

Fractions rationnelles : décomposition en éléments simples

Soit $F = \frac{P}{Q}$, P et Q polynômes tous deux non nuls.

1ère étape de la décomposition.

S'assurer que F est sous forme irréductible et pour cela déterminer d'abord la décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles.

Définition. Un polynôme P non constant à coefficient dans \mathbb{K} est dit irréductible sur \mathbb{K} si et seulement s'il n'existe pas deux polynômes P_1 et P_2 tels que $P = P_1 P_2$ et $\deg(P_1) < \deg(P)$ et $\deg(P_2) < \deg(P)$ (les constantes ne sont pas des polynômes irréductibles de même que 1 n'est pas un nombre premier).

Théorème. (Décomposition en produit de facteurs irréductibles).

Pour tout élément P de $\mathbb{K}[X]$ non constant, il existe une unique constante non nulle C , une unique famille (P_1, P_2, \dots, P_k) de polynômes unitaires (unique à l'ordre près des facteurs), irréductibles sur \mathbb{K} et deux à deux distincts et une unique

suite d'exposants tous non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tels que $P = C \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i}$.

Théorème de d'ALEMBERT-GAUSS. Les polynômes irréductibles sur \mathbb{C} sont les polynômes de degré 1 exactement.

Corollaire. Les polynômes réels irréductibles sur \mathbb{R} sont les polynômes de degré un et de degré deux à discriminant strictement négatif. (tout autre type de polynôme non constant se factorise de manière non triviale même s'il n'a pas de racine réelle. Par exemple, un polynôme de degré 4 se factorise nécessairement de manière non triviale).

Pour factoriser sur \mathbb{R} , on peut factoriser sur \mathbb{C} puis **regrouper les facteurs conjugués**, ce qui impose de trouver toutes les racines, mais **ce n'est pas l'unique méthode**.

Les exemples les plus fréquents :

(1) $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

(2) $X^2 + 1$ est irréductible sur \mathbb{R} . $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ sur \mathbb{C} .

(3) $X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

(4) $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ sur \mathbb{R} (à partir de $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$).

$X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$ sur \mathbb{C} . Les racines cubiques de 1 sont 1, j et j^2 et donc $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$.

Au passage, sur le nombre j , on doit savoir :

$$j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j} = e^{-2i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, j^3 = 1.$$

$1 + j + j^2 = 0$ et donc $1 + j^2 = -j$, $1 + j = -j^2$ et $j + j^2 = -1$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $j^{3n} = 1$, $j^{3n+1} = j$ et $j^{3n+2} = j^2$.

(5) $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$ sur \mathbb{R} (en remplaçant X par $-X$ ou en utilisant $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$)

$X^3 + 1 = (X + 1)(X + j)(X + j^2)$ sur \mathbb{C} (les racines de ce polynôme sont bien sûr les opposées des racines précédentes à savoir $-1 = e^{i\pi}$, $-j = e^{-i\pi/3}$ et $-j^2 = e^{i\pi/3}$) et donc $X^2 - X + 1 = (X + j)(X + j^2)$ sur \mathbb{C} .

(6) $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$ sur \mathbb{R} (à partir de $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$)

$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X + i)(X - i)$ sur \mathbb{C} (les racines 4ème de 1 sont 1, i , -1 et $-i$)

(7) $X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})$ sur \mathbb{C} (les racines 4ème de -1 peuvent être obtenues ainsi : $e^{i\pi/4}$ est évidemment l'une d'entre elles et d'autre part, par parité et réalité du polynôme $X^4 + 1$, on a aussi son conjugué $e^{-i\pi/4}$, son opposé $-e^{i\pi/4} = e^{-3i\pi/4}$ et l'opposé de son conjugué $-e^{-i\pi/4} = e^{3i\pi/4}$)

Sur \mathbb{R} , il faut factoriser directement (et non pas passer par \mathbb{C}) :

$$X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

(8) $X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - j)(X + j)(X - j^2)(X + j^2)$ sur \mathbb{C} .

Sur \mathbb{R} , directement : $X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)$.

(9) $X^6 + 1 = (X - e^{i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})(X - i)(X + i)(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{-5i\pi/6})$ sur \mathbb{C} .

Sur \mathbb{R} , directement :

$$\begin{aligned} X^6 + 1 &= (X^2)^3 + 1 = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) = (X^2 + 1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2) \\ &= (X^2 + 1)((X^2 + 1)2 - 3X^2) = (X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

Au passage $X^4 - X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

$$(10) \text{ Sur } \mathbb{C}, X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}).$$

Sur \mathbb{R} , il faut regrouper les conjugués en discutant suivant la parité de n :

- Si $n = 2p$ est pair, $X^{2p} - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{p-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{p} + 1 \right)$.
- Si $n = 2p + 1$ est impair, $X^{2p+1} - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^p \left(X^2 - 2X \cos \frac{2k\pi}{2p+1} + 1 \right)$.

