

Planche n° 2. Algèbre linéaire II. Corrigé

Exercice n° 1

Deux cas particuliers se traitent immédiatement.

Si $f = 0$, on prend $p = 0$ et $g = \text{Id}_E$ et si $f \in \mathcal{GL}(E)$, on prend $p = \text{Id}_E$ et $g = f$.

On se place dorénavant dans le cas où $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$ ne sont pas réduits à 0.

Soit F un supplémentaire de $\text{Ker}f$ dans E et G un supplémentaire de $\text{Im}f$ dans E .

On sait que la restriction f' de f à F réalise un isomorphisme de F sur $\text{Im}f$. D'autre part $\dim \text{Ker}f = \dim G < +\infty$ et donc $\text{Ker}f$ et G sont isomorphes. Soit φ un isomorphisme de $\text{Ker}f$ sur G .

On définit une unique application linéaire g en posant $g|_{\text{Ker}f} = \varphi$ et $g|_F = f'$.

g est un automorphisme de E . En effet,

$$g(E) = g(\text{Ker}f + F) = g(\text{Ker}f) + g(F) = \varphi(\text{Ker}f) + f'(F) = G + \text{Im}f = E,$$

(puisque φ et f' sont des isomorphismes) et donc g est surjective. Par suite g est bijective de E sur lui-même puisque $\dim E < +\infty$.

Soit p la projection sur F parallèlement à $\text{Ker}f$. On a

$$(g \circ p)|_{\text{Ker}f} = g \circ 0|_{\text{Ker}f} = 0|_{\text{Ker}f} = f|_{\text{Ker}f} \text{ et } (g \circ p)|_F = g \circ \text{Id}_F = f' = f|_F.$$

Ainsi les endomorphismes $g \circ p$ et f coïncident sur deux sous espaces supplémentaires de E et donc $g \circ p = f$. Finalement, si on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs de E ,

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \exists g \in \mathcal{GL}(E), \exists p \in \mathcal{P}(E) / f = g \circ p.$$

Exercice n° 2

(Ne pas confondre : $(\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^* / f^p(x) = 0)$ et $(\exists p \in \mathbb{N}^* / \forall x \in E, f^p(x) = 0)$. Dans le deuxième cas, p est indépendant de x alors que dans le premier cas, p peut varier quand x varie).

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un entier non nul p_i tel que $f^{p_i}(e_i) = 0$. Soit $p = \text{Max}\{p_1, \dots, p_n\}$. p est un entier naturel non nul et pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$f^p(e_i) = f^{p-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{p-p_i}(0) = 0.$$

Ainsi l'endomorphisme f^p s'annule sur une base de E et donc $f^p = 0$.

On a donc trouvé un entier non nul p tel que $f^p = 0$ et par suite f est nilpotent.

Exercice n° 3

1) A partir de $fg - gf = af + bg$ (1), on obtient après composition à droite par g , $fg - gfg = afg + bg$ ou encore $fg = g \circ \frac{1}{1-a}(fg + b\text{Id})$ (puisque $1-a \neq 0$). On en déduit

$$\text{Im}(fg) \subset \text{Im}g.$$

Mais alors en écrivant (1) sous la forme $f = \frac{1}{a}(fg - gf - bg)$ (puisque a n'est pas nul), on obtient

$$\text{Im}f \subset \text{Im}g.$$

L'égalité $\text{Im}f \subset \text{Im}g$ montre que tout vecteur de $\text{Im}f$ est invariant par g et fournit donc l'égalité $gf = f$. On compose alors (1) à droite par f et en tenant compte de $gf = f$ et de $f^2 = f$, on obtient $f - f = af + bf$ et donc $(a+b)f = 0$ puis $b = -a$ puisque f n'est pas nul.

(1) s'écrit alors $fg - f = a(f - g)$. En composant à droite par g , on obtient : $a(fg - g) = 0$ et donc $fg = g$ puisque a n'est pas nul. (1) s'écrit maintenant $g - f = a(f - g)$ ou encore $(a+1)(g - f) = 0$ et donc, puisque f et g sont distincts, $a = -1$.

2) (D'après 1), si a est distinct de 0 et de 1, nécessairement $a = -1$ et (1) s'écrit $fg - gf = -f + bg$.

