

Planche n° 6. Séries numériques. Corrigé

Exercice n° 1

1) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$. $\forall n \geq 1$, u_n existe

1ère solution.

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \left(\frac{1}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = O \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, converge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge.

2ème solution. Puisque $\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} - 1 = \frac{2}{n^2 + n - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} > 0.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, converge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge.

2) Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$. $\forall n \geq 2$, u_n existe et de plus $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$, $n \geq 2$, diverge et est positive, la série de terme général u_n diverge.

3) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}$. Pour $n \geq 1$, $u_n > 0$ et

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln(n) \ln \left(\frac{n+3}{2n+1} \right) = \ln(n) \left(\ln \left(\frac{1}{2} \right) + \ln \left(1 + \frac{3}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \left(-\ln 2 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln 2 \ln(n) + o(1). \end{aligned}$$

Donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\ln 2 \ln n} = \frac{1}{n^{\ln 2}}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{\ln 2}}$, $n \geq 1$, diverge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha \leq 1$) et est positive, la série de terme général u_n diverge.

4) Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{\ln(n) \ln(\text{ch } n)}$. u_n existe pour $n \geq 2$. $\ln(\text{ch } n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left(\frac{e^n}{2} \right) = n - \ln 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)} > 0$.

Vérifions alors que la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$, $n \geq 2$, diverge. La fonction $x \rightarrow x \ln x$ est continue, croissante et strictement positive sur $]1, +\infty[$ (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur $]1, +\infty[$). Donc, la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x \ln x}$ est continue et décroissante sur $]1, +\infty[$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k \ln k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx$$

Par suite, pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

Donc, la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ est divergente. Ainsi, u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente. La série de terme général u_n diverge.

5) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \text{Arccos} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}$. u_n existe pour $n \geq 1$. De plus $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sin(u_n) = \sin\left(\text{Arccos} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2/3}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{1 - 1 + \frac{2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{n} > 0$$

La série de terme général $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{n}$ est divergente. Donc, la série de terme général u_n diverge.

6) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n \neq 0$ pour $n \geq 1$.

1ère solution.

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

2ème solution. Pour $n \geq 3$,

$$\frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{(n-1)(n-2) - 3(n-1) - 5}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!} - \frac{3}{(n-2)!} - \frac{5}{(n-1)!}$$

est le terme général d'une série numérique convergente.

7) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$. u_n est défini pour $n \geq 1$ car pour $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Ensuite

$$\ln\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puis $n \ln\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n = e^{n \ln(\cos(1/\sqrt{n}))} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{e}} \left(e^{-\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La série de terme général $-\frac{1}{12n\sqrt{e}}$ est divergente et donc la série de terme général u_n diverge.

8)

$$\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} \frac{n}{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{n\pi} < 0.$$

Donc, la série de terme général u_n diverge.

9) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$.

Pour $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif. De plus, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2+0} dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n converge.

$$\begin{aligned} 10) \quad -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) &= -\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ puis} \\ &-\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n) + o(1). \end{aligned}$$

Par suite,

$$0 < u_n = e^{-\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

$$11) \quad n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et donc}$$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e \left(1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0.$$

La série de terme général $\frac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

12)

$$\begin{aligned} 1 - n \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) &= 1 - n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - n \left(\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2} < 0$. Puisque la série numérique de terme général $-\frac{1}{12n^2}$ converge, il en est de même de la série numérique de terme général u_n .

Exercice n° 2

1) Si P n'est pas unitaire de degré 3, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement. Soit P un polynôme unitaire de degré 3. Posons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned} u_n &= n \left(\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{1/4} - \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}\right)^{1/3} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left(\left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 + \frac{a}{3n} + \frac{b}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3} + \frac{a^2}{9}\right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

- Si $a \neq 0$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.
- Si $a = 0$ et $\frac{1}{2} - \frac{b}{3} \neq 0$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right) \frac{1}{n}$. u_n est donc de signe constant pour n grand et est équivalent au terme général d'une série divergente. Donc la série de terme général u_n diverge.
- Si $a = 0$ et $\frac{1}{2} - \frac{b}{3} = 0$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas, la série de terme général u_n converge (absolument).

