

# Planche n° 2. Algèbre linéaire II. Corrigé

## Exercice n° 1

Deux cas particuliers se traitent immédiatement.

Si  $f = 0$ , on prend  $p = 0$  et  $g = \text{Id}_E$  et si  $f \in \mathcal{GL}(E)$ , on prend  $p = \text{Id}_E$  et  $g = f$ .

On se place dorénavant dans le cas où  $\text{Ker}f$  et  $\text{Im}f$  ne sont pas réduits à 0.

Soit  $F$  un supplémentaire de  $\text{Ker}f$  dans  $E$  et  $G$  un supplémentaire de  $\text{Im}f$  dans  $E$ .

On sait que la restriction  $f'$  de  $f$  à  $F$  réalise un isomorphisme de  $F$  sur  $\text{Im}f$ . D'autre part  $\dim \text{Ker}f = \dim G < +\infty$  et donc  $\text{Ker}f$  et  $G$  sont isomorphes. Soit  $\varphi$  un isomorphisme de  $\text{Ker}f$  sur  $G$ .

On définit une unique application linéaire  $g$  en posant  $g|_{\text{Ker}f} = \varphi$  et  $g|_F = f'$ .

$g$  est un automorphisme de  $E$ . En effet,

$$g(E) = g(\text{Ker}f + F) = g(\text{Ker}f) + g(F) = \varphi(\text{Ker}f) + f'(F) = G + \text{Im}f = E,$$

(puisque  $\varphi$  et  $f'$  sont des isomorphismes) et donc  $g$  est surjective. Par suite  $g$  est bijective de  $E$  sur lui-même puisque  $\dim E < +\infty$ .

Soit  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $\text{Ker}f$ . On a

$$(g \circ p)|_{\text{Ker}f} = g \circ 0|_{\text{Ker}f} = 0|_{\text{Ker}f} = f|_{\text{Ker}f} \text{ et } (g \circ p)|_F = g \circ \text{Id}_F = f' = f|_F.$$

Ainsi les endomorphismes  $g \circ p$  et  $f$  coïncident sur deux sous espaces supplémentaires de  $E$  et donc  $g \circ p = f$ . Finalement, si on note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des projecteurs de  $E$ ,

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \exists g \in \mathcal{GL}(E), \exists p \in \mathcal{P}(E) / f = g \circ p.$$

## Exercice n° 2

(Ne pas confondre :  $(\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^* / f^p(x) = 0)$  et  $(\exists p \in \mathbb{N}^* / \forall x \in E, f^p(x) = 0)$ . Dans le deuxième cas,  $p$  est indépendant de  $x$  alors que dans le premier cas,  $p$  peut varier quand  $x$  varie).

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$ . Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe un entier non nul  $p_i$  tel que  $f^{p_i}(e_i) = 0$ . Soit  $p = \text{Max}\{p_1, \dots, p_n\}$ .  $p$  est un entier naturel non nul et pour  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$f^p(e_i) = f^{p-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{p-p_i}(0) = 0.$$

Ainsi l'endomorphisme  $f^p$  s'annule sur une base de  $E$  et donc  $f^p = 0$ .

On a donc trouvé un entier non nul  $p$  tel que  $f^p = 0$  et par suite  $f$  est nilpotent.

## Exercice n° 3

1) A partir de  $fg - gf = af + bg$  (1), on obtient après composition à droite par  $g$ ,  $fg - gfg = afg + bg$  ou encore  $fg = g \circ \frac{1}{1-a}(fg + b\text{Id})$  (puisque  $1-a \neq 0$ ). On en déduit

$$\text{Im}(fg) \subset \text{Im}g.$$

Mais alors en écrivant (1) sous la forme  $f = \frac{1}{a}(fg - gf - bg)$  (puisque  $a$  n'est pas nul), on obtient

$$\text{Im}f \subset \text{Im}g.$$

L'égalité  $\text{Im}f \subset \text{Im}g$  montre que tout vecteur de  $\text{Im}f$  est invariant par  $g$  et fournit donc l'égalité  $gf = f$ . On compose alors (1) à droite par  $f$  et en tenant compte de  $gf = f$  et de  $f^2 = f$ , on obtient  $f - f = af + bf$  et donc  $(a+b)f = 0$  puis  $b = -a$  puisque  $f$  n'est pas nul.

(1) s'écrit alors  $fg - f = a(f - g)$ . En composant à droite par  $g$ , on obtient :  $a(fg - g) = 0$  et donc  $fg = g$  puisque  $a$  n'est pas nul. (1) s'écrit maintenant  $g - f = a(f - g)$  ou encore  $(a+1)(g - f) = 0$  et donc, puisque  $f$  et  $g$  sont distincts,  $a = -1$ .

2) (D'après 1), si  $a$  est distinct de 0 et de 1, nécessairement  $a = -1$  et (1) s'écrit  $fg - gf = -f + bg$ .

Soit  $x$  un élément de  $\text{Ker}g$ . (1) fournit  $-g(f(x)) = af(x)$  (\*) puis en prenant l'image par  $g$ ,  $(a+1)g(f(x)) = 0$ . Puisque  $a$  est distinct de  $-1$ , on obtient  $g(f(x)) = 0$  et (\*) fournit  $af(x) = 0$  puis  $f(x) = 0$ . Donc  $x$  est élément de  $\text{Ker}f$ . On a montré que  $\text{Ker}g \subset \text{Ker}f$ .

On en déduit  $\text{Im}(g - \text{Id}) \subset \text{Ker}f$  et donc  $f(g - \text{Id}) = 0$  ou encore  $fg = f$ . (1) s'écrit  $f - gf = af + bg$  et en composant à gauche par  $f$ , on obtient  $f - fgf = af + bfg$ . En tenant compte de  $fg = f$ , on obtient  $(a+b)f = 0$  et donc  $b = -a$ .