Soit x un élément de $\text{Ker}g$. (1) fournit $-g(f(x)) = af(x)$ (*) puis en prenant l'image par g , $(a+1)g(f(x)) = 0$. Puisque a est distinct de -1 , on obtient $g(f(x)) = 0$ et (*) fournit $af(x) = 0$ puis $f(x) = 0$. Donc x est élément de $\text{Ker}f$. On a montré que $\text{Ker}g \subset \text{Ker}f$.

On en déduit $\text{Im}(g - \text{Id}) \subset \text{Ker}f$ et donc $f(g - \text{Id}) = 0$ ou encore $fg = f$. (1) s'écrit $f - gf = af + bg$ et en composant à gauche par f , on obtient $f - fgf = af + bfg$. En tenant compte de $fg = f$, on obtient $(a+b)f = 0$ et donc $b = -a$.

(1) s'écrit alors $f - gf = a(f - g)$ et en composant à gauche par g , on obtient $0 = a(gf - g)$ et donc $gf = g$. (1) s'écrit enfin $f - g = a(f - g)$ et donc $a = 1$.

3) Si $a = 0$, (1) s'écrit $fg - gf = bg$. En composant à gauche ou à droite par g , on obtient $gfg - gf = bg$ et $fg - gfg = bg$. En additionnant ces deux égalités, on obtient $fg - gf = 2bg$. D'où, en tenant compte de (1), $bg = 2bg$ et puisque g n'est pas nul, $b = 0$. Par suite $fg - gf = 0$ ce qui est exclu par l'énoncé. Donc, on ne peut avoir $a = 0$. D'après 1) et 2), $(a, b) \in \{(-1, 1), (1, -1)\}$.

1er cas. $(a, b) = (-1, 1)$. C'est le 1) : $fg - gf = -f + g$. On a vu successivement que $gf = f$ puis que $fg = g$ fournissant $(g - \text{Id})f = 0$ et $(f - \text{Id})g = 0$ ou encore $\text{Im}f \subset \text{Ker}(g - \text{Id}) = \text{Im}g$ et $\text{Im}g \subset \text{Im}f$ et donc $\text{Im}f = \text{Im}g$. Réciproquement, si f et g sont deux projecteurs de même image alors $gf = f$, $fg = g$ et donc $fg - gf = -f + g$. Le premier cas est donc le cas de deux projecteurs de même image .

2ème cas. $(a, b) = (1, -1)$. C'est le cas de deux projecteurs de même noyau.

Exercice n° 4

1) Si $N = \text{Ker}f \neq \{0\}$, considérons g non nul tel que $\text{Im}g \neq \{0\}$ et $\text{Im}g \subset \text{Ker}f$.

Pour un tel g , $f \circ g = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ par hypothèse, contredisant g non nulle. Donc $\text{Ker}f = \{0\}$.

Si $\text{Im}f \neq F$, on choisit g nulle sur $\text{Im}f$ et non nulle sur un supplémentaire de $\text{Im}f$ (dont l'existence est admise en dimension infinie). Alors, $g \circ f = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ contredisant g non nulle. Donc $\text{Im}f = F$.

Finalement, f est bien un isomorphisme de E sur F .

2) Soit $A = \{g \in \mathcal{L}(F, E) / f \circ g \circ f = 0\}$. Tout d'abord A est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$ car contient l'application nulle et est stable par combinaison linéaire (ou bien A est le noyau de l'application linéaire de $\mathcal{L}(F, E)$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ qui à g associe $f \circ g \circ f$).

Soit J un supplémentaire de $I = \text{Im}f$ dans F . Un élément g de $\mathcal{L}(F, E)$ est entièrement déterminé par ses restrictions à I et J .

$$f \circ g \circ f = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)|_I = 0 \text{ et } g|_J \text{ est quelconque} \Leftrightarrow g(I) \subset N.$$

Pour être le plus méticuleux possible, on peut alors considérer l'application G de $\mathcal{L}(I, N) \times \mathcal{L}(J, E)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$ qui à un couple (g_1, g_2) associe l'unique application linéaire g de F dans E telle que $g|_I = g_1$ et $g|_J = g_2$. G est linéaire et injective d'image A . Donc

$$\dim A = \dim (\mathcal{L}(I, N) \times \mathcal{L}(J, E)) = \dim \mathcal{L}(I, N) + \dim \mathcal{L}(J, E) = r(p - r) + (n - r)p = pn - r^2.$$

Exercice n° 5

1) u est dans $L(E)$ car u est linéaire et si P est un polynôme de degré au plus n alors $u(P)$ est un polynôme de degré au plus n .

