1er calcul. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\\ &= (S-1) - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que $S = \dfrac{9}{4}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}.}$$

2ème calcul. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k.$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = f_n'(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Pour $x = \dfrac{1}{3}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{3^k} = \frac{\dfrac{n}{3^{n+1}} - \dfrac{n+1}{3^n}+1}{\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2}$ et quand n tend vers l'infini, on obtient de nouveau $S = \dfrac{9}{4}$.

2) Pour $k \geqslant 3$, $\dfrac{2k-1}{k^3-4k} = \dfrac{3}{8(k-2)} + \dfrac{1}{4k} - \dfrac{5}{8(k+2)}$. Puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n}\frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + o(1) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\times\frac{3}{2} + \frac{5}{8}\times\frac{7}{12} + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{89}{96} + o(1).
\end{aligned}$$

La série proposée est donc convergente de somme $\dfrac{89}{96}$.

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.}$$

3) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $1^{3k} + j^{3k} + (j^2)^{3k} = 3$ puis $1^{3k+1} + j^{3k+1} + (j^2)^{3k+1} = 1 + j + j^2 = 0$ et $1^{3k+2} + j^{3k+2} + (j^2)^{3k+2} = 1 + j^2 + j^4 = 0$. Par suite,

$$e + e^j + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1^n + j^n + (j^2)^n}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!} &= \frac{1}{3}(e + e^j + e^{j^2}) = \frac{1}{3}\left(e + e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(e + 2e^{-1/2}\mathrm{Re}(e^{-i\sqrt{3}/2})\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(e + 2e^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(e + \frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).}$$

4) Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \text{ (somme télescopique)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

5) $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

Posons $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^k}{k}\right)$ puis pour $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^k}{k}\right)$. Puisque la série converge $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{p\to+\infty} S_{2p+1}$ avec

$$\begin{aligned} S_{2p+1} &= \sum_{k=2}^{2p+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} (\ln(2k) - \ln(2k+1) + \ln(2k+1) - \ln(2k)) = 0 \end{aligned}$$

et quand p tend vers $+\infty$, on obtient $S = 0$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.}$$

6) Si $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors, pour tout entier naturel n, $\dfrac{a}{2^n} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right) > 0$.

Ensuite, $\ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 + O\left(\dfrac{1}{2^{2n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$ et la série converge. Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{n+1}}\prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right) \text{ (produit télescopique)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\times\frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).}$$

7) Vérifions que pour tout réel x on a $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \dfrac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2) = \dfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \operatorname{ch}(2x)$ et $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = \dfrac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \operatorname{sh}(2x)$ puis

$$\frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x} = \frac{2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)} = \operatorname{th}(2x).$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{th} x = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$. Mais alors, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\operatorname{th}\left(\frac{a}{2^k}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\left(\frac{2}{\operatorname{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{\operatorname{th}\frac{a}{2^k}}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}\operatorname{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{2^k\operatorname{th}\frac{a}{2^k}}\right) \\ &= \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{2^n\operatorname{th}\frac{a}{2^n}} \text{ (somme télescopique)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $a = 0$.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\,\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2}{\mathrm{th}(2a)} - \frac{1}{a}.}$$

Exercice n° 5

Il faut vérifier que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
0 < (2n)u_{2n} &= 2(\underbrace{u_{2n} + \ldots + u_{2n}}_{n}) \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \text{ (car la suite } u \text{ est décroissante)}\\
&= 2(S_{2n} - S_n).
\end{aligned}$$

Puisque la série de terme général u_n converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(S_{2n} - S_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n)u_{2n} = 0$.
Ensuite, $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc les suites des termes de rangs pairs et impairs extraites de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite à savoir 0. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ ou encore que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Contre exemple avec u non monotone. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ est un carré parfait non nul} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. La suite u est positive et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$. Pourtant, $p^2 u_{p^2} = 1 \underset{p\to+\infty}{\to} 1$ et la suite (nu_n) admet une suite extraite convergeant vers 1. On a donc pas $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Exercice n° 6

Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$.

$$\begin{aligned}
S_{2n} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{(2n)^2}\sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)\\
&\geqslant \frac{1}{4n^2}(1 + 2 + \ldots + n) \text{ (car les } n \text{ entiers } \sigma(k),\ 1 \leqslant k \leqslant n, \text{ sont strictement positifs et deux à deux distincts)}\\
&= \frac{n(n+1)}{8n^2} \geqslant \frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Si la suite (S_n) converge, on doit avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. Donc la série de terme général $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$, $n \geqslant 1$, diverge.

