Fractions rationnelles : décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, P et Q polynômes tous deux non nuls.

1ère étape de la décomposition.
S'assurer que F est sous forme irréductible et pour cela déterminer d'abord la décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles.

Définition. Un polynôme P non constant à coefficient dans $\mathbb{K}$ est dit irréductible sur $\mathbb{K}$ si et seulement s'il n'existe pas deux polynômes P_1 et P_2 tels que $P = P_1P_2$ et $\deg(P_1) < \deg(P)$ et $\deg(P_2) < \deg(P)$ (les constantes ne sont pas des polynômes irréductibles de même que 1 n'est pas un nombre premier).

Théorème. (Décomposition en produit de facteurs irréductibles).
Pour tout élément P de $\mathbb{K}[X]$ non constant, il existe une unique constante non nulle C, une unique famille $(P_1, P_2, ..., P_k)$ de polynômes unitaires (unique à l'ordre près des facteurs), irréductibles sur $\mathbb{K}$ et deux à deux distincts et une unique suite d'exposants tous non nuls α_1, α_2, ... , α_k tels que $P = C\prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}$.

Théorème de d'ALEMBERT-GAUSS. Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont les polynômes de degré 1 exactement.

Corollaire. Les polynômes réels irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes de degré un et de degré deux à discriminant strictement négatif. (tout autre type de polynôme non constant se factorise de manière non triviale même s'il n'a pas de racine réelle. Par exemple, un polynôme de degré 4 se factorise nécessairement de manière non triviale).
Pour factoriser sur $\mathbb{R}$, on peut factoriser sur $\mathbb{C}$ puis **regrouper les facteurs conjugués**, ce qui impose de trouver toutes les racines, mais **ce n'est pas l'unique méthode**.

Les exemples les plus fréquents :

(1) $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(2) $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ sur $\mathbb{C}$.

(3) $X^2 + X - 1 = \left(X - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

(4) $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ sur $\mathbb{R}$ (à partir de $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$).
$X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ sur $\mathbb{C}$. Les racines cubiques de 1 sont 1, j et j^2 et donc $X^2+X+1 = (X-j)(X-j^2)$.
Au passage, sur le nombre j, on doit savoir :
$j = e^{2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = \dfrac{1}{j} = \bar{j} = e^{-2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $j^3 = 1$.
$1 + j + j^2 = 0$ et donc $1 + j^2 = -j$, $1 + j = -j^2$ et $j + j^2 = -1$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, $j^{3n} = 1$, $j^{3n+1} = j$ et $j^{3n+2} = j^2$.

(5) $X^3 + 1 = (X+1)(X^2-X+1)$ sur R (en remplaçant X par $-X$ ou en utilisant $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$)
$X^3 + 1 = (X+1)(X+j)(X+j^2)$ sur $\mathbb{C}$ (les racines de ce polynôme sont bien sûr les opposées des racines précédentes à savoir $-1 = e^{i\pi}$, $-j = e^{-i\pi/3}$ et $-j^2 = e^{i\pi/3}$) et donc $X^2 - X + 1 = (X+j)(X+j^2)$ sur $\mathbb{C}$.

(6) $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$ sur $\mathbb{R}$ (à partir de $X^4 - 1 = (X^2-1)(X^2+1)$)
$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X+i)(X-i)$ sur $\mathbb{C}$ (les racines 4ème de 1 sont 1, i, -1 et $-i$)

(7) $X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})$ sur $\mathbb{C}$ (les racines 4ème de -1 peuvent être obtenues ainsi : $e^{i\pi/4}$ est évidemment l'une d'entre elles et d'autre part, par parité et réalité du polynôme $X^4 + 1$, on a aussi son conjugué $e^{-i\pi/4}$, son opposé $-e^{i\pi/4} = e^{-3i\pi/4}$ et l'opposé de son conjugué $-e^{-i\pi/4} = e^{3i\pi/4}$)
Sur $\mathbb{R}$, il faut factoriser directement (et non pas passer par $\mathbb{C}$) :

$$X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1).$$

(8) $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X-j)(X+j)(X-j^2)(X+j^2)$ sur $\mathbb{C}$.
Sur $\mathbb{R}$, directement : $X^6 - 1 = (X^3-1)(X^3+1) = (X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)$.

(9) $X^6 + 1 = (X - e^{i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})(X-i)(X+i)(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{-5i\pi/6})$ sur $\mathbb{C}$.
Sur $\mathbb{R}$, directement :

$$\begin{aligned} X^6 + 1 &= (X^2)^3 + 1 = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1) = (X^2+1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2) \\ &= (X^2+1)((X^2+1)2 - 3X^2) = (X^2+1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X2 - \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

Au passage $X^4 - X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2 = (X^2+1)^2 - 3X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

(10) Sur $\mathbb{C}$, $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left((X - e^{2ik\pi/n}\right)$.