(1) s'écrit alors  $f - gf = a(f - g)$  et en composant à gauche par  $g$ , on obtient  $0 = a(gf - g)$  et donc  $gf = g$ . (1) s'écrit enfin  $f - g = a(f - g)$  et donc  $a = 1$ .

3) Si  $a = 0$ , (1) s'écrit  $fg - gf = bg$ . En composant à gauche ou à droite par  $g$ , on obtient  $gfg - gf = bg$  et  $fg - gfg = bg$ . En additionnant ces deux égalités, on obtient  $fg - gf = 2bg$ . D'où, en tenant compte de (1),  $bg = 2bg$  et puisque  $g$  n'est pas nul,  $b = 0$ . Par suite  $fg - gf = 0$  ce qui est exclu par l'énoncé. Donc, on ne peut avoir  $a = 0$ . D'après 1) et 2),  $(a, b) \in \{(-1, 1), (1, -1)\}$ .

**1er cas.**  $(a, b) = (-1, 1)$ . C'est le 1) :  $fg - gf = -f + g$ . On a vu successivement que  $gf = f$  puis que  $fg = g$  fournissant  $(g - \text{Id})f = 0$  et  $(f - \text{Id})g = 0$  ou encore  $\text{Im}f \subset \text{Ker}(g - \text{Id}) = \text{Im}g$  et  $\text{Im}g \subset \text{Im}f$  et donc  $\text{Im}f = \text{Im}g$ . Réciproquement, si  $f$  et  $g$  sont deux projecteurs de même image alors  $gf = f$ ,  $fg = g$  et donc  $fg - gf = -f + g$ . Le premier cas est donc le cas de deux projecteurs de même image .

**2ème cas.**  $(a, b) = (1, -1)$ . C'est le cas de deux projecteurs de même noyau.

#### Exercice n° 4

1) Si  $N = \text{Ker}f \neq \{0\}$ , considérons  $g$  non nul tel que  $\text{Im}g \neq \{0\}$  et  $\text{Im}g \subset \text{Ker}f$ .

Pour un tel  $g$ ,  $f \circ g = 0$  puis  $f \circ g \circ f = 0$  et donc  $g = 0$  par hypothèse, contredisant  $g$  non nulle. Donc  $\text{Ker}f = \{0\}$ .

Si  $\text{Im}f \neq F$ , on choisit  $g$  nulle sur  $\text{Im}f$  et non nulle sur un supplémentaire de  $\text{Im}f$  (dont l'existence est admise en dimension infinie). Alors,  $g \circ f = 0$  puis  $f \circ g \circ f = 0$  et donc  $g = 0$  contredisant  $g$  non nulle. Donc  $\text{Im}f = F$ .

Finalement,  $f$  est bien un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

2) Soit  $A = \{g \in \mathcal{L}(F, E) / f \circ g \circ f = 0\}$ . Tout d'abord  $A$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(F, E)$  car contient l'application nulle et est stable par combinaison linéaire (ou bien  $A$  est le noyau de l'application linéaire de  $\mathcal{L}(F, E)$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  qui à  $g$  associe  $f \circ g \circ f$ ).

Soit  $J$  un supplémentaire de  $I = \text{Im}f$  dans  $F$ . Un élément  $g$  de  $\mathcal{L}(F, E)$  est entièrement déterminé par ses restrictions à  $I$  et  $J$ .

$$f \circ g \circ f = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)|_I = 0 \text{ et } g|_J \text{ est quelconque} \Leftrightarrow g(I) \subset N.$$

Pour être le plus méticuleux possible, on peut alors considérer l'application  $G$  de  $\mathcal{L}(I, N) \times \mathcal{L}(J, E)$  dans  $\mathcal{L}(F, E)$  qui à un couple  $(g_1, g_2)$  associe l'unique application linéaire  $g$  de  $F$  dans  $E$  telle que  $g|_I = g_1$  et  $g|_J = g_2$ .  $G$  est linéaire et injective d'image  $A$ . Donc

$$\dim A = \dim (\mathcal{L}(I, N) \times \mathcal{L}(J, E)) = \dim \mathcal{L}(I, N) + \dim \mathcal{L}(J, E) = r(p - r) + (n - r)p = pn - r^2.$$

#### Exercice n° 5

1)  $u$  est dans  $L(E)$  car  $u$  est linéaire et si  $P$  est un polynôme de degré au plus  $n$  alors  $u(P)$  est un polynôme de degré au plus  $n$ .

• Les polynômes constants sont dans  $\text{Ker}u$ . Réciproquement, soit  $P$  un élément de  $\text{Ker}u$  puis  $Q = P - P(0)$ .

Par hypothèse,  $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$  et donc  $0, 1, 2, \dots$  sont des racines de  $Q$ . Puisque le polynôme  $Q$  admet une infinité de racines,  $Q$  est nul et donc  $P = P(0)$  et  $P \in \mathbb{K}_0[X]$ . Ainsi,  $\text{Ker}u = \mathbb{K}_0[X]$ .

• Mais alors, d'après le théorème du rang,  $\text{rg}u = (n + 1) - 1 = n$ . D'autre part, si  $P$  est dans  $\mathbb{K}_n[X]$ ,  $P(X + 1) - P$  est dans  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  (si on pose  $P = a_n X^n + \dots$ , le coefficient de  $X^n$  dans  $u(P)$  est  $a_n - a_n = 0$ ).