Exercice n° 7

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \ln(1 + u_n)$, $w_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ et $t_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{dx}{1 + x^e}$.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, alors $0 \leqslant u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. Dans ce cas, les séries de termes généraux u_n, v_n et w_n sont de même nature.
D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{1 + u_n^e} \leqslant t_n \leqslant u_n$ puis $\dfrac{1}{1 + u_n^e} \leqslant \dfrac{t_n}{u_n} \leqslant 1$ et donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Les séries de termes généraux u_n et t_n sont aussi de même nature.

• Si u_n ne tend pas vers 0, la série de terme général u_n est grossièrement divergente. Puisque $u_n = e^{v_n} - 1$, v_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général v_n est grossièrement divergente. Dans ce cas aussi, les séries de termes généraux sont de même nature.
De même, puisque $w_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n} < 1$, on a $u_n = \dfrac{w_n}{1 - w_n}$ et w_n ne peut tendre vers 0.
Enfin, puisque u_n ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel N, il existe $n = n(N) \geqslant N$ tel que $u_n \geqslant \varepsilon$. Pour cet ϵ et ces n, on a $t_n \geqslant \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{1 + x^e} > 0$ (fonction continue, positive et non nulle) et la suite t_n ne tend pas vers 0. Dans le cas où u_n ne tend pas vers 0, les quatre séries sont grossièrement divergentes.

Exercice n° 8

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = (n+1)!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} \\
&= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k}
\end{aligned}$$

On a $0 < \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} = \frac{1}{(n+2)^5} \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+2)^4(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^5}$. On en déduit que $\sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3}\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)\left(1 - \frac{4}{n}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{19}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3}\left(1 - \frac{9}{n}\right) + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(n+1)!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Exercice n° 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$. D'après la formule du binôme de Newton, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ où A_n et B_n sont des entiers naturels. Un calcul conjugué fournit aussi $\left(2-\sqrt{3}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{3}$. Par suite, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2A_n$ est un entier pair. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(2A_n\pi - \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right).$$

Mais $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ et donc $\left(2-\sqrt{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général u_n converge.

Exercice n° 10

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\sqrt{u_n} - \frac{1}{n}\right)^2 \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série terme général $\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$ converge, la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Exercice n° 11

Pour $n \geqslant 2$, $v_n = \frac{u_n + 1 - 1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} = \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_{n-1})} - \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$ et d'autre part $v_1 = 1 - \frac{1}{1+u_1}$. Donc, pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} \text{ (somme télescopique).}$$

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $0 < u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1+u_n)$. Donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge ou encore la suite $\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain réel ℓ. Mais alors la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel strictement positif $P = e^{\ell}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $1 - \frac{1}{P}$.

Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général $\ln(1+u_n)$ diverge vers $+\infty$ et il en est de même que la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Exercice n° 12

Etudions tout d'abord la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$.

Si $\frac{u_n}{S_n}$ tend vers 0 alors

$$0 < \frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}).$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On en déduit que la série de terme général $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ est divergente car $\sum_{k=1}^{n} \ln(S_k) - \ln(S_{k-1}) = \ln(S_n) - \ln(S_0) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge ce qui est aussi le cas si $\frac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0.

Donc, dans tous les cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge.

Si $\alpha \leqslant 1$, puisque S_n tend vers $+\infty$, à partir d'un certain rang on a $S_n^{\alpha} \leqslant S_n$ et donc $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}} \geqslant \frac{u_n}{S_n}$. Donc, si $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ diverge.

Si $\alpha > 1$, puisque la suite (S_n) est croissante,

$$0 < \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{\alpha}} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^{\alpha}} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right),$$

qui est le terme général d'une série télescopique convergente puisque $\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Exercice n° 13

Si $\alpha < 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-2\alpha}$ et si $\alpha = 0$, $u_n = 1 + (-1)^n$. Donc si $\alpha \leqslant 0$, u_n ne tend pas vers 0. La série de terme général u_n diverge grossièrement dans ce cas.

On suppose dorénavant que $\alpha > 0$. Pour tout entier naturel non nul n, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha}}$ et donc la série de terme général u_n converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

Il reste à étudier le cas où $0 < \alpha \leqslant 1$. On a $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} + \frac{1}{n^{2\alpha}}$. La suite $\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant et donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. On en déduit que la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge ou encore si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

En résumé

Si $\alpha \leqslant 0$, la série de terme général $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge grossièrement,
si $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, la série de terme général $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge,
si $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ est semi convergente,
si $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge absolument.