2ème étape de la décomposition. Ecrire l'allure générale de la décomposition en éléments simples de F .

Théorème (hors programme). (décomposition en éléments simples sur un corps quelconque (et par exemple sur \mathbb{Q})).

Si $Q = \prod_{i=1}^k Q_i^{\alpha_i}$ où les Q_i sont unitaires, irréductibles et deux à deux distincts (et P et Q premiers entre eux) alors

$$F = E + \sum_{i=1}^k \mathcal{P}_i \text{ où } E \text{ est un polynôme appelé la partie entière de } F \text{ et } \mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j} \text{ avec } \deg(P_{i,j}) < \deg Q_i.$$

\mathcal{P}_i est la partie polaire relative au facteur $Q_i^{\alpha_i}$. De plus la décomposition est unique.

Théorème. (décomposition sur \mathbb{C}). La partie polaire relative au facteur $(X - a)^n$ est de la forme $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{(X - a)^i}$ (avec $\lambda_n \neq 0$) (éléments simples de 1ère espèce).

Théorème. (décomposition sur \mathbb{R}).

La partie polaire relative au facteur $(X - a)^n$ est de la forme $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{(X - a)^i}$ (avec $\lambda_n \neq 0$) (et les λ_i réels) (éléments simples de 1ère espèce).

La partie polaire relative au facteur $(X^2 + aX + b)^n$ avec $a^2 - 4b < 0$ s'écrit : $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i X + \mu_i}{(X^2 + aX + b)^i}$ (avec $(\lambda_n, \mu_n) \neq (0, 0)$) (éléments simples de 2ème espèce).

Utilisation de la parité et de la réalité.

$$\text{Sur } \mathbb{C}, F = \frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{d}{X + i}.$$

F est réelle donc $F = \bar{F}$ ce qui s'écrit

$$\frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{d}{X + i} = \frac{\bar{a}}{X - 1} + \frac{\bar{b}}{X + 1} + \frac{\bar{c}}{X + i} + \frac{\bar{d}}{X - i}$$

(\bar{F} est la fraction rationnelle dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de F (on ne conjugue pas X)) et par unicité de la décomposition en éléments simples : $\bar{a} = a$ (c'est-à-dire a est réel) $\bar{b} = b$, $d = \bar{c}$. En pratique, si F est réelle, on ne détaille pas ce qui précède et on écrit directement un élément simple suivi de son conjugué :

$$F = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{\bar{c}}{X + i}, \text{ } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

F est paire donc $F(X) = F(-X)$ ce qui s'écrit

$$\frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{\bar{c}}{X + i} = -\frac{a}{X + 1} - \frac{b}{X - 1} - \frac{c}{X + i} - \frac{\bar{c}}{X - i}.$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples : $b = -a$ et $\bar{c} = -c$. Finalement, $F = \frac{a}{X - 1} - \frac{a}{X + 1} + \frac{c}{X - i} - \frac{c}{X + i}$ avec a réel et c imaginaire pur. En pratique quand F est paire (resp. impaire), chaque fois qu'on écrit un élément simple, on lui ajoute (retranche) l'élément simple obtenu en remplaçant X par $-X$:

$$F = \frac{a}{X - 1} + \frac{a}{-X - 1} \dots = \frac{a}{X - 1} - \frac{a}{X + 1} \dots$$

3ème étape de la décomposition. Déterminer la partie entière E . Son degré est $\deg P - \deg Q$ si $\deg P \geq \deg Q$ et $E = 0$ sinon. E est le quotient de la division euclidienne de P par Q .

$$\text{Par exemple, } \frac{X^7 - 1}{(X^2 - 1)(X^2 + 1)} = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{X - i} + \frac{\bar{d}}{X + i}.$$

$$\begin{array}{r|l} X^7 & -1 \\ - (X^7 - X^3) & \\ \hline X^3 & -1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X^4 - 1 \\ \hline X^3 \end{array} \right.$$

et donc $E = X^3$ ou bien directement « à la main »

$$\frac{X^7 - 1}{(X^2 - 1)(X^2 + 1)} = \frac{X^7 - X^3 + X^3 - 1}{X^4 - 1} = X^3 + \frac{X^3 - 1}{X^4 - 1}.$$

On peut obtenir le terme de plus degré grâce à un équivalent : $\frac{x^7 - 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$ et donc $a_3 = 1$.

4ème étape de la décomposition. Déterminer chaque partie polaire.

a) Partie polaire relative à un pôle simple. Si Q est factorisé, utiliser $\lambda = \lim_{x \rightarrow a} (x - a)F(x)$.