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$ et $b = \frac{3}{2}$ ou encore la série de terme général u_n converge si et seulement si P est de la forme $X^3 + \frac{3}{2}X + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2) Pour $n \geq 2$, posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha} S(n)$. Pour $n \geq 2$,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leq \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2} S(n)$$

et donc $\forall n \geq 2, S(n) \leq \frac{S(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$u_n \leq \frac{1}{n^\alpha} \frac{S(2)}{2^{n-2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel α , la série numérique de terme général u_n converge.

3) $\forall u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$. Par suite, $\forall n \geq 2, 0 < u_n < \frac{1}{n}$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et par suite $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$. La série de terme général u_n diverge.

4) On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Notons $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante d'entiers

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$ ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_n} = 0$.

Par suite, $0 < \frac{1}{p_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ et les séries de termes généraux $\frac{1}{p_n}$ et $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ sont de même nature.

Il reste donc à étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.

Montrons que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) \geq \ln\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}\right)$.

Soit $n \geq 1$. Alors $\frac{1}{p_n} < 1$ et la série de terme général $\frac{1}{p_n^k}, k \in \mathbb{N}$, est une série géométrique convergente de somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}.$$

Soit alors N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p_1 < p_2 \dots < p_n$ la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N .

Tout entier entre 1 et N s'écrit de manière unique $p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$ où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i = E\left(\frac{\ln(N)}{\ln(p_i)}\right)$ et deux entiers distincts ont des décompositions distinctes. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) &\geq \sum_{k=1}^n \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) \quad (\text{car } \forall k \in \mathbb{N}^*, \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} > 1) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^i}\right) \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right)\right) = \ln\left(\sum_{0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq \beta_n \leq \alpha_n} \frac{1}{p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}}\right) \\ &\geq \ln\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}\right) = +\infty$ et donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) = +\infty$.

La série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}$ diverge et il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$.

(Ceci montre qu'il y a beaucoup de nombres premiers et en tout cas beaucoup plus de nombres premiers que de carrés parfaits par exemple).

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = a_p \times 10^p + \dots + a_1 \times 10 + a_0$ où $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ et $a_p \neq 0$. Alors $c(n) = p + 1$. Déterminons p est en fonction de n . On a $10^p \leq n < 10^{p+1}$ et donc $p = E(\log(n))$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(E(\log n) + 1)^\alpha}.$$

Par suite, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^\alpha(10)}{n \ln^\alpha(n)}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$ (séries de BERTRAND). Redémontrons ce résultat qui n'est pas un résultat de cours.

La série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ est divergente (voir n° 1, 4)). Par suite, si $\alpha \leq 1$, la série de terme général $\frac{1}{n \ln^\alpha(n)}$ est divergente car $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n \ln^\alpha(n)} \geq \frac{1}{n \ln n}$.

Soit $\alpha > 1$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$ est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, pour $k \geq 3$,

$$\frac{1}{k \ln^\alpha k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx$$

puis, pour $n \geq 3$, en sommant pour $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^\alpha k} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \int_2^n \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)} - \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(n)} \right) \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs, de terme général $\frac{1}{k \ln^\alpha k}$, est majorée et donc la série de terme général $\frac{1}{k \ln^\alpha k}$ converge.

6) Soit $n \geq 2$.

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\ln^\alpha(n+1)}{(n+1)^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 < 1 \text{ (d'après un théorème de croissances comparées)}$$

et d'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tan(u_n) \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^a}{1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{2a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par suite, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$.