• Les polynômes constants sont dans $\text{Ker}u$. Réciproquement, soit P un élément de $\text{Ker}u$ puis $Q = P - P(0)$.

Par hypothèse, $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$ et donc $0, 1, 2, \dots$ sont des racines de Q . Puisque le polynôme Q admet une infinité de racines, Q est nul et donc $P = P(0)$ et $P \in \mathbb{K}_0[X]$. Ainsi, $\text{Ker}u = \mathbb{K}_0[X]$.

• Mais alors, d'après le théorème du rang, $\text{rg}u = (n + 1) - 1 = n$. D'autre part, si P est dans $\mathbb{K}_n[X]$, $P(X + 1) - P$ est dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (si on pose $P = a_n X^n + \dots$, le coefficient de X^n dans $u(P)$ est $a_n - a_n = 0$).

En résumé, $\text{Im}u \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim \text{Im}u = \dim \mathbb{K}_{n-1}[X] < +\infty$ et donc $\text{Im}u = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

$$\text{Ker}u = \mathbb{K}_0[X] \text{ et } \text{Im}u = \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

2) On part de $P_0 = 1$ et aussi de $P_1 = X$ qui vérifient bien $u(P_0) = 0$ et $u(P_1) = P_0$.

Trouvons $P_2 = aX^2 + bX$ tel que $u(P_2) = P_1$ (il est clair que si $\deg(P) \geq 1$, $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$ et d'autre part, les constantes sont inutiles car $\text{Ker}u = \mathbb{K}_0[X]$).

$$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X + 1)^2 + b(X + 1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a - 1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -a.$$

On prend $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{1}{2}X(X - 1)$.

Trouvons $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$ tel que $u(P_3) = P_2$.

$$\begin{aligned} u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X + 1)^3 + b(X + 1)^2 + c(X + 1) - aX^3 - bX^2 - cX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &\Leftrightarrow \left(3a - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \frac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On prend $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.

Essayons, pour $1 \leq k \leq n$, $P_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$. Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned} u(P_{k+1}) &= \frac{1}{(k+1)!} \prod_{i=0}^k (X+1-i) - \frac{1}{(k+1)!} \prod_{i=0}^k (X-i) = \frac{1}{(k+1)!} ((X+1) - (X-k)) \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) = P_k. \end{aligned}$$

Enfin, les P_k , $0 \leq k \leq n$, constituent une famille de $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée.

Exercice n° 6

(C'est en fait un exercice sur les polynômes de Tchebychev de 1ère espèce et vous pouvez généraliser cet exercice en passant au format n au lieu du format 4.)

Si on note C_j , $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, la j -ème colonne de A alors $C_j = (\cos(i+j-2)\alpha)_{1 \leq i \leq 4}$ puis pour j élément de $\{1, 2\}$,

$$C_{j+2} + C_j = (2 \cos(i+j-1)\alpha \cos \alpha)_{1 \leq i \leq 4} = 2 \cos \alpha C_{j+1}$$

et donc $C_3 = 2 \cos \alpha C_2 - C_1 \in \text{Vect}(C_1, C_2)$ et $C_4 = 2 \cos \alpha C_3 - C_2 \in \text{Vect}(C_2, C_3) \subset \text{Vect}(C_1, C_2)$.

Donc $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1, C_2)$ et $\text{rg} A = \text{rg}(C_1, C_2) \leq 2$.

Enfin $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \cos(2\alpha) \end{vmatrix} = \cos(2\alpha) - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$.

• Si α n'est pas dans $\pi\mathbb{Z}$, ce déterminant n'est pas nul et donc les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, $\text{rg} A = 2$.

