Planche n° 2. Algèbre linéaire II

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (***) :

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme g de E tel que $f = g \circ p$.

Exercice n° 2 (I) :**

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent.

Exercice n° 3 (***) :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient f et g deux projecteurs distincts et non nuls de E tels qu'il existe deux complexes a et b tels que :

$$fg - gf = af + bg.$$

1) Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ on a : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$. En déduire que $gf = f$ puis que $a + b = 0$ puis que $a = -1$.
2) Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, on a $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$. Que peut-on en déduire ?
3) Montrer que si f et g sont deux projecteurs qui ne commutent pas et vérifient de plus $fg - gf = af + bg$ alors (a, b) est élément de $\{(-1, 1), (1, -1)\}$. Caractériser alors chacun de ces cas.

Exercice n° 4 (***) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.
1) Montrer que $[(\forall g \in \mathscr{L}(F, E),\ f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0) \Rightarrow f \text{ bijective}]$.
2) On pose $\dim E = p$, $\dim F = n$ et $\text{rg} f = r$. Calculer la dimension de $\{g \in \mathscr{L}(F, E) / \ f \circ g \circ f = 0\}$.

Exercice n° 5 (I) :**

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. u est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ u(P) = P(X + 1) - P$.
1) Déterminer $\text{Ker} u$ et $\text{Im} u$.
2) Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 6 (***) :

Rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) \\ \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) & \cos(6a) \end{pmatrix}$.

Exercice n° 7 (***) :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = j$, j si $i = j - 1$ et 0 sinon. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice n° 8 (***) :

Soient n un entier naturel non nul puis $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice X associe $AX + XA$. Calculer $\text{Tr}(f)$.

Exercice n° 9 (**) :

Soient a un réel non nul et A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M : $aM + \text{Tr}(M)A = B$.

Exercice n° 10 (**) :

Rang de la matrice $(i + j + ij)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice n° 11 (**) :

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(x,y) = xI + yJ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.
2) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
3) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(E,+,\times)$?
4) Résoudre dans E les équations : **a)** $X^2 = I$ **b)** $X^2 = 0$ **c)** $X^2 = X$.
5) Calculer $(M(x,y))^n$ pour n entier naturel et x et y réels.

Exercice n° 12 (***) :

On appelle idéal bilatère de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ tout sous-ensemble I de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

a) $(I,+)$ est un groupe et b) $\forall A \in I,\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AM \in I$ et $MA \in I$.

Déterminer tous les idéaux bilatères de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Exercice n° 13 (***) :

Soient a_1,..., a_n n réels tous non nuls et $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$.

Inverse de A en cas d'existence ?

Exercice n° 14 (**) :

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices carrées de format n telles que $a_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r-1$ et $b_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+s-1$ où r et s sont deux entiers donnés entre 1 et n. Montrer que si $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ alors $c_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r+s-1$.

Exercice n° 15 (I) :**

Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

Exercice n° 16 (*I) :**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\omega = e^{2i\pi/n}$.
Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice n° 17 (I) :**

Soit A une matrice carrée de format n. Calculer le déterminant de sa comatrice.

Exercice n° 18 (*I) :**

Soit A une matrice carrée de format n. Etudier le rang de com$A$ en fonction du rang de A.

Exercice n° 19 (***) :

Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M = \text{com}M$ $(n \geqslant 2)$.

Exercice n° 20 (*I) : (Théorème de HADAMARD.)**

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. (Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.)

Exercice n° 21 (*I) :

Existe-t-il deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice n° 22 (I) :**

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe a tel que $f = a\mathrm{Tr}$.

Exercice n° 23 (***) :

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$ (a réel donné). Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$.

Exercice n° 24 (**) :

Soient A une matrice carrée de format n et f l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à une matrice M associe MA. Trouver la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (ordonnée par l'ordre lexicographique).

Exercice n° 25 (***) :

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et B l'élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $B = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.

Exercice n° 26 (***) :

Soit H un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists \lambda_A \in \mathbb{C}/\ HAH = \lambda_A H$. Montrer que $\mathrm{rg}H \leqslant 1$.

Exercice n° 27 (***) :

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ M^2 = 0 \text{ et } (2)\ \mathrm{rg}M \leqslant 1 \text{ et } \mathrm{tr}M = 0.$$

Exercice n° 28 (*I) :**

Soient A et B deux matrices carrées de format n telles que $AB - BA = A$. Calculer la trace de A^{2016}.

Exercice n° 29 (**) :

Soient $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$. $M(a)$ et $N(a)$ sont-elles semblables ?

Exercice n° 30 (*I) :**

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice n° 31 (I) : (Exponentielle d'une matrice nilpotente)**

Pour A matrice nilpotente donnée, on pose $\exp A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1) Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $A+B$ est nilpotente et $\exp(A+B) = \exp A \times \exp B$.
2) Montrer que $\exp A$ est inversible.
3) Calculer $\exp A$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.