8) La fonction $x \mapsto x^{3/2}$ est continue et croissante sur \mathbb{R}^+ . Donc pour $k \geq 1$, $\int_{k-1}^k x^{3/2} dx \leq k^{3/2} \leq \int_k^{k+1} x^{3/2} dx$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n x^{3/2} dx = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k x^{3/2} dx \leq \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} x^{3/2} dx = \int_1^{n+1} x^{3/2} dx$$

ce qui fournit

$$\frac{2}{5} n^{5/2} \leq \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leq \frac{2}{5} ((n+1)^{5/2} - 1) \text{ et donc } \sum_{k=1}^n k^{3/2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^{\frac{5}{2}-\alpha}}{5} > 0$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\frac{5}{2} - \alpha < -1$ ou encore $\alpha > \frac{7}{2}$.

9) Pour $n \geq 1$,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \left(1 + \frac{2}{n^\alpha}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^\alpha}\right) - 1 \geq \frac{1}{n^\alpha} + \frac{2}{n^\alpha} + \dots + \frac{n}{n^\alpha} = \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} > 0.$$

Comme $\frac{n(n+1)}{2n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\alpha-2}}$, si $\alpha \leq 3$, on a $\alpha - 2 \leq 1$ et la série de terme général u_n diverge.

Si $\alpha > 3$,

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\leq \left(1 + \frac{n}{n^\alpha}\right)^n - 1 = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)} - 1 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \quad (\text{car } n \ln\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-2}} \text{ terme général d'une série de RIEMANN convergente,} \end{aligned}$$

et, puisque $\alpha - 2 > 1$, la série de terme général u_n converge. Finalement, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 3$.

Exercice n° 3

1) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2 - 1 + 1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + (n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

La suite $\left((-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général u_n converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2) (Attention, la suite $\left(\frac{1}{n + (-1)^{n-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas décroissante à partir d'un certain rang).

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

3) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Les séries de termes généraux respectifs $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sont convergentes et la série de terme général $-\frac{1}{2n}$ est divergente. Si la série de terme général u_n convergerait alors la série de terme général $-\frac{1}{2n} = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergerait ce qui n'est pas. Donc la série de terme général u_n diverge.

Remarque. La série de terme général u_n diverge bien que u_n soit équivalent au terme général d'une série convergente.

4) Pour $x \in]0, +\infty[$, posons $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > e$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x} < 0$.

Donc, la fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 3}$ est une suite décroissante et converge

vers 0. Mais alors la série de terme général $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

5) • Si $\deg P \geq \deg Q$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

• Si $\deg P \leq \deg Q - 2$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.

• Si $\deg P = \deg Q - 1$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\text{dom}P}{n \text{ dom}Q} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. u_n est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général u_n converge.

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\deg P < \deg Q$.

7) $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ puis pour $n \geq 2$, $n!e = 1 + n + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$.

Pour $0 \leq k \leq n-2$, $\frac{n!}{k!}$ est un entier divisible par $n(n-1)$ et est donc un entier pair que l'on note $2K_n$. Pour $n \geq 2$, on obtient

$$\sin(n!\pi e) = \sin\left(2K_n\pi + (n+1)\pi + \pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right).$$

Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!}.$$

Maintenant, pour $k \geq n+3$, $\frac{n!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et donc

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{(n+1)^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^3}.$$

On en déduit que $\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement, $\sin(n!\pi e) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\sin(n!\pi e)$ est somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général $\sin(n!\pi e)$ converge.

Si $p \geq 2$, $|\sin^p(n!\pi e)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^p}{n^p}$ et la série de terme général $\sin^p(n!\pi e)$ converge absolument.

Exercice n° 4

1) D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{n+1}{3^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par suite, la série de terme général $\frac{n+1}{3^n}$ converge.

1er calcul. Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= (S-1) - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $S = \frac{9}{4}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}}$$

2ème calcul. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur \mathbb{R} et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k.$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k = f'_n(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \right)'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Pour $x = \frac{1}{3}$, on obtient $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{\frac{n}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} + 1}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}$ et quand n tend vers l'infini, on obtient de nouveau $S = \frac{9}{4}$.