• Si α est dans $\pi\mathbb{Z}$, la première colonne n'est pas nulle et les autres colonnes lui sont colinéaires. Dans ce cas, $\text{rg} A = 1$.

$$\text{rg}(A) = 2 \text{ si } \alpha \notin \pi\mathbb{Z} \text{ et } \text{rg}(A) = 1 \text{ si } \alpha \in \pi\mathbb{Z}.$$

Exercice n° 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \end{pmatrix} = I + N \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

N est nilpotente et donc $N^n = 0$. Par suite,

$$I = I - (-N)^n = (I + N)(I - N + \dots + (-N)^{n-1}).$$

Ainsi A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $I - N + \dots + (-N)^{n-1}$.

Calcul de N^p pour $1 \leq p \leq n$.

$$N^2 = \left(\sum_{j=2}^n j E_{j-1,j} \right)^2 = \sum_{2 \leq j, k \leq n} jk E_{j-1,j} E_{k-1,k} = \sum_{j=2}^{n-1} j(j+1) E_{j-1,j} E_{j,j+1} = \sum_{j=3}^n j(j-1) j E_{j-2,j}.$$

$$\text{c'est-à-dire } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \times 3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 \times 4 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & (n-1)n \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ensuite, } N^3 = \left(\sum_{j=3}^n (j-1)jE_{j-2,j} \right) \left(\sum_{k=2}^n kE_{k-1,k} \right) = \sum_{j=4}^n j(j-1)(j-2)E_{j-3,j}.$$

$$\text{Supposons que pour } p \text{ donné dans } \llbracket 1, n-1 \rrbracket, N^p = \sum_{j=p+1}^n j(j-1)\dots(j-p+1)E_{j-p,j}.$$

$$\text{Alors } N^{p+1} = \left(\sum_{j=p+1}^n j(j-1)\dots(j-p+1)E_{j-p,j} \right) \left(\sum_{k=2}^n kE_{k-1,k} \right) = \sum_{j=p+2}^n j(j-1)\dots(j-p)E_{j-p-1,j}. \text{ Ainsi}$$

$$A^{-1} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ où } a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j, 1 \text{ si } i = j \text{ et } (-1)^{i+j-2} \prod_{k=0}^{j-i-1} (j-k) \text{ sinon.}$$

Exercice n° 8

On note $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\text{Tr}f = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j}$ où $\alpha_{i,j}$ désigne la (i,j) -ème coordonnée de $f(E_{i,j}) = AE_{i,j} + E_{i,j}A$ dans la base \mathcal{B} .

Mais pour $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ donné,

$$AE_{i,j} = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$$

et de même,

$$E_{i,j}A = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} = \sum_{l=1}^n a_{j,l} E_{i,l}.$$

Donc $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \alpha_{i,j} = a_{i,i} + a_{j,j}$ puis

$$\text{Tr}f = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,i} + a_{j,j}) = 2 \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,i} = 2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i} \right) = 2 \sum_{j=1}^n \text{Tr}A = 2n \text{Tr}A.$$

$$\text{Tr}f = 2n \text{Tr}A.$$

Exercice n° 9

Si M est solution, nécessairement $a \text{Tr}M + (\text{Tr}M)(\text{Tr}A) = \text{Tr}B$ ou encore $(\text{Tr}M)(a + \text{Tr}A) = \text{Tr}B$.

1er cas. Si $\text{Tr}A \neq -a$ alors nécessairement $\text{Tr}M = \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A}$ puis $M = \frac{1}{a} \left(B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} A \right)$.

Réciproquement, si $M = \frac{1}{a} \left(B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} A \right)$ alors

$$aM + (\text{Tr}M)A = B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} A + \frac{1}{a} \left(\text{Tr}B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} \text{Tr}A \right) A = B.$$

$$\text{Si } \text{Tr}A \neq -a, \mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{a} \left(B - \frac{\text{Tr}B}{a + \text{Tr}A} A \right) \right\}.$$

2ème cas. Si $\text{Tr}A = -a$ et $\text{Tr}B \neq 0$, il n'y a pas de solution.

3ème cas. Si $\text{Tr}A = -a$ et $\text{Tr}B = 0$, M est nécessairement de la forme $\frac{1}{a}B + \lambda A$ où λ est un réel quelconque.

Réciproquement, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $M = \frac{1}{a}B + \lambda A$. Alors

$$aM + (\text{Tr}M)A = B + a\lambda A + \left(\frac{1}{a} \text{Tr}B + \lambda \text{Tr}A \right) A = B + a\lambda A - a\lambda A = B,$$

et toute matrice de la forme $B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}$, est solution.