Sur $\mathbb{R}$, il faut regrouper les conjugués en discutant suivant la parité de n :

- Si $n = 2p$ est pair, $X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{p} + 1\right)$.
- Si $n = 2p+1$ est impair, $X^{2p+1} - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - 2X\cos\frac{2k\pi}{2p+1} + 1\right)$.

2ème étape de la décomposition. Ecrire l'allure générale de la décomposition en éléments simples de F.

Théorème (hors programme). (décomposition en éléments simples sur un corps quelconque (et par exemple sur $\mathbb{Q}$)). Si $Q = \prod_{i=1}^{k} Q_i^{\alpha_i}$ où les Q_i sont unitaires, irréductibles et deux à deux distincts (et P et Q premiers entre eux) alors $F = E + \sum_{i=1}^{k} \mathscr{P}_i$ où E est un polynôme appelé la partie entière de F et $\mathscr{P}_i = \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j}$ avec $\deg(P_{i,j}) < \deg Q_i$.
$\mathscr{P}_i$ est la partie polaire relative au facteur $Q_i^{\alpha_i}$. De plus la décomposition est unique.

Théorème. (décomposition sur $\mathbb{C}$). La partie polaire relative au facteur $(X-a)^n$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(X-a)^i}$ (avec $\lambda_n \neq 0$) (éléments simples de 1ère espèce).

Théorème. (décomposition sur $\mathbb{R}$).
La partie polaire relative au facteur $(X-a)^n$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(X-a)^i}$ (avec $\lambda_n \neq 0$) (et les λ_i réels) (éléments simples de 1ère espèce).
La partie polaire relative au facteur $(X^2 + aX + b)^n$ avec $a^2 - 4b < 0$ s'écrit : $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i X + \mu_i}{(X^2 + aX + b)^i}$ (avec $(\lambda_n, \mu_n) \neq (0, 0)$) (éléments simples de 2ème espèce).

Utilisation de la parité et de la réalité.
Sur $\mathbb{C}$, $F = \frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}$.
F est réelle donc $F = \overline{F}$ ce qui s'écrit

$$\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i} = \frac{\overline{a}}{X-1} + \frac{\overline{b}}{X+1} + \frac{\overline{c}}{X+i} + \frac{\overline{d}}{X-i}$$

($\overline{F}$ est la fraction rationnelle dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de F (on ne conjugue pas X)) et par unicité de la décompostion en éléments simples : $\overline{a} = a$ (c'est-à-dire a est réel) $\overline{b} = b$, $d = \overline{c}$. En pratique, si F est réelle, on ne détaille pas ce qui précède et on écrit directement un élément simple suivi de son conjugué :
$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{\overline{c}}{X+i}$, a et b réels.
F est paire donc $F(X) = F(-X)$ ce qui s'écrit

$$\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{\overline{c}}{X+i} = -\frac{a}{X+1} - \frac{b}{X-1} - \frac{c}{X+i} - \frac{\overline{c}}{X-i}.$$

Par unicité de la décompostion en éléments simples : $b = -a$ et $\overline{c} = -c$. Finalement, $F = \frac{a}{X-1} - \frac{a}{X+1} + \frac{c}{X-i} - \frac{c}{X+i}$ avec a réel et c imaginaire pur. En pratique quand F est paire (resp. impaire), chaque fois qu'on écrit un élément simple, on lui ajoute (retranche) l'élément simple obtenu en remplaçant X par $-X$:
$F = \frac{a}{X-1} + \frac{a}{-X-1} \ldots = \frac{a}{X-1} - \frac{a}{X+1} \ldots$

3ème étape de la décomposition. Déterminer la partie entière E. Son degré est $\deg P - \deg Q$ si $\deg P \geqslant \deg Q$ et $E = 0$ sinon. E est le quotient de la division euclidienne de P par Q.

Par exemple, $\frac{X^7 - 1}{(X^2-1)(X^2+1)} = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{X-i} + \frac{\overline{d}}{X+i}$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
 & X^7 & -1 & X^4-1 \\
\hline
- & (X^7 \quad -X^3) & & X^3 \\
\cline{2-2}
 & X^3 & -1 &
\end{array}
$$

et donc $E = X^3$ ou bien directement « à la main »

$$\frac{X^7-1}{(X^2-1)(X^2+1)} = \frac{X^7-X^3+X^3-1}{X^4-1} = X^3 + \frac{X^3-1}{X^4-1}.$$

On peut obtenir le terme de plus degré grâce à un équivalent : $\dfrac{x^7-1}{(x^2-1)(x^2+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$ et donc $a_3 = 1$.

4ème étape de la décomposition. Déterminer chaque partie polaire.

a) Partie polaire relative à un pole simple. Si Q est factorisé , utiliser $\boxed{\lambda = \lim\limits_{x\to a}(x-a)F(x)}$.