2) Pour $k \geq 3$, $\frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{3}{8(k-2)} + \frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)}$. Puis

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-2} + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k+2} = \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) + o(1) \\ &\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{8} \times \frac{3}{2} + \frac{5}{8} \times \frac{7}{12} + o(1) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{89}{96} + o(1). \end{aligned}$$

La série proposée est donc convergente de somme $\frac{89}{96}$.

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.}$$

3) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $1^{3k} + j^{3k} + (j^2)^{3k} = 3$ puis $1^{3k+1} + j^{3k+1} + (j^2)^{3k+1} = 1 + j + j^2 = 0$ et $1^{3k+2} + j^{3k+2} + (j^2)^{3k+2} = 1 + j^2 + j^4 = 0$. Par suite,

$$e + e^j + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n + j^n + (j^2)^n}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!},$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} &= \frac{1}{3}(e + e^j + e^{j^2}) = \frac{1}{3} \left(e + e^{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{1}{3} \left(e + 2e^{-1/2} \operatorname{Re}(e^{-i\sqrt{3}/2}) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(e + 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left(e + \frac{2}{\sqrt{e}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right).}$$

4) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} \right) &= \sum_{k=2}^n \left(\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \text{ (somme télescopique)} \\ &\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

5) $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

Posons $S = \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$ puis pour $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$. Puisque la série converge $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2p+1}$ avec

$$\begin{aligned} S_{2p+1} &= \sum_{k=2}^{2p+1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^p \left(\ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^p (\ln(2k) - \ln(2k+1) + \ln(2k+1) - \ln(2k)) = 0 \end{aligned}$$

et quand p tend vers $+\infty$, on obtient $S = 0$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$$

6) Si $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors, pour tout entier naturel n , $\frac{a}{2^n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) > 0$.

Ensuite, $\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$ et la série converge. Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) &= \ln\left(\prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^n \frac{\sin\left(2 \times \frac{a}{2^k}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^n \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right) \text{ (produit télescopique)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1} \times \frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right). \end{aligned}$$

$$\forall a \in]0, \frac{\pi}{2}[, \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).$$

7) Vérifions que pour tout réel x on a $\text{th}(2x) = \frac{2 \text{th } x}{1 + \text{th}^2 x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x &= \frac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \text{ch}(2x) \text{ et } 2 \text{sh } x \text{ch } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = \\ &= \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \text{sh}(2x) \text{ puis} \end{aligned}$$

$$\frac{2 \text{th } x}{1 + \text{th}^2 x} = \frac{2 \text{sh } x \text{ch } x}{\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x} = \frac{\text{sh}(2x)}{\text{ch}(2x)} = \text{th}(2x).$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\text{th } x = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th } x}$. Mais alors, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \text{th}\left(\frac{a}{2^k}\right) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \left(\frac{2}{\text{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{\text{th}\frac{a}{2^k}}\right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2^{k-1} \text{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{2^k \text{th}\frac{a}{2^k}}\right) \\ &= \frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{2^n \text{th}\frac{a}{2^n}} \text{ (somme télescopique)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $a = 0$.

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{th}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{a}.$$

Exercice n° 5

Il faut vérifier que $n u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 < (2n)u_{2n} &= 2(\underbrace{u_{2n} + \dots + u_{2n}}_n) \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \quad (\text{car la suite } u \text{ est décroissante}) \\ &= 2(S_{2n} - S_n). \end{aligned}$$

Puisque la série de terme général u_n converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(S_{2n} - S_n) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)u_{2n} = 0$.

Ensuite, $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc les suites des termes de rangs pairs et impairs extraites de la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et ont même limite à savoir 0. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$ ou encore que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Contre exemple avec u non monotone. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré parfait non nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La suite u est

positive et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$. Pourtant, $p^2 u_{p^2} = 1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$ et la suite (nu_n) admet une suite extraite convergent vers 1. On a donc pas $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$.

