# Planche n° 5. Convexité

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

**Exercice n° 1 (**) :**

Soit $\mathscr{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$ (on utilisera la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$).

**Exercice n° 2 (*I) :**

Soient $E$ un espace vectoriel puis $N$ une norme sur $E$. Montrer que $B = \{x \in E / \ N(x) \leqslant 1\}$ est un convexe de $E$.

**Exercice n° 3 (**I) :** (Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique)

**1)** Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ (moyenne harmonique). Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

**2)** Plus généralement, démontrer que pour tout $n \geqslant 2$ puis tous réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

en utilisant la convexité d'une certaine fonction.

**Exercice n° 4 (**** I) :** (Inégalités de Hölder et de Minkowski et « norme $\alpha$ ».)

**1)** Soit $(p,q) \in ]0,+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

**a)** Montrer que pour $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ (on utilisera la concavité d'une certaine fonction).

**b)** En déduire que $\forall((a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$.

**c)** En déduire que $\forall((a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$.

**2) a)** Montrer que $\forall \alpha \geqslant 1$, $N_\alpha$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

**b)** Dessiner les « boules unités » de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $\alpha \in \left\{\dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{3}{2}, 2, +\infty\right\}$.

**c)** Montrer que, pour $x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ fixé, $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} N_\alpha(x) = \text{Max}\{|x_k|, \ 1 \leqslant k \leqslant n\} = N_\infty(x)$.

**d)** Montrer que si $0 < \alpha < 1$, $N_\alpha$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ (si $n \geqslant 2$).

**Exercice n° 5 (***) :**

**1)** $O_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**2)** Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$) est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**3)** L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**Exercice n° 6 (**) :**

Démontrer que

**1)** Pour tout réel $x$, $e^x \geqslant 1 + x$ et même pour tout réel non nul $x$, $e^x > 1 + x$.

**2)** Pour tout réel $x$ de $]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

**3)** Pour tout $x$ de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.