Si $\text{Tr}A = -a$, $\mathcal{S} = \emptyset$ si $\text{Tr}B \neq 0$ et $\mathcal{S} = \{B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}\}$ si $\text{Tr}B = 0$.

Exercice n° 10

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons C_j la j -ème colonne de la matrice A . Posons encore $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$. Pour

$j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$C_j = (i + j(i + 1))_{1 \leq i \leq n} = (i)_{1 \leq i \leq n} + j(i + 1)_{1 \leq i \leq n} = U + jV.$$

Donc $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) \subset \text{Vect}(U, V)$ et en particulier, $\text{rg}A \leq 2$. Maintenant, si $n \geq 2$, les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Donc, si $n \geq 2$, $\text{rg}A = 2$ et si $n = 1$, $\text{rg}A = 1$.

Si $n \geq 2$, $\text{rg}(i + j + ij)_{1 \leq i, j \leq n} = 2$ et si $n = 1$, $\text{rg}(i + j + ij)_{1 \leq i, j \leq n} = 1$.

Exercice n° 11

1) $E = \text{Vect}(I, J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à 2. De plus, la famille (I, J) est libre car la matrice J n'est pas une matrice scalaire et donc $\dim E = 2$.

2) Puisque $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, $(E, +)$ est un groupe commutatif.

Ensuite, $I^2 = I \in E$, $IJ = JI = J \in E$ et $J^2 = (I + E_{1,2})^2 = I + 2E_{1,2} = I + 2(J - I) - I = 2J - I \in E$. Par bilinéarité du produit matriciel, la multiplication est interne dans E et commutative. De plus, $I \in E$ et finalement E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque. $M(x, y)M(x', y') = xx'I + (xy' + yx')J + yy'(2J - I) = (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J$.

3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \text{ est inversible dans } E &\Leftrightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2; (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J = I \\ &\Leftrightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + (x + 2y)y' = 0 \end{cases} \quad (\text{car la famille } (I, J) \text{ est libre}) \quad (*). \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système d'inconnue (x', y') est $x(x + 2y) + y^2 = (x + y)^2$.

- Si $x + y \neq 0$, le système $(*)$ admet une et une seule solution. Dans ce cas, $M(x, y)$ est inversible dans E .
- Si $x + y = 0$, le système $(*)$ s'écrit $\begin{cases} x(x' + y') = 1 \\ -x(x' + y') = 0 \end{cases}$ et n'a pas de solution. Dans ce cas, $M(x, y)$ n'est pas inversible dans E .

$M(x, y)$ est inversible dans $E \Leftrightarrow x + y \neq 0$.

Remarque. Puisque $I \in E$, $M(x, y)$ est inversible dans E si et seulement si $M(x, y)$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4) Posons $X = xI + yJ$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) D'après 1), $X^2 = (x^2 - y^2)I + (2xy + 2y^2)J$. Donc

$$\begin{aligned} X^2 = I &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \quad (\text{car la famille } (I, J) \text{ est libre}) \\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 1) \text{ ou } (y = -x \text{ et } 0 = 1) \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x = 1) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } x = -1) \\ &\Leftrightarrow X = I \text{ ou } X = -I. \end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \{I, -I\}$.

b)

$$X^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 0) \text{ ou } (y = -x \text{ et } 0 = 0) \Leftrightarrow y = -x.$$

$$\mathcal{S} = \{x(I - J), x \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque. L'équation $X^2 = 0$, de degré 2, admet une infinité de solutions dans E ce qui montre une nouvelle fois que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.

c)

$$\begin{aligned} X^2 = X &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x \text{ et } 2xy + 2y^2 = y \Leftrightarrow y(2x + 2y - 1) = 0 \text{ et } x^2 - y^2 = x \\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = x) \text{ ou } (2(x + y) = 1 \text{ et } (x + y)(x - y) = x) \Leftrightarrow (X = 0 \text{ ou } X = I) \text{ ou } (2(x + y) = 1 \text{ et } x - y = 2x) \\ &\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = I. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{0, I\}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $M(x, y) = xI + y(I + N) = (x + y)I + yN$.