Exercice n° 6

Soit σ une permutation de $[1, n]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2}$.

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \\ &\geq \frac{1}{4n^2} (1 + 2 + \dots + n) \quad (\text{car les } n \text{ entiers } \sigma(k), 1 \leq k \leq n, \text{ sont strictement positifs et deux à deux distincts}) \\ &= \frac{n(n+1)}{8n^2} \geq \frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Si la suite (S_n) converge, on doit avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. Donc la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$, $n \geq 1$, diverge.

Exercice n° 7

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \ln(1 + u_n)$, $w_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$ et $t_n = \int_0^{u_n} \frac{dx}{1 + x^e}$.

• Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $0 \leq u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$. Dans ce cas, les séries de termes généraux u_n , v_n et w_n sont de même nature.

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{1 + u_n^e} \leq t_n \leq u_n$ puis $\frac{1}{1 + u_n^e} \leq \frac{t_n}{u_n} \leq 1$ et donc $t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. Les séries de termes généraux u_n et t_n sont aussi de même nature.

• Si u_n ne tend pas vers 0, la série de terme général u_n est grossièrement divergente. Puisque $u_n = e^{v_n} - 1$, v_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général v_n est grossièrement divergente. Dans ce cas aussi, les séries de termes généraux sont de même nature.

De même, puisque $w_n = \frac{u_n}{1 + u_n} < 1$, on a $u_n = \frac{w_n}{1 - w_n}$ et w_n ne peut tendre vers 0.

Enfin, puisque u_n ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel N , il existe $n = n(N) \geq N$ tel que $u_n \geq \varepsilon$. Pour cet ε et ces n , on a $t_n \geq \int_0^\varepsilon \frac{dx}{1 + x^e} > 0$ (fonction continue, positive et non nulle) et la suite t_n ne tend pas vers 0. Dans le cas où u_n ne tend pas vers 0, les quatre séries sont grossièrement divergentes.

Exercice n° 8

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = (n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k}$$

On a $0 < \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} = \frac{1}{(n+2)^5} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+2)^4(n+1)} \leq \frac{1}{n^5}$. On en

déduit que $\sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right) \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \left(1 - \frac{4}{n}\right)$$

$$+ \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{19}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{9}{n}\right) + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Finalement

$$(n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Exercice n° 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \sin\left(\pi\left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right)$. D'après la formule du binôme de NEWTON, $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ où A_n et B_n sont des entiers naturels. Un calcul conjugué fournit aussi $\left(2 - \sqrt{3}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{3}$. Par suite, $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n = 2A_n$ est un entier pair. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(2A_n\pi - \pi\left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi\left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right).$$

Mais $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ et donc $\left(2 - \sqrt{3}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. On en déduit que $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \pi\left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général u_n converge.

Exercice n° 10

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\sqrt{u_n} - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 0$ et donc $0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série terme général $\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$ converge, la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Exercice n° 11

Pour $n \geq 2$, $v_n = \frac{u_n + 1 - 1}{(1 + u_1)\dots(1 + u_n)} = \frac{1}{(1 + u_1)\dots(1 + u_{n-1})} - \frac{1}{(1 + u_1)\dots(1 + u_n)}$ et d'autre part $v_1 = 1 - \frac{1}{1 + u_1}$. Donc, pour $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} \text{ (somme télescopique).}$$

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et donc $0 < u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1+u_n)$. Donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge ou encore la suite $\left(\ln \left(\prod_{k=1}^n (1+u_k) \right) \right)_{n \geq 1}$ converge vers un certain réel ℓ . Mais alors la suite

$\left(\prod_{k=1}^n (1+u_k) \right)_{n \geq 1}$ converge vers le réel strictement positif $P = e^\ell$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^n v_k \right)_{n \geq 1}$ converge vers $1 - \frac{1}{P}$.

Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général $\ln(1+u_n)$ diverge vers $+\infty$ et il en est de même que la suite $\left(\prod_{k=1}^n (1+u_k) \right)_{n \geq 1}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^n v_k \right)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

Exercice n° 12

Etudions tout d'abord la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$.

Si $\frac{u_n}{S_n}$ tend vers 0 alors

$$0 < \frac{u_n}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln \left(1 - \frac{u_n}{S_n} \right) = \ln \left(\frac{S_{n-1}}{S_n} \right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}).$$

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. On en déduit que la série de terme général $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ est divergente car $\sum_{k=1}^n \ln(S_k) - \ln(S_{k-1}) = \ln(S_n) - \ln(S_0) \rightarrow +\infty$. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge ce qui est aussi le cas si $\frac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0.

Donc, dans tous les cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge.

Si $\alpha \leq 1$, puisque S_n tend vers $+\infty$, à partir d'un certain rang on a $S_n^\alpha \leq S_n$ et donc $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{u_n}{S_n}$. Donc, si $\alpha \leq 1$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha > 1$, puisque la suite (S_n) est croissante,

$$0 < \frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right),$$

qui est le terme général d'une série télescopique convergente puisque $\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

La série de terme général $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice n° 13

Si $\alpha < 0$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{-2\alpha}$ et si $\alpha = 0$, $u_n = 1 + (-1)^n$. Donc si $\alpha \leq 0$, u_n ne tend pas vers 0. La série de terme général u_n diverge grossièrement dans ce cas.

On suppose dorénavant que $\alpha > 0$. Pour tout entier naturel non nul n , $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ et donc la série de terme général u_n converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

Il reste à étudier le cas où $0 < \alpha \leq 1$. On a $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}$. La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha} \right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant et donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. On en déduit que la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge ou encore si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

En résumé

Si $\alpha \leq 0$, la série de terme général $\frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge grossièrement,
 si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, la série de terme général $\frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge,
 si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, la série de terme général $\frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ est semi convergente,
 si $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge absolument.

Exercice n° 14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers termes de la série considérée et on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Il est connu que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{m(p+q)} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1}\right) - \left(\frac{1}{2q+2} + \dots + \frac{1}{4q}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2(m-1)p+1} + \dots + \frac{1}{2mp-1}\right) - \left(\frac{1}{2(m-1)q+2} + \dots + \frac{1}{2mq}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2mp} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} = H_{2mp} - \frac{1}{2}(H_{mp} + H_{mq}) \\ &\underset{m \rightarrow +\infty}{=} (\ln(2mp) + \gamma) - \frac{1}{2}(\ln(mp) + \gamma + \ln(mq) + \gamma) + o(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right) + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, la suite extraite $(S_{m(p+q)})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right)$.

Montrons alors que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique entier naturel non nul m_n tel que $m_n(p+q) \leq n < (m_n+1)(p+q)$ à savoir $m_n = E\left(\frac{n}{p+q}\right)$.

$$\begin{aligned} |S_n - S_{m_n(p+q)}| &\leq \frac{1}{2m_n p + 1} + \dots + \frac{1}{2(m_n+1)p-1} + \frac{1}{2m_n q + 2} + \frac{1}{2(m_n+1)q} \\ &\leq \frac{p}{2m_n p + 1} + \frac{q}{2m_n q + 2} \leq \frac{1}{2m_n} + \frac{1}{2m_n} = \frac{1}{m_n}. \end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geq n_0$, $\frac{1}{m_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ et aussi $\left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq n_0$, on a alors

$$\begin{aligned} \left|S_n - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right)\right| &\leq |S_n - S_{m_n(p+q)}| + \left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \frac{1}{m_n} + \left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \left|S_n - \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right)\right)\right| < \varepsilon)$ et donc, la série proposée converge et a pour somme $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right)$.

Exercice n° 15

La série proposée est le produit de CAUCHY de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$, par elle-même.

- Si $\alpha > 1$, on sait que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge absolument et donc que la série proposée converge.