En résumé,  $\text{Im}u \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$  et  $\dim \text{Im}u = \dim \mathbb{K}_{n-1}[X] < +\infty$  et donc  $\text{Im}u = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

$$\text{Ker}u = \mathbb{K}_0[X] \text{ et } \text{Im}u = \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

2) On part de  $P_0 = 1$  et aussi de  $P_1 = X$  qui vérifient bien  $u(P_0) = 0$  et  $u(P_1) = P_0$ .

Trouvons  $P_2 = aX^2 + bX$  tel que  $u(P_2) = P_1$  (il est clair que si  $\deg(P) \geq 1$ ,  $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$  et d'autre part, les constantes sont inutiles car  $\text{Ker}u = \mathbb{K}_0[X]$ ).

$$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X + 1)^2 + b(X + 1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a - 1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -a.$$

On prend  $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{1}{2}X(X - 1)$ .

Trouvons  $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$  tel que  $u(P_3) = P_2$ .

$$\begin{aligned} u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X + 1)^3 + b(X + 1)^2 + c(X + 1) - aX^3 - bX^2 - cX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &\Leftrightarrow \left(3a - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \frac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On prend  $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$ .

Essayons, pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $P_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$ . Pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} u(P_{k+1}) &= \frac{1}{(k+1)!} \prod_{i=0}^k (X+1-i) - \frac{1}{(k+1)!} \prod_{i=0}^k (X-i) = \frac{1}{(k+1)!} ((X+1) - (X-k)) \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) = P_k. \end{aligned}$$

Enfin, les  $P_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , constituent une famille de  $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$  polynômes de degrés échelonnés de  $\mathbb{K}_n[X]$  et donc la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Dans cette base, la matrice de  $u$  a la forme désirée.

### Exercice n° 6

(C'est en fait un exercice sur les polynômes de Tchebychev de 1ère espèce et vous pouvez généraliser cet exercice en passant au format  $n$  au lieu du format 4.)

Si on note  $C_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , la  $j$ -ème colonne de  $A$  alors  $C_j = (\cos(i+j-2)\alpha)_{1 \leq i \leq 4}$  puis pour  $j$  élément de  $\{1, 2\}$ ,

$$C_{j+2} + C_j = (2 \cos(i+j-1)\alpha \cos \alpha)_{1 \leq i \leq 4} = 2 \cos \alpha C_{j+1}$$

et donc  $C_3 = 2 \cos \alpha C_2 - C_1 \in \text{Vect}(C_1, C_2)$  et  $C_4 = 2 \cos \alpha C_3 - C_2 \in \text{Vect}(C_2, C_3) \subset \text{Vect}(C_1, C_2)$ .

Donc  $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1, C_2)$  et  $\text{rg} A = \text{rg}(C_1, C_2) \leq 2$ .

Enfin  $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \cos(2\alpha) \end{vmatrix} = \cos(2\alpha) - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$ .

• Si  $\alpha$  n'est pas dans  $\pi\mathbb{Z}$ , ce déterminant n'est pas nul et donc les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Dans ce cas,  $\text{rg} A = 2$ .

• Si  $\alpha$  est dans  $\pi\mathbb{Z}$ , la première colonne n'est pas nulle et les autres colonnes lui sont colinéaires. Dans ce cas,  $\text{rg} A = 1$ .

$$\text{rg}(A) = 2 \text{ si } \alpha \notin \pi\mathbb{Z} \text{ et } \text{rg}(A) = 1 \text{ si } \alpha \in \pi\mathbb{Z}.$$

### Exercice n° 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \end{pmatrix} = I + N \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

$N$  est nilpotente et donc  $N^n = 0$ . Par suite,

$$I = I - (-N)^n = (I + N)(I - N + \dots + (-N)^{n-1}).$$

Ainsi  $A$  est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse  $I - N + \dots + (-N)^{n-1}$ .

Calcul de  $N^p$  pour  $1 \leq p \leq n$ .

$$N^2 = \left( \sum_{j=2}^n j E_{j-1,j} \right)^2 = \sum_{2 \leq j,k \leq n} jk E_{j-1,j} E_{k-1,k} = \sum_{j=2}^{n-1} j(j+1) E_{j-1,j} E_{j,j+1} = \sum_{j=3}^n j(j-1) j E_{j-2,j}.$$

$$\text{c'est-à-dire } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \times 3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 \times 4 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & (n-1)n \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ensuite, } N^3 = \left( \sum_{j=3}^n (j-1)jE_{j-2,j} \right) \left( \sum_{k=2}^n kE_{k-1,k} \right) = \sum_{j=4}^n j(j-1)(j-2)E_{j-3,j}.$$

$$\text{Supposons que pour } p \text{ donné dans } \llbracket 1, n-1 \rrbracket, N^p = \sum_{j=p+1}^n j(j-1)\dots(j-p+1)E_{j-p,j}.$$

$$\text{Alors } N^{p+1} = \left( \sum_{j=p+1}^n j(j-1)\dots(j-p+1)E_{j-p,j} \right) \left( \sum_{k=2}^n kE_{k-1,k} \right) = \sum_{j=p+2}^n j(j-1)\dots(j-p)E_{j-p-1,j}. \text{ Ainsi}$$

$$A^{-1} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ où } a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j, 1 \text{ si } i = j \text{ et } (-1)^{i+j-2} \prod_{k=0}^{j-i-1} (j-k) \text{ sinon.}$$

### Exercice n° 8

On note  $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$\text{Tr}f = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j}$  où  $\alpha_{i,j}$  désigne la  $(i,j)$ -ème coordonnée de  $f(E_{i,j}) = AE_{i,j} + E_{i,j}A$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Mais pour  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  donné,

$$AE_{i,j} = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$$

et de même,

$$E_{i,j}A = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} = \sum_{l=1}^n a_{j,l} E_{i,l}.$$

Donc  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \alpha_{i,j} = a_{i,i} + a_{j,j}$  puis

$$\text{Tr}f = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,i} + a_{j,j}) = 2 \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,i} = 2 \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{i,i} \right) = 2 \sum_{j=1}^n \text{Tr}A = 2n \text{Tr}A.$$

$$\text{Tr}f = 2n \text{Tr}A.$$

### Exercice n° 9

Si  $M$  est solution, nécessairement  $a \text{Tr}M + (\text{Tr}M)(\text{Tr}A) = \text{Tr}B$  ou encore  $(\text{Tr}M)(a + \text{Tr}A) = \text{Tr}B$ .