Puisque I et N commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$\begin{aligned} (M(x, y))^n &= ((x + y)I + yN)^n = (x + y)^n I + ny(x + y)^{n-1} N \text{ (car } N^k = 0 \text{ pour } k \geq 2) \\ &= \begin{pmatrix} (x + y)^n & ny(x + y)^{n-1} \\ 0 & (x + y)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (M(x, y))^n = \begin{pmatrix} (x + y)^n & ny(x + y)^{n-1} \\ 0 & (x + y)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 12

$\{0\}$ est un idéal bilatère de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Soit I un idéal non nul de de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$. Montrons que $I = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il existe une matrice A non nulle dans I . Pour tout quadruplet d'indices (i, j, k, l) , I contient le produit

$$E_{i,j} A E_{k,l} = \sum_{1 \leq u, v \leq n} a_{u,v} E_{i,j} E_{u,v} E_{k,l} = a_{j,k} E_{i,l}.$$

A est non nulle et on peut choisir j et k tels que $a_{j,k}$ soit non nul. I contient alors $a_{j,k} E_{i,l} \frac{1}{a_{j,k}} I_n = E_{i,l}$. Finalement I contient toutes les matrices élémentaires et donc encore toutes les sommes du type $\sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} I_n E_{i,j} = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, c'est-à-dire $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier.

Les idéaux bilatères de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice n° 13

On inverse A en l'interprétant comme une matrice de passage.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n et (e'_1, \dots, e'_n) la famille de vecteurs de \mathbb{R}^n de matrice A dans la base \mathcal{B} .

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow (e'_1, \dots, e'_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_n) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i \in \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_n).$$

Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} .

Soit $u = e_1 + \dots + e_n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e'_i = a_i e_i + u$ ce qui fournit $e_i = \frac{1}{a_i} (e'_i - u)$.

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient $u = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} e'_i - \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) u$ et donc $\lambda u = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} e'_i$ où

$$\lambda = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

1er cas. Si $\lambda \neq 0$, on peut exprimer u en fonction des e'_i , $1 \leq i \leq n$, et donc les e_i fonction des e'_i . Dans ce cas A est inversible. Plus précisément, $u = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} e'_i$ puis, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i = \frac{1}{a_i} \left(e'_i - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} e'_j \right)$ et enfin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} - \frac{1}{\lambda a_1^2} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_1} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_2} & \frac{1}{a_2} - \frac{1}{\lambda a_2^2} & & & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{\lambda a_2 a_3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{\lambda a_{n-1}^2} & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_n} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_n} & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\lambda a_n^2} \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

2ème cas. Si $\lambda = 0$, on a $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} e'_i = 0$ ce qui montre que la famille $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée et donc que A n'est pas inversible.

Exercice n° 14

Par hypothèse, $a_{i,j} = 0$ pour $j \leq i + r - 1$ et $b_{i,j} = 0$ pour $j \leq i + s - 1$.

Soient i et j deux indices tels que $j \leq i + r + s - 1$. Le coefficient ligne i , colonne j , de AB vaut $\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$.

Dans cette somme, si $k \leq i + r - 1$, $a_{i,k} = 0$. Sinon $k \geq i + r$ et donc $j \leq i + r + s - 1 \leq k + s - 1$ et dans ce cas $b_{k,j} = 0$. Finalement, le coefficient ligne i , colonne j , de AB est bien nul si $j \leq i + r + s - 1$.

Exercice n° 15

Notons A la matrice de l'énoncé. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule du binôme de NEWTON, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(X^k) = (X+1)^k$. f coïncide sur la base \mathcal{B} avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe $P(X+1)$ et f est donc cet endomorphisme.

f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de réciproque l'application qui à un polynôme P associe $P(X-1)$. Par suite, A est inversible d'inverse la matrice de f^{-1} dans la base \mathcal{B} .

Le coefficient ligne i , colonne j , de A^{-1} vaut donc 0 si $i > j$ et $(-1)^{i+j} \binom{j}{i}$ si $i \leq j$.

Exercice n° 16

Calculons $A\bar{A}$. Soit $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le coefficient ligne j , colonne k de $A\bar{A}$ vaut

$$\sum_{u=1}^n \omega^{(j-1)(u-1)} \omega^{-(u-1)(k-1)} = \sum_{u=1}^n (\omega^{j-k})^{u-1}.$$

- Si $j = k$, ce coefficient vaut n .
- Si $j \neq k$, puisque $j - k$ est strictement compris entre $-n$ et n et que $j - k$ n'est pas nul, ω^{j-k} est différent de 1. Le coefficient ligne j , colonne k , de $A\bar{A}$ est donc égal à $\frac{1 - (\omega^{j-k})^n}{1 - \omega^{j-k}} = \frac{1 - 1}{1 - \omega^{j-k}} = 0$.