- Si $0 \leq \alpha \leq 1$, pour $0 < k < n$ on a $0 < k(n-k) \leq \frac{n}{2} \left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4}$ (la fonction $x \mapsto x(n-x)$ admet sur $[0, n]$ un maximum en $\frac{n}{2}$). Donc $u_n \geq \frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha}$ avec $\frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$. Comme $2\alpha - 1 \leq 1$, la série proposée diverge.
- Si $\alpha < 0$, $u_n \geq \frac{1}{(n-1)^\alpha}$ et donc u_n ne tend pas vers 0. Dans ce cas, la série proposée diverge grossièrement.

Exercice n° 16

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 2n^3 - 3n^2 + 1 &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15n^2 - 22n - 11 = 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53n + 79 \\ &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53(n+3) - 80 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{n!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!} \right) = 2e - 15(e-1) + 53(e-2) - 80 \left(e - \frac{5}{2} \right) \\ &= -40e + 111. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = -40e + 109.}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \frac{n+1}{a+n+1} u_n$. Par suite $(n+a+1)u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+a)u_n + (1-a)u_n$ puis

$$(1-a) \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (k+a+1)u_{k+1} - \sum_{k=1}^n (k+a)u_k = (n+a+1)u_{n+1} - (a+1)u_1 = (n+a+1)u_{n+1} - 1.$$

Si $a = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Si $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{1-a} ((n+a+1)u_{n+1} - 1) = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1} (a+n+1)u_{n+1}$.

Si $a > 1$, la suite u est strictement positive et la suite des sommes partielles (S_n) est majorée par $\frac{1}{a-1}$. Donc la série de terme général u_n converge. Il en est de même de la suite $((a+n+1)u_{n+1})$. Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a+n+1)u_{n+1}$.

Si $\ell \neq 0$, $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n+a+1}$ contredisant la convergence de la série de terme général u_n . Donc $\ell = 0$ et

$$\text{si } a > 1, \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}.$$

Si $0 < a < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{2 \times 3 \dots \times (n+1)} = \frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Exercice n° 17

Pour tout entier naturel non nul n , $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n)^p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p > 2$.

Exercice n° 18

(On applique la règle de RAABE-DUHAMEL qui n'est pas un résultat de cours.)

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{a+n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{a+1}{n}\right)^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{a+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et « on sait » qu'il existe un réel strictement positif K tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n^a}$.

Exercice n° 19

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{12}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

Exercice n° 20

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$, $k \geq 1$, converge, la suite (R_n) est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$0 < \frac{1}{k^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ et puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \text{ (surtout ne pas décomposer en deux sommes)} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ou encore $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}$.

Or $-\frac{1}{k^2(k-1)} + \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)}$ puis
 $\frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} - \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = -\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}$ et donc

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} = \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} \\ &= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \end{aligned}$$

Ensuite $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^4}$ ou encore $-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{3}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Puis

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{(k-1)(k-2)} - \frac{1}{k(k-1)} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{N(N-1)} \right) = \frac{1}{2n(n-1)} \\ &= \frac{1}{2n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)} - \frac{1}{k(k-1)(k-2)} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{N(N-1)(N-2)} \right) = \frac{2}{3n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{2}{3n^3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{3n^3} \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{3n^3} + \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

et finalement

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} \right) + \left(\frac{2}{3n^3} + \frac{2}{n^4} \right) - \frac{3}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Exercice n° 21

$\sum n^n$ est une série à termes positifs grossièrement divergente.

1 ère solution.

$$0 < n^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n - (n-1)^{n-1} \text{ car } \frac{n^n - (n-1)^{n-1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$$

D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes,

$$\sum_{p=1}^n p^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{p=2}^n p^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{p=2}^n (p^p - (p-1)^{p-1}) = n^n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n.$$

(La somme est équivalente à son dernier terme.)

