Planche n° 3. Déterminants

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**) :

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice n° 2 (*I) :**

On définit par blocs une matrice A par $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, B et C sont des matrices carrées de formats respectifs n, p et q avec $p + q = n$. Montrer que $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$.

Exercice n° 3 (*I) : (Déterminants de Vandermonde).**

Soient x_0,..., x_{n-1} n nombres complexes. Calculer $\text{Van}(x_0, ..., x_{n-1}) = \det(x_{j-1}^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice n° 4 (**I) : (Déterminant de Cauchy).**

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n $2n$ nombres complexes tels que toutes les sommes $a_i + b_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, soient non nulles. Calculer $C_n = \det \left(\dfrac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Cas particulier : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = b_i = i$ (déterminant de Hilbert).

Exercice n° 5 (**) :

Résoudre le système $MX = U$ où $M = (j^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $U = (\delta_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et X est un vecteur colonne inconnu.

Exercice n° 6 (**) :

Calculer $\det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où a_1,..., a_n sont n réels donnés ($n \geqslant 2$).

Exercice n° 7 (**) :

Calculer $\det(a_i + b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où a_1,..., a_n, $b_1, \ldots, b_n$ sont $2n$ complexes donnés.

Exercice n° 8 (**) :

Calculer $\det((a + i + j)^2)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où a est un complexe donné.

Exercice n° 9 (****) :

Soient x_1,..., x_n n entiers naturels tels que $x_1 < ... < x_n$. A l'aide du calcul de $\det(C_{x_j}^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, montrer que $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{x_j - x_i}{j - i}$ est un entier naturel.

Exercice n° 10 (****) : (Déterminants circulants).

Soient a_0,...,a_{n-1} n nombres complexes. Calculer $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \det A$. Pour cela, on calculera d'abord $A\Omega$ où $\Omega = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Exercice n° 11 (I) :**

1) Soient $a_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, n^2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $d = \det(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Montrer que d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer d'.

2) Application : calculer $d_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$.

Exercice n° 12 (***) :

Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n. Montrer que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ de format $2n$ est un réel positif.

Exercice n° 13 (***) :

Soient A, B, C et D quatre matrices carrées de format n. Montrer que si C et D commutent et si D est inversible alors $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$. Montrer que le résultat persiste si D n'est pas inversible.

Exercice n° 14 (***) :

Soit A une matrice carrée complexe de format n ($n \geqslant 2$) telle que pour tout élément M de $M_n(\mathbb{C})$, on ait $\det(A + M) = \det A + \det M$. Montrer que $A = 0$.

Exercice n° 15 (I) : (polynôme caractéristique d'une matrice compagnon)**

Soient a_0, ... , a_{n-1} n nombres complexes et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer $\det(xI_n - A)$.

Exercice n° 16 (**) :

Calculer les déterminants suivants :

1) $\det A$ où $A \in M_{2n}(\mathbb{K})$ est telle que $a_{i,i} = a$ et $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} 1 & \dots & & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$

4) (I) $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$.