Finalement, $A\bar{A} = nI_n$. Ainsi, A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{n}\bar{A}$.

Exercice n° 17

On a toujours $A^t(\text{com}A) = (\det A)I_n$. Par passage au déterminant et puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée, on obtient

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)^n.$$

- Si $\det A$ n'est pas nul, on en déduit $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$.
- Si $\det A$ est nul, on a $A^t(\text{com}A) = 0$ et donc ${}^t\text{com}A$ est soit nulle, soit diviseur de zéro, et donc dans tous les cas non inversible. Il en est de même de $\text{com}A$ et donc $\det(\text{com}A) = 0 = (\det A)^{n-1}$. Finalement

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

Exercice n° 18

- Si A est de rang n , c'est-à-dire inversible, l'égalité $(\text{com}A) \times \frac{1}{\det A} {}^tA = I_n$ montre que $\text{com}A$ est inversible et donc de rang n .

On suppose maintenant $\text{rg}(A) \leq n - 1$.

• Si $\text{rg}A \leq n - 2$. On sait que tous les mineurs de format $n - 1$ extraits de A sont nuls et donc, si $\text{rg}A \leq n - 2$, $\text{com}A = 0$.

• Il reste à étudier le cas où $\text{rg}A = n - 1$ et donc $\dim \text{Ker}A = 1$.

L'égalité $\det A = 0$ impose $A^t(\text{com}A) = 0$. Mais alors $\text{Im}(A^t(\text{com}A)) \subset \text{Ker}A$ et en particulier $\text{rg}(\text{com}A) = \text{rg}(A^t(\text{com}A)) \leq \dim(\text{Ker}A) = 1$. Ainsi, si $\text{rg}(A) = n - 1$ alors $\text{rg}(\text{com}A) \in \{0, 1\}$.

Enfin, puisque A est de rang 1, on sait que l'un au moins des mineurs de format $n - 1$ extraits de A est non nul et donc $\text{com}A \neq 0$ puis $\text{rg}(\text{com}A) = 1$.

En résumé,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg}(\text{com}A) = \begin{cases} n & \text{si } \text{rg}(A) = n \\ 1 & \text{si } \text{rg}(A) = n - 1 \\ 0 & \text{si } \text{rg}(A) \leq n - 2 \end{cases} .$$

Exercice n° 19

Si $\text{rg}M \leq n - 1$, l'égalité $M = \text{com}M$ entraîne $M^tM = M^t(\text{com}M) = (\det M)I_n = 0$ et donc $M = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} M^tM = 0 &\Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), M^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXM^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|{}^tMX\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tMX = 0 \Rightarrow {}^tM = 0 \Rightarrow M = 0. \end{aligned}$$

En résumé, si M est solution, $M = 0$ ou M est inversible.

Dans le deuxième cas, d'après le n° 17, on doit avoir $\det M = (\det M)^{n-1}$ et donc, puisque $\det M \neq 0$, $\det M \in \{-1, 1\}$ (et même $\det M = 1$ si n est impair) car $\det M$ est réel.

• Si $\det M = -1$, on doit avoir $M^tM = -I_n$ mais ceci est impossible car le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice M^tM vaut $m_{1,1}^2 + \dots + m_{1,n}^2 \neq -1$.

• Il reste le cas où $\det M = 1$, l'égalité $M = \text{com}M$ entraîne $M^tM = I_n$ c'est-à-dire M est orthogonale positive.

Réciproquement, si M est orthogonale positive, ${}^tM = M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t(\text{com}M) = {}^t\text{com}M$ et donc $M = \text{com}M$.

Finalement ,

$$\mathcal{S} = \{0\} \cup \text{O}_n^+(\mathbb{R}).$$

Exercice n° 20

Montrons que $\text{Ker}A$ est réduit à $\{0\}$. Dans le cas contraire, on dispose d'un vecteur colonne non nul X_0 tel que $AX_0 = 0$