**1er cas.** Si  $\text{Tr}A \neq -a$  alors nécessairement  $\text{Tr}M = \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A}$  puis  $M = \frac{1}{a} \left( B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} A \right)$ .

Réciproquement, si  $M = \frac{1}{a} \left( B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} A \right)$  alors

$$aM + (\text{Tr}M)A = B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} A + \frac{1}{a} \left( \text{Tr}B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} \text{Tr}A \right) A = B.$$

$$\text{Si } \text{Tr}A \neq -a, \mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{a} \left( B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} A \right) \right\}.$$

**2ème cas.** Si  $\text{Tr}A = -a$  et  $\text{Tr}B \neq 0$ , il n'y a pas de solution.

**3ème cas.** Si  $\text{Tr}A = -a$  et  $\text{Tr}B = 0$ ,  $M$  est nécessairement de la forme  $\frac{1}{a}B + \lambda A$  où  $\lambda$  est un réel quelconque.

Réciproquement, soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  puis  $M = \frac{1}{a}B + \lambda A$ . Alors

$$aM + (\text{Tr}M)A = B + a\lambda A + \left( \frac{1}{a} \text{Tr}B + \lambda \text{Tr}A \right) A = B + a\lambda A - a\lambda A = B,$$

et toute matrice de la forme  $B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}$ , est solution.

Si  $\text{Tr}A = -a$ ,  $\mathcal{S} = \emptyset$  si  $\text{Tr}B \neq 0$  et  $\mathcal{S} = \{B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}\}$  si  $\text{Tr}B = 0$ .

### Exercice n° 10

Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $C_j$  la  $j$ -ème colonne de la matrice  $A$ . Posons encore  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$ . Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$C_j = (i + j(i + 1))_{1 \leq i \leq n} = (i)_{1 \leq i \leq n} + j(i + 1)_{1 \leq i \leq n} = U + jV.$$

Donc  $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) \subset \text{Vect}(U, V)$  et en particulier,  $\text{rg}A \leq 2$ . Maintenant, si  $n \geq 2$ , les deux premières colonnes de  $A$  ne sont pas colinéaires car  $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ . Donc, si  $n \geq 2$ ,  $\text{rg}A = 2$  et si  $n = 1$ ,  $\text{rg}A = 1$ .

Si  $n \geq 2$ ,  $\text{rg}(i + j + ij)_{1 \leq i, j \leq n} = 2$  et si  $n = 1$ ,  $\text{rg}(i + j + ij)_{1 \leq i, j \leq n} = 1$ .

### Exercice n° 11

1)  $E = \text{Vect}(I, J)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de dimension inférieure ou égale à 2. De plus, la famille  $(I, J)$  est libre car la matrice  $J$  n'est pas une matrice scalaire et donc  $\dim E = 2$ .

2) Puisque  $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel,  $(E, +)$  est un groupe commutatif.

Ensuite,  $I^2 = I \in E$ ,  $IJ = JI = J \in E$  et  $J^2 = (I + E_{1,2})^2 = I + 2E_{1,2} = I + 2(J - I) - I = 2J - I \in E$ . Par bilinéarité du produit matriciel, la multiplication est interne dans  $E$  et commutative. De plus,  $I \in E$  et finalement  $E$  est un sous-anneau commutatif de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Remarque.**  $M(x, y)M(x', y') = xx'I + (xy' + yx')J + yy'(2J - I) = (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J$ .

3) Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} M(x, y) \text{ est inversible dans } E &\Leftrightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2; (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J = I \\ &\Leftrightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + (x + 2y)y' = 0 \end{cases} \quad (\text{car la famille } (I, J) \text{ est libre}) \quad (*). \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système d'inconnue  $(x', y')$  est  $x(x + 2y) + y^2 = (x + y)^2$ .

- Si  $x + y \neq 0$ , le système  $(*)$  admet une et une seule solution. Dans ce cas,  $M(x, y)$  est inversible dans  $E$ .
- Si  $x + y = 0$ , le système  $(*)$  s'écrit  $\begin{cases} x(x' + y') = 1 \\ -x(x' + y') = 0 \end{cases}$  et n'a pas de solution. Dans ce cas,  $M(x, y)$  n'est pas inversible dans  $E$ .

$M(x, y)$  est inversible dans  $E \Leftrightarrow x + y \neq 0$ .

**Remarque.** Puisque  $I \in E$ ,  $M(x, y)$  est inversible dans  $E$  si et seulement si  $M(x, y)$  est inversible dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

4) Posons  $X = xI + yJ$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

a) D'après 1),  $X^2 = (x^2 - y^2)I + (2xy + 2y^2)J$ . Donc

$$\begin{aligned} X^2 = I &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \quad (\text{car la famille } (I, J) \text{ est libre}) \\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 1) \text{ ou } (y = -x \text{ et } 0 = 1) \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x = 1) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } x = -1) \\ &\Leftrightarrow X = I \text{ ou } X = -I. \end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \{I, -I\}$ .

b)

$$X^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 0) \text{ ou } (y = -x \text{ et } 0 = 0) \Leftrightarrow y = -x.$$

$$\mathcal{S} = \{x(I - J), x \in \mathbb{R}\}.$$

**Remarque.** L'équation  $X^2 = 0$ , de degré 2, admet une infinité de solutions dans  $E$  ce qui montre une nouvelle fois que  $(E, +, \times)$  n'est pas un corps.

c)

$$\begin{aligned} X^2 = X &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x \text{ et } 2xy + 2y^2 = y \Leftrightarrow y(2x + 2y - 1) = 0 \text{ et } x^2 - y^2 = x \\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = x) \text{ ou } (2(x + y) = 1 \text{ et } (x + y)(x - y) = x) \Leftrightarrow (X = 0 \text{ ou } X = I) \text{ ou } (2(x + y) = 1 \text{ et } x - y = 2x) \\ &\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = I. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{0, I\}.$$

5) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $N = J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $M(x, y) = xI + y(I + N) = (x + y)I + yN$ .