Exercice n° 14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers termes de la série considérée et on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Il est connu que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_{m(p+q)} &= \left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right) - \left(\frac{1}{2q+2}+\ldots+\frac{1}{4q}\right) + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{2(m-1)p+1}+\ldots+\frac{1}{2mp-1}\right) - \left(\frac{1}{2(m-1)q+2}+\ldots+\frac{1}{2mq}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2mp} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} = H_{2mp} - \frac{1}{2}(H_{mp} + H_{mq}) \\
&\underset{m\to+\infty}{=} (\ln(2mp)+\gamma) - \frac{1}{2}(\ln(mp)+\gamma+\ln(mq)+\gamma) + o(1) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite extraite $(S_{m(p+q)})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

Montrons alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique entier naturel non nul m_n tel que $m_n(p+q) \leqslant n < (m_n+1)(p+q)$ à savoir $m_n = E\left(\dfrac{n}{p+q}\right)$.

$$\begin{aligned}
|S_n - S_{m_n(p+q)}| &\leqslant \frac{1}{2m_np+1} + \ldots + \frac{1}{2(m_n+1)p-1} + \frac{1}{2m_nq+2} + \frac{1}{2(m_n+1)q} \\
&\leqslant \frac{p}{2m_np+1} + \frac{q}{2m_nq+2} \leqslant \frac{1}{2m_n} + \frac{1}{2m_n} = \frac{1}{m_n}.
\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$.
Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{m_n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et aussi $\left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n \geqslant n_0$, on a alors

$$\begin{aligned}
\left|S_n - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| &\leqslant |S_n - S_{m_n(p+q)}| + \left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant \frac{1}{m_n} + \left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|S_n - \left(\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)\right)\right| < \varepsilon\right)$ et donc, la série proposée converge et a pour somme $\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

Exercice n° 15

La série proposée est le produit de Cauchy de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, par elle même.

- Si $\alpha > 1$, on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge absolument et donc que la série proposée converge.

• Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, pour $0 < k < n$ on a $0 < k(n-k) \leqslant \frac{n}{2}\left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4}$ (la fonction $x \mapsto x(n-x)$ admet sur $[0, n]$ un maximum en $\frac{n}{2}$). Donc $u_n \geqslant \frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha}$ avec $\frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$. Comme $2\alpha - 1 \leqslant 1$, la série proposée diverge.

• Si $\alpha < 0$, $u_n \geqslant \frac{1}{(n-1)^\alpha}$ et donc u_n ne tend pas vers 0. Dans ce cas, la série proposée diverge grossièrement.

Exercice n° 16

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}2n^3 - 3n^2 + 1 &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15n^2 - 22n - 11 = 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53n + 79\\ &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53(n+3) - 80\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{n!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!}\right) = 2e - 15(e-1) + 53(e-2) - 80\left(e - \frac{5}{2}\right)\\ &= -40e + 111.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = -40e + 109.}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \frac{n+1}{a+n+1} u_n$. Par suite $(n+a+1)u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+a)u_n + (1-a)u_n$ puis

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (k+a+1)u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} (k+a)u_k = (n+a+1)u_{n+1} - (a+1)u_1 = (n+a+1)u_{n+1} - 1.$$

Si $a = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Si $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{1-a}((n+a+1)u_{n+1} - 1) = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1}(a+n+1)u_{n+1}$.

Si $a > 1$, la suite u est strictement positive et la suite des sommes partielles (S_n) est majorée par $\frac{1}{a-1}$. Donc la série de terme général u_n converge. Il en est de même de la suite $((a+n+1)u_{n+1})$. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} (a+n+1)u_{n+1}$.

Si $\ell \neq 0$, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n+a+1}$ contredisant la convergence de la série de terme général u_n. Donc $\ell = 0$ et

$$\text{si } a > 1,\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}.$$

Si $0 < a < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{1 \times 2 \times \ldots \times n}{2 \times 3 \ldots \times (n+1)} = \frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Exercice n° 17

Pour tout entier naturel non nul n, $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p > 2$.

Exercice n° 18

(On applique la règle de Raabe-Duhamel qui n'est pas un résultat de cours.)

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{a+n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{a+1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{a+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et « on sait » qu'il existe un réel strictement positif K tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^a}$.

Exercice n° 19

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots = \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)-2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)\\ &= \left(1-\frac{2}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{12},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} &= 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots = \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.}$$

Exercice n° 20

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$, $k \geqslant 1$, converge, la suite (R_n) est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$0 < \dfrac{1}{k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$ et puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ converge, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \text{ (surtout ne pas décomposer en deux sommes)}\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

ou encore $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n - \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)}$.