2 ème solution. Pour $n \geq 3$, $0 \leq \frac{1}{n^n} \sum_{p=1}^{n-2} p^p \leq \frac{1}{n^n} \times (n-2)(n-2)^{n-2} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$. Donc $\frac{1}{n^n} \sum_{p=1}^{n-2} p^p \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. On

en déduit que $\frac{1}{n^n} \sum_{p=1}^n p^p = 1 + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} + \frac{1}{n^n} \sum_{p=1}^{n-2} p^p \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1) + o(1) = 1 + o(1)$.

$$\boxed{\sum_{p=1}^n p^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n.}$$

Exercice n° 22

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, $\frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right)$. Donc pour $N > p$,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq N, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} &= \frac{1}{2p} \sum_{1 \leq n \leq N, n \neq p} \left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right) = \frac{1}{2p} \left(\sum_{1-p \leq k \leq N-p, k \neq 0} \frac{1}{k} - \sum_{p+1 \leq k \leq N+p, k \neq 2p} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2p} \left(-\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+p} \frac{1}{k} + \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2p} \left(\frac{3}{2p} - \sum_{k=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

Maintenant, $\sum_{k=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{N-p+1} + \dots + \frac{1}{N+p}$ est une somme de $2p-1$ termes tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Puisque $2p-1$ est constant quand N varie, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} = 0$ et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \times \frac{3}{2p} = \frac{3}{4p^2} \text{ puis } \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a aussi $\sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2} = -\sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{p^2 - n^2} = -\frac{3}{4n^2}$ et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2} \right) = -\frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit que la suite double $\left(\frac{1}{n^2 - p^2} \right)_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, n \neq p}$ n'est pas sommable.

Exercice n° 23

La suite $\left((-1)^n \frac{1}{3n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^n \frac{1}{3n+1}$, $n \geq 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{3k} dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^3)^{n+1}}{1 - (-t^3)} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3} dt.$$

Mais $\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3} dt \leq \int_0^1 t^{3n+3} dt = \frac{1}{3n+4}$. On en déduit que $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3} dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt.$$

Calculons cette dernière intégrale.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^3+1} &= \frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2} \frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \left[\ln(t+1) - \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \sqrt{3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \right) = \frac{3 \ln 2 + \pi \sqrt{3}}{9}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{3 \ln 2 + \pi\sqrt{3}}{9}.$$

Exercice n° 24

Pour tout entier $n \geq 2$, on a $nv_n - (n-1)v_{n-1} = u_n$ ce qui reste vrai pour $n = 1$ si on pose de plus $v_0 = 0$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} v_n^2 - 2u_n v_n &= v_n^2 - 2(nv_n - (n-1)v_{n-1})v_n = -(2n-1)v_n^2 + 2(n-1)v_{n-1}v_n \\ &\leq -(2n-1)v_n^2 + (n-1)(v_{n-1}^2 + v_n^2) = (n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2. \end{aligned}$$

Mais alors, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N (v_n^2 - 2u_n v_n) \leq \sum_{n=1}^N ((n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2) = -nv_N^2 \leq 0.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leq \sum_{n=1}^N 2u_n v_n \leq 2 \left(\sum_{n=1}^N u_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2} \quad (\text{inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}).$$

Si $\left(\sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2} > 0$, on obtient après simplification par $\left(\sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2}$ puis élévation au carré

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^N u_n^2,$$

cette inégalité restant claire si $\left(\sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2} = 0$. Finalement,

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^N u_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $v_n^2 (\geq 0)$ est majorée. Donc la série de terme général v_n^2 converge et de plus, quand N tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

Exercice n° 25

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Par suite, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^N \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt = \int_0^1 (-t^2) \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2} dt = - \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt.$$

Or $\left| (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt \leq \int_0^1 t^{2N+2} dt = \frac{1}{2N+3}$. Comme $\frac{1}{2N+3}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même de $(-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt$. On en déduit que la série de terme général u_n , $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= - \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} \times \frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.}$$