Puisque  $I$  et  $N$  commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$\begin{aligned} (M(x, y))^n &= ((x + y)I + yN)^n = (x + y)^n I + ny(x + y)^{n-1} N \text{ (car } N^k = 0 \text{ pour } k \geq 2) \\ &= \begin{pmatrix} (x + y)^n & ny(x + y)^{n-1} \\ 0 & (x + y)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (M(x, y))^n = \begin{pmatrix} (x + y)^n & ny(x + y)^{n-1} \\ 0 & (x + y)^n \end{pmatrix}.$$

### Exercice n° 12

$\{0\}$  est un idéal bilatère de l'anneau  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ .

Soit  $I$  un idéal non nul de de l'anneau  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ . Montrons que  $I = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Il existe une matrice  $A$  non nulle dans  $I$ . Pour tout quadruplet d'indices  $(i, j, k, l)$ ,  $I$  contient le produit

$$E_{i,j} A E_{k,l} = \sum_{1 \leq u, v \leq n} a_{u,v} E_{i,j} E_{u,v} E_{k,l} = a_{j,k} E_{i,l}.$$

$A$  est non nulle et on peut choisir  $j$  et  $k$  tels que  $a_{j,k}$  soit non nul.  $I$  contient alors  $a_{j,k} E_{i,l} \frac{1}{a_{j,k}} I_n = E_{i,l}$ . Finalement  $I$  contient toutes les matrices élémentaires et donc encore toutes les sommes du type  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} I_n E_{i,j} = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tout entier.

Les idéaux bilatères de l'anneau  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$  sont  $\{0\}$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Exercice n° 13

On inverse  $A$  en l'interprétant comme une matrice de passage.

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $(e'_1, \dots, e'_n)$  la famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  de matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow (e'_1, \dots, e'_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_n) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i \in \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_n).$$

Dans ce cas,  $A^{-1}$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .

Soit  $u = e_1 + \dots + e_n$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e'_i = a_i e_i + u$  ce qui fournit  $e_i = \frac{1}{a_i} (e'_i - u)$ .

En additionnant membre à membre ces  $n$  égalités, on obtient  $u = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} e'_i - \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) u$  et donc  $\lambda u = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} e'_i$  où

$$\lambda = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

**1er cas.** Si  $\lambda \neq 0$ , on peut exprimer  $u$  en fonction des  $e'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et donc les  $e_i$  fonction des  $e'_i$ . Dans ce cas  $A$  est inversible. Plus précisément,  $u = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} e'_i$  puis,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_i = \frac{1}{a_i} \left( e'_i - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} e'_j \right)$  et enfin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} - \frac{1}{\lambda a_1^2} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_1} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_2} & \frac{1}{a_2} - \frac{1}{\lambda a_2^2} & & & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{\lambda a_2 a_3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{\lambda a_{n-1}^2} & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_n} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_n} & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\lambda a_n^2} \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

**2ème cas.** Si  $\lambda = 0$ , on a  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} e'_i = 0$  ce qui montre que la famille  $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$  est liée et donc que  $A$  n'est pas inversible.

#### Exercice n° 14

Par hypothèse,  $a_{i,j} = 0$  pour  $j \leq i + r - 1$  et  $b_{i,j} = 0$  pour  $j \leq i + s - 1$ .

Soient  $i$  et  $j$  deux indices tels que  $j \leq i + r + s - 1$ . Le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , de  $AB$  vaut  $\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ .

Dans cette somme, si  $k \leq i + r - 1$ ,  $a_{i,k} = 0$ . Sinon  $k \geq i + r$  et donc  $j \leq i + r + s - 1 \leq k + s - 1$  et dans ce cas  $b_{k,j} = 0$ . Finalement, le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , de  $AB$  est bien nul si  $j \leq i + r + s - 1$ .

#### Exercice n° 15

Notons  $A$  la matrice de l'énoncé. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  de matrice  $A$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ . D'après la formule du binôme de NEWTON,  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f(X^k) = (X+1)^k$ .  $f$  coïncide sur la base  $\mathcal{B}$  avec l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui à un polynôme  $P$  associe  $P(X+1)$  et  $f$  est donc cet endomorphisme.

$f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  de réciproque l'application qui à un polynôme  $P$  associe  $P(X-1)$ . Par suite,  $A$  est inversible d'inverse la matrice de  $f^{-1}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , de  $A^{-1}$  vaut donc 0 si  $i > j$  et  $(-1)^{i+j} \binom{j}{i}$  si  $i \leq j$ .