Or $-\dfrac{1}{k^2(k-1)}+\dfrac{1}{k(k-1)(k-2)} = \dfrac{2}{k^2(k-1)(k-2)}$ puis
$\dfrac{2}{k^2(k-1)(k-2)} - \dfrac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = -\dfrac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}$ et donc

$$\begin{aligned}R_n &= \frac{1}{n}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)} = \frac{1}{n}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k^2(k-1)(k-2)}\\ &= \frac{1}{n}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}\end{aligned}$$

Ensuite $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^5}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4n^4}$ ou encore $\displaystyle-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{3}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Puis

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)}-\frac{1}{k(k-1)}\right)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{N(N-1)}\right)=\frac{1}{2n(n-1)}$$
$$=\frac{1}{2n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)}&=\lim_{N\to+\infty}\frac{2}{3}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)}-\frac{1}{k(k-1)(k-2)}\right)\\&=\lim_{N\to+\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\right)=\frac{2}{3n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{2}{3n^3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-1}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{2}{3n^3}\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{2}{3n^3}+\frac{2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

et finalement

$$R_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^4}\right)+\left(\frac{2}{3n^3}+\frac{2}{n^4}\right)-\frac{3}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Exercice n° 21

$\sum n^n$ est une série à termes positifs grossièrement divergente.

1 ère solution.

$0<n^n\underset{n\to+\infty}{\sim}n^n-(n-1)^{n-1}$ car $\displaystyle\frac{n^n-(n-1)^{n-1}}{n^n}=1-\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{1}{ne}+o\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}1$.
D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes,

$$\sum_{p=1}^{n}p^p\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{p=2}^{n}p^p\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{p=2}^{n}(p^p-(p-1)^{p-1})=n^n-1\underset{n\to+\infty}{\sim}n^n.$$

(La somme est équivalente à son dernier terme.)

2 ème solution. Pour $n\geqslant 3$, $\displaystyle 0\leqslant\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p\leqslant\frac{1}{n^n}\times(n-2)(n-2)^{n-2}\leqslant\frac{n^{n-1}}{n^n}=\frac{1}{n}$. Donc $\displaystyle\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p\underset{n\to+\infty}{=}o(1)$. On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n}p^p=1+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}+\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p\underset{n\to+\infty}{=}1+o(1)+o(1)=1+o(1)$.

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n}p^p\underset{n\to+\infty}{\sim}n^n.}$$

Exercice n° 22

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}$, $\displaystyle\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)$. Donc pour $N>p$,

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\ n\neq p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{2p}\left(\sum_{1-p\leqslant k\leqslant N-p,\ k\neq 0}\frac{1}{k}-\sum_{p+1\leqslant k\leqslant N+p,\ k\neq 2p}\frac{1}{k}\right)$$
$$=\frac{1}{2p}\left(-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N+p}\frac{1}{k}+\frac{1}{2p}+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2p}-\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)$$

Maintenant, $\displaystyle\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\frac{1}{N-p+1}+\ldots+\frac{1}{N+p}$ est une somme de $2p-1$ termes tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Puisque $2p-1$ est constant quand N varie, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=0$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\times\frac{3}{2p}=\frac{3}{4p^2}\text{ puis }\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ donné, on a aussi $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}=-\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{p^2-n^2}=-\frac{3}{4n^2}$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=-\frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit que la suite double $\left(\dfrac{1}{n^2-p^2}\right)_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ n\neq p}$ n'est pas sommable.

Exercice n° 23

La suite $\left((-1)^n\dfrac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^n\dfrac{1}{3n+1}$, $n\geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,dt=\int_0^1\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt.$$

Mais $\left|(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\right|=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\leqslant\int_0^1 t^{3n+3}\,dt=\frac{1}{3n+4}$. On en déduit que $(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Calculons cette dernière intégrale.

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{3\ln 2 + \pi\sqrt{3}}{9}.}$$

Exercice n° 24

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $nv_n - (n-1)v_{n-1} = u_n$ ce qui reste vrai pour $n = 1$ si on pose de plus $v_0 = 0$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} v_n^2 - 2u_n v_n &= v_n^2 - 2(nv_n - (n-1)v_{n-1})v_n = -(2n-1)v_n^2 + 2(n-1)v_{n-1}v_n \\ &\leqslant -(2n-1)v_n^2 + (n-1)(v_{n-1}^2 + v_n^2) = (n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2. \end{aligned}$$

Mais alors, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} (v_n^2 - 2u_n v_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} ((n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2) = -nv_n^2 \leqslant 0.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} 2u_n v_n \leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{N} u_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^2\right)^{1/2} \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

Si $\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^2\right)^{1/2} > 0$, on obtient après simplification par $\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^2\right)^{1/2}$ puis élévation au carré

$$\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{N} u_n^2,$$

cette inégalité restant claire si $\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^2\right)^{1/2} = 0$. Finalement,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{N} u_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $v_n^2 (\geqslant 0)$ est majorée. Donc la série de terme général v_n^2 converge et de plus, quand N tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

Exercice n° 25

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt \\ &= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt. \end{aligned}$$

Par suite, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 (-t^2)\frac{1-(-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Or $\left|(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{2N+2}\,dt = \frac{1}{2N+3}$. Comme $\frac{1}{2N+3}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même de $(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt$. On en déduit que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt \\ &= \left[\frac{t}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.}$$