Exemple. $\frac{2X + 1}{X(X - 1)^3(X + 3)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X + 3} + \frac{c_1}{X - 1} + \frac{c_2}{(X - 1)^2} + \frac{c_3}{(X - 1)^3}$.

$a = \lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = \frac{2 \times 0 + 1}{(0 - 1)^3(0 + 3)} = -\frac{1}{3}$, $b = \lim_{x \rightarrow -3} (x + 3)F(x) = -\frac{5}{192}$ (et $c_3 = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^3 F(x) = \frac{3}{4}$)

Si Q est développé, utiliser plutôt $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Exemple. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} la fraction $F = \frac{1}{X^n - 1} = \frac{P}{Q}$.

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k} \text{ où } \omega_k = e^{2ik\pi/n}, \lambda_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n} \text{ et } \frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}.$$

b) Partie polaire relative à un pôle multiple. La méthode générale (division suivant les puissances croissantes) a été supprimée des programmes. Il ne reste donc que la « débrouille ».

Exemple. $\frac{2X + 1}{X(X - 1)^3(X + 3)} = -\frac{1}{3X} - \frac{5}{192(X + 3)} + \frac{c_1}{X - 1} + \frac{c_2}{(X - 1)^2} + \frac{c_3}{(X - 1)^3}$.

- $c_3 = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^3 F(x) = \frac{2 \times 1 + 1}{1 \times (1 + 3)} = \frac{3}{4}$.
- $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = -\frac{1}{3} - \frac{5}{192} + c_1$ et donc $c_1 = \frac{69}{192} = \frac{23}{64}$.
- $x = 2$ fournit $\frac{1}{2} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{192} + \frac{69}{192} + c_2 + \frac{3}{4}$ et donc $c_2 = -\frac{7}{16}$.

ou bien $\frac{2X + 1}{X(X - 1)^3(X + 3)} - \frac{3}{4(X - 1)^3} = \frac{4(2X + 1) - 3X(X + 3)}{4X(X - 1)^3(X + 3)} = \frac{-3X^2 - X + 4}{4X(X - 1)^3(X + 3)} = \frac{-3X - 4}{4X(X - 1)^2(X + 3)}$ puis

$$c_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\left(F(x) - \frac{3}{4(x - 1)^3} \right) (x - 1)^2 \right) = -\frac{7}{16}$$

c) Élément simple de 2ème espèce sur \mathbb{R} « à l'exposant 1 ».

On généralise l'idée pour un pôle simple :

Exemple 1. $\frac{X^2 - 7X + 1}{(X^2 + 1)(X - 1)^2} = \frac{aX + b}{X^2 + 1} + \frac{c}{X - 1} + \frac{d}{(X - 1)^2}$ avec a, b, c et d réels.

$aX + b = \lim_{x \rightarrow i} (x^2 + 1)F(x) = \frac{i^2 - 7i + 1}{(i - 1)^2} = \frac{7}{2}$ et puisque $(1, i)$ est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} : $b = \frac{7}{2}$ et $a = 0$.

Exemple 2. $\frac{X^3 - X}{X^4 + 1} = \frac{aX + b}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{aX - b}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$ (car la fraction est impaire).

1ère idée pour déterminer a et b. Soit $\omega = e^{i\pi/4}$ (ω est l'une des deux racines de $X^2 - \sqrt{2}X + 1$).

$a\omega + b = \lim_{x \rightarrow \omega} (x^2 - \sqrt{2}x + 1)F(x) = \frac{\omega^3 - \omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} = \frac{\omega^3 - \omega}{2\sqrt{2}\omega} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\omega^2 - 1) = \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}$ (car $\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1 = 0$)

Puisque $(1, \omega)$ est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} (car ω n'est pas réel), on obtient $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2ème idée pour déterminer a et b. On décompose sur \mathbb{C} puis on réduit au même dénominateur les fractions conjuguées.

$$\frac{X^3 - X}{X^4 + 1} = \frac{a}{X - e^{i\pi/4}} + \frac{\bar{a}}{X - e^{-i\pi/4}} + \frac{a}{X + e^{i\pi/4}} + \frac{\bar{a}}{X + e^{-i\pi/4}}.$$

$$a = \frac{\omega^3 - \omega}{4\omega^3} = \frac{1}{4}(1 + \omega^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\omega \quad (\text{car } \omega^4 = -1 \text{ et } \omega - \sqrt{2}\omega + 1 = 0).$$

$$\text{Ensuite, } \frac{a}{X - \omega} + \frac{\bar{a}}{X - \bar{\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\omega(X - \bar{\omega}) + \bar{\omega}(X - \omega)}{X^2 - (\omega + \bar{\omega})X + \omega\bar{\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}X - 2}{X^2 - \sqrt{2}X + 1}.$$