#### Exercice n° 16

Calculons  $A\bar{A}$ . Soit  $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Le coefficient ligne  $j$ , colonne  $k$  de  $A\bar{A}$  vaut

$$\sum_{u=1}^n \omega^{(j-1)(u-1)} \omega^{-(u-1)(k-1)} = \sum_{u=1}^n (\omega^{j-k})^{u-1}.$$

- Si  $j = k$ , ce coefficient vaut  $n$ .
- Si  $j \neq k$ , puisque  $j - k$  est strictement compris entre  $-n$  et  $n$  et que  $j - k$  n'est pas nul,  $\omega^{j-k}$  est différent de 1. Le coefficient ligne  $j$ , colonne  $k$ , de  $A\bar{A}$  est donc égal à  $\frac{1 - (\omega^{j-k})^n}{1 - \omega^{j-k}} = \frac{1 - 1}{1 - \omega^{j-k}} = 0$ .

Finalement,  $A\bar{A} = nI_n$ . Ainsi,  $A$  est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse  $A^{-1} = \frac{1}{n}\bar{A}$ .

#### Exercice n° 17

On a toujours  $A^t(\text{com}A) = (\det A)I_n$ . Par passage au déterminant et puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée, on obtient

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)^n.$$

- Si  $\det A$  n'est pas nul, on en déduit  $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$ .
- Si  $\det A$  est nul, on a  $A^t(\text{com}A) = 0$  et donc  ${}^t\text{com}A$  est soit nulle, soit diviseur de zéro, et donc dans tous les cas non inversible. Il en est de même de  $\text{com}A$  et donc  $\det(\text{com}A) = 0 = (\det A)^{n-1}$ . Finalement

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

#### Exercice n° 18

- Si  $A$  est de rang  $n$ , c'est-à-dire inversible, l'égalité  $(\text{com}A) \times \frac{1}{\det A} {}^tA = I_n$  montre que  $\text{com}A$  est inversible et donc de rang  $n$ .

On suppose maintenant  $\text{rg}(A) \leq n - 1$ .

• Si  $\text{rg}A \leq n-2$ . On sait que tous les mineurs de format  $n-1$  extraits de  $A$  sont nuls et donc, si  $\text{rg}A \leq n-2$ ,  $\text{com}A = 0$ .

• Il reste à étudier le cas où  $\text{rg}A = n-1$  et donc  $\dim \text{Ker}A = 1$ .

L'égalité  $\det A = 0$  impose  $A^t(\text{com}A) = 0$ . Mais alors  $\text{Im}(A^t(\text{com}A)) \subset \text{Ker}A$  et en particulier  $\text{rg}(\text{com}A) = \text{rg}(A^t(\text{com}A)) \leq \dim(\text{Ker}A) = 1$ . Ainsi, si  $\text{rg}(A) = n-1$  alors  $\text{rg}(\text{com}A) \in \{0, 1\}$ .

Enfin, puisque  $A$  est de rang 1, on sait que l'un au moins des mineurs de format  $n-1$  extraits de  $A$  est non nul et donc  $\text{com}A \neq 0$  puis  $\text{rg}(\text{com}A) = 1$ .

En résumé,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg}(\text{com}A) = \begin{cases} n & \text{si } \text{rg}(A) = n \\ 1 & \text{si } \text{rg}(A) = n-1 \\ 0 & \text{si } \text{rg}(A) \leq n-2 \end{cases} .$$

### Exercice n° 19

Si  $\text{rg}M \leq n-1$ , l'égalité  $M = \text{com}M$  entraîne  $M^tM = M^t(\text{com}M) = (\det M)I_n = 0$  et donc  $M = 0$ . En effet,

$$\begin{aligned} M^tM = 0 &\Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), M^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXM^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|{}^tMX\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tMX = 0 \Rightarrow {}^tM = 0 \Rightarrow M = 0. \end{aligned}$$

En résumé, si  $M$  est solution,  $M = 0$  ou  $M$  est inversible.

Dans le deuxième cas, d'après le n° 17, on doit avoir  $\det M = (\det M)^{n-1}$  et donc, puisque  $\det M \neq 0$ ,  $\det M \in \{-1, 1\}$  (et même  $\det M = 1$  si  $n$  est impair) car  $\det M$  est réel.

• Si  $\det M = -1$ , on doit avoir  $M^tM = -I_n$  mais ceci est impossible car le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice  $M^tM$  vaut  $m_{1,1}^2 + \dots + m_{1,n}^2 \neq -1$ .

• Il reste le cas où  $\det M = 1$ , l'égalité  $M = \text{com}M$  entraîne  $M^tM = I_n$  c'est-à-dire  $M$  est orthogonale positive.

Réciproquement, si  $M$  est orthogonale positive,  ${}^tM = M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t(\text{com}M) = {}^t\text{com}M$  et donc  $M = \text{com}M$ .

Finalement ,

$$\mathcal{S} = \{0\} \cup \text{O}_n^+(\mathbb{R}).$$

### Exercice n° 20

Montrons que  $\text{Ker}A$  est réduit à  $\{0\}$ . Dans le cas contraire, on dispose d'un vecteur colonne non nul  $X_0$  tel que  $AX_0 = 0$ . Posons  $X_0 = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = 0 \Rightarrow a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j|.$$

On prend alors pour  $i$  un indice  $i_0$  tel que  $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ . Puisque  $X \neq 0$ , on a  $|x_{i_0}| > 0$ . De plus,

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leq \left( \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \right) |x_{i_0}|,$$

et puisque  $|x_{i_0}| > 0$ , on obtient après simplification  $|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$  ce qui contredit les hypothèses.

Donc  $\text{Ker}A = \{0\}$  et  $A$  est inversible.

### Exercice n° 21

Non, car  $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0 \neq n = \text{Tr}(I_n)$ .

### Exercice n° 22

Soit  $f$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Pour  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , posons  $f(A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} a_{i,j}$  où les  $\alpha_{i,j}$  sont indépendants de  $A$  (les  $\alpha_{i,j}$  sont les  $f(E_{i,j})$ ).