Exemple. $\dfrac{2X+1}{X(X-1)^3(X+3)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+3} + \dfrac{c_1}{X-1} + \dfrac{c_2}{(X-1)^2} + \dfrac{c_3}{(X-1)^3}$.
$a = \lim\limits_{x\to 0} xF(x) = \dfrac{2\times 0+1}{(0-1)^3(0+3)} = -\dfrac{1}{3}$, $b = \lim\limits_{x\to -3}(x+3)F(x) = -\dfrac{5}{192}$ (et $c_3 = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^3F(x) = \dfrac{3}{4}$)

Si Q est développé, utiliser plutôt $\boxed{\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}}$.

Exemple. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction $F = \dfrac{1}{X^n-1} = \dfrac{P}{Q}$.

$$\frac{1}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k} \text{ où } \omega_k = e^{2ik\pi/n}.\ \lambda_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n} \text{ et } \frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}.$$

b) Partie polaire relative à un pôle multiple. La méthode générale (division suivant les puissances croissantes) a été supprimée des programmes. Il ne reste donc que la « débrouille ».

Exemple. $\dfrac{2X+1}{X(X-1)^3(X+3)} = -\dfrac{1}{3X} - \dfrac{5}{192(X+3)} + \dfrac{c_1}{X-1} + \dfrac{c_2}{(X-1)^2} + \dfrac{c_3}{(X-1)^3}$.

- $c_3 = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^3F(x) = \dfrac{2\times 1+1}{1\times(1+3)} = \dfrac{3}{4}$.
- $0 = \lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{192} + c_1$ et donc $c_1 = \dfrac{69}{192} = \dfrac{23}{64}$.
- $x = 2$ fournit $\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{192} + \dfrac{69}{192} + c_2 + \dfrac{3}{4}$ et donc $c_2 = -\dfrac{7}{16}$.

ou bien $\dfrac{2X+1}{X(X-1)^3(X+3)} - \dfrac{3}{4(X-1)^3} = \dfrac{4(2X+1)-3X(X+3)}{4X(X-1)^3(X+3)} = \dfrac{-3X^2-X+4}{4X(X-1)^3(X+3)} = \dfrac{-3X-4}{4X(X-1)^2(X+3)}$ puis

$$c_2 = \lim_{x\to 1}\left(\left(F(x) - \frac{3}{4(x-1)^3}\right)(x-1)^2\right) = -\frac{7}{16}$$

c) Elémént simple de 2ème espèce sur $\mathbb{R}$ « à l'exposant 1 ».
On généralise l'idée pour un pôle simple :

Exemple 1. $\dfrac{X^2-7X+1}{(X^2+1)(X-1)^2} = \dfrac{aX+b}{X^2+1} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{d}{(X-1)^2}$ avec a, b, c et d réels.
$ai + b = \lim\limits_{x\to i}(x^2+1)F(x) = \dfrac{i^2-7i+1}{(i-1)^2} = \dfrac{7}{2}$ et puisque $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$: $b = \dfrac{7}{2}$ et $a = 0$.
Exemple 2. $\dfrac{X^3-X}{X^4+1} = \dfrac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \dfrac{aX-b}{X^2+\sqrt{2}X+1}$ (car la fraction est impaire).
1ère idée pour déterminer a et b. Soit $\omega = e^{i\pi/4}$ (ω est l'une des deux racines de $X^2-\sqrt{2}X+1$).
$a\omega + b = \lim\limits_{x\to\omega}(x^2-\sqrt{2}x+1)F(x) = \dfrac{\omega^3-\omega}{\omega^2+\sqrt{2}\omega+1} = \dfrac{\omega^3-\omega}{2\sqrt{2}\omega} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\omega^2-1) = \dfrac{1}{2}\omega - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (car $\omega^2-\sqrt{2}\omega+1=0$)
Puisque $(1,\omega)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ (car ω n'est pas réel), on obtient $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2ème idée pour déterminer a et b. On décompose sur $\mathbb{C}$ puis on réduit au même dénominateur les fractions conjuguées.
$\dfrac{X^3-X}{X^4+1} = \dfrac{a}{X-e^{i\pi/4}} + \dfrac{\overline{a}}{X-e^{-i\pi/4}} + \dfrac{a}{X+e^{i\pi/4}} + \dfrac{\overline{a}}{X+e^{-i\pi/4}}$.
$a = \dfrac{\omega^3-\omega}{4\omega^3} = \dfrac{1}{4}(1+\omega^2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\omega$ (car $\omega^4=-1$ et $\omega-\sqrt{2}\omega+1=0$).
Ensuite, $\dfrac{a}{X-\omega} + \dfrac{\overline{a}}{X-\overline{\omega}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{\omega(X-\overline{\omega})+\overline{\omega}(X-\omega)}{X^2-(\omega+\overline{\omega})X+\omega\overline{\omega}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1}$.