Soient  $i$  et  $j$  deux entiers distincts pris dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\alpha_{i,i} = f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}) = \alpha_{j,j},$$



et

$$\alpha_{i,j} = f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0.$$

Finalement en notant  $\alpha$  la valeur commune des  $\alpha_{i,i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , pour toute matrice  $A$  on a  $f(A) = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} = \alpha \text{Tr}A$  où  $\alpha$  est indépendant de  $A$ . (Réciproquement, les  $f = \alpha \text{Tr}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , sont des formes linéaires vérifiant  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ ,  $f(AB) = f(BA)$ .)

### Exercice n° 23

Puisque  $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 = 1$ , il existe un unique réel  $\theta_n \in ]-\pi, \pi[$  tel que

$$\cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \text{ et } \sin \theta_n = \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}.$$

La matrice  $A_n$  s'écrit alors  $A_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix}$  et donc

$$(A_n)^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant,

$$\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left(\frac{n}{2} \times o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$$

Ensuite, en notant  $\varepsilon$  le signe de  $a$ ,  $\theta_n = \varepsilon \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$  et on en déduit que

$$n\theta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \sin(\theta_n) = n \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} a.$$

Finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n)^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

### Exercice n° 24

Soient  $i$  et  $j$  deux indices pris dans  $[[1, n]]$ .

$$f(E_{i,j}) = E_{i,j} \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} = \sum_{l=1}^n a_{j,l} E_{i,l},$$

et en remplissant coefficient à coefficient, on trouve la matrice définie par blocs  $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & {}^tA \end{pmatrix}$ .

### Exercice n° 25

On note  $r$  le rang de  $A$ . Si  $r = 0$ ,  $A$  est nulle et donc  $B$  est nulle.

Sinon, il existe deux matrices carrées inversibles  $P$  et  $Q$  de format  $n$  telles que  $A = PJ_rQ$  où  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Soient

$$P' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{C}) \text{ et } Q' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{C}).$$

Puisque  $\det(P') = (\det(P))^p \neq 0$  et  $\det(Q') = (\det(Q))^p \neq 0$ , les matrices  $P'$  et  $Q'$  sont inversibles. De plus, un calcul par blocs montre que

$$B = \begin{pmatrix} PJ_rQ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & PJ_rQ \end{pmatrix} = P'J'_rQ' \text{ où } J'_r = \begin{pmatrix} J_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}.$$

La matrice  $B$  est équivalente à la matrice  $J'_r$  et a donc même rang que  $J'_r$ . Enfin, en supprimant les lignes nulles et les colonnes nulles, on voit que la matrice  $J'_r$  a même rang que la matrice  $I_{pr}$  à savoir  $pr$ . Dans tous les cas, on a montré que

$$\text{rg}B = p \text{rg}A.$$

### Exercice n° 26

Soit  $r$  le rang de  $H$ . Il existe deux matrices carrées inversibles  $P$  et  $Q$  de format  $n$  telles que  $H = PJ_rQ$  où  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (avec la convention  $J_r = 0$  si  $r = 0$ ). L'égalité  $H A H = \lambda_A H$  s'écrit après simplifications  $J_r Q A P J_r = \lambda_A J_r$ . Maintenant, quand  $A$  décrit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la matrice  $B = Q A P$  décrit également  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (par exemple, l'application qui à  $A$  associe  $Q A P$  est une permutation de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de réciproque l'application qui à  $A$  associe  $Q^{-1} A P^{-1}$ ).

L'énoncé s'écrit maintenant de manière plus simple : montrons que  $(\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists \lambda_B \in \mathbb{K} / J_r B J_r = \lambda_B J_r) \Rightarrow r \leq 1$ .

Un calcul par blocs fournit en posant  $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$

$$J_r B J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais si  $r \geq 2$ , il existe des matrices carrées  $B_1$  de format  $r$  qui ne sont pas des matrices scalaires et donc telles que  $B_1$  n'est pas colinéaire à  $I_r$ . Donc  $r \leq 1$ .

### Exercice n° 27

(1)  $\Rightarrow$  (2).

$M^2 = 0 \Rightarrow \text{Im}M \subset \text{Ker}M \Rightarrow \text{rg}M \leq \dim(\text{Ker}M) = 3 - \text{rg}M \Rightarrow \text{rg}M \leq \frac{3}{2}$  et donc  $\text{rg}M \leq 1$ .

Si  $\text{rg}M = 0$  alors  $\text{Tr}M = 0$ . On suppose maintenant que  $\text{rg}M = 1$  et donc  $\dim(\text{Ker}M) = 2$ .

Soit  $e_1$  un vecteur non nul de  $\text{Im}M$  alors il existe un vecteur  $e_3$  (non nul) tel que  $M e_3 = e_1$ .

On complète la famille libre  $(e_1)$  de  $\text{Im}M \subset \text{Ker}M$  en  $(e_1, e_2)$  base de  $\text{Ker}M$ . La famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  car

$$a e_1 + b e_2 + c e_3 = 0 \Rightarrow M(a e_1 + b e_2 + c e_3) = 0 \Rightarrow c e_1 = 0 \Rightarrow c = 0,$$

puis  $a = b = 0$  car la famille  $(e_1, e_2)$  est libre.

$M$  est donc semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et en particulier  $\text{Tr}M = 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1).

Si  $\text{rg}M = 0$ ,  $M^2 = 0$ .

Si  $\text{rg}M = 1$ , on peut se rappeler de l'écriture générale d'une matrice de rang 1 : il existe trois réels  $u_1, u_2$  et  $u_3$  non

tous nuls et trois réels  $v_1, v_2$  et  $v_3$  non tous nuls tels que  $M = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}$  ou encore il existe deux vecteurs

colonnes, tous deux non nuls  $U$  et  $V$  tels que  $M = U^t V$ . L'égalité  $\text{Tr}M = 0$  fournit  $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$  ou encore  ${}^t U V = 0$ . Mais alors

$$M^2 = U^t V U^t V = U^t ({}^t U V) V = 0$$

Cet exercice admet des solutions bien plus brèves avec des connaissances sur la réduction .

### Exercice n° 28

Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} A^p B - B A^p &= A^p B - A^{p-1} B A + A^{p-1} B A - A^{p-2} B A^2 + A^{p-2} B A^2 - \dots + A B A^{p-1} - B A^p \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (A^{p-k} B A^k - A^{p-k-1} B A^{k+1}) = \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-k-1} (A B - B A) A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-k-1} A A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^p \\ &= p A^p. \end{aligned}$$

Donc  $2016 \times \text{Tr}(A^{2016}) = \text{Tr}(2016 A^{2016}) = \text{Tr}(A^{2016} B) - \text{Tr}(B A^{2016}) = 0$  et  $\text{Tr}(A^{2016}) = 0$ .

### Exercice n° 29

Si  $M(a)$  et  $N(a)$  sont semblables alors nécessairement  $\text{Tr}(M(a)) = \text{Tr}(N(a))$ . Or, pour tout scalaire  $a$ ,  $\text{Tr}(M(a)) = 4 - 3a = \text{Tr}(N(a))$ . La trace ne fournit aucun renseignement.

On doit aussi avoir  $\det(M(a)) = \det(N(a))$ . Or,  $\det(N(a)) = (1 - a)^2(2 - a)$  et

$$\begin{aligned} \det(M(a)) &= (4 - a)(a^2 - 1 - 2) + 6(1 - a + 1) + 2(2 - 1 - a) = (4 - a)(a^2 - 3) + 14 - 8a = -a^3 + 4a^2 - 5a + 2 \\ &= (a - 1)^2(2 - a) = \det(N(a)). \end{aligned}$$

Le déterminant ne fournit aucun renseignement.

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^3$  de matrice  $M(a)$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0 = (i, j, k)$  de  $\mathbb{K}^3$ .

Le problème posé équivaut à l'existence d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{K}^3$  telle que  $f(e_1) = (1 - a)e_1$ ,  $f(e_2) = (1 - a)e_2 + e_1$  et  $f(e_3) = (2 - a)e_3$ . Soit  $(x, y, z)$  un élément de  $\mathbb{K}^3$ .

- $f((x, y, z)) = (1 - a)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -6x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$ . On peut prendre  $e_1 = (1, -2, 1)$ .
- $f((x, y, z)) = (1 - a)(x, y, z) + (1, -2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ -6x - 2y + 2z = -2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = x \end{cases}$ . On peut prendre  $e_2 = (0, 1, 0)$ .
- $f((x, y, z)) = (2 - a)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -6x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$ . On peut prendre  $e_3 = (1, -2, 0)$ .

La matrice de la famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  dans la base  $\mathcal{B}_0$  est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  $\det P = -1 \neq 0$  et donc la famille

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{K}^3$ . Puisque  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0} f = M(a)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = N(a)$ , les matrices  $M(a)$  et  $N(a)$  sont semblables.

### Exercice n° 30

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées réelles de format  $n$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Il existe  $P$  élément de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que  $PB = AP$  (bien plus manipulable que  $B = P^{-1}AP$ ).

Posons  $P = Q + iR$  où  $Q$  et  $R$  sont des matrices réelles. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a  $QB = AQ$  et  $RB = AR$  mais l'exercice n° 30 n'en est pas pour autant achevé car  $Q$  ou  $R$  n'ont aucune raison d'être inversibles.

On a  $QB = AQ$  et  $RB = AR$  et donc plus généralement pour tout réel  $x$ ,  $(Q + xR)B = A(Q + xR)$ .

Maintenant,  $\det(Q + xR)$  est un polynôme à coefficients réels en  $x$  mais n'est pas le polynôme nul car sa valeur en  $i$  (tel que  $i^2 = -1$ ) est  $\det P$  qui est non nul. Donc il n'existe qu'un nombre fini de réels  $x$ , éventuellement nul, tels que  $\det(Q + xR) = 0$ . En particulier, il existe au moins un réel  $x_0$  tel que la matrice  $P_0 = Q + x_0R$  soit inversible.  $P_0$  est une matrice réelle inversible telle que  $P_0 A = B P_0$  et  $A$  et  $B$  sont bien semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice n° 31

1) Soient  $p$  l'indice de nilpotence de  $A$  et  $q$  l'indice de nilpotence de  $B$ . Puisque  $A$  et  $B$  commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$(A + B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}$$

Dans cette somme,

- si  $k \geq p$ ,  $A^k = 0$  et donc  $A^k B^{p+q-1-k} = 0$
- si  $k \leq p-1$  alors  $p+q-1-k \geq q$  et encore une fois  $B^{p+q-1-k} = 0$ .

Finalement,  $(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$  et  $A+B$  est nilpotente d'indice inférieur ou égal à  $p+q-1$ .

Les sommes définissant  $\exp A$ ,  $\exp B$  et  $\exp(A+B)$  sont finies car  $A$ ,  $B$  et  $A+B$  sont nilpotentes et

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \\ &= \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) \quad (\text{toutes les sommes sont finies}) \\ &= \exp A \times \exp B. \end{aligned}$$

**2)** Si  $A$  est nilpotente,  $-A$  l'est aussi et commute avec  $A$ . Donc  $\exp A \times \exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0) = I_n$ .  $\exp A$  est inversible à gauche et donc inversible et  $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ .

**3)** Les puissances de  $A$  sont bien connues et on trouve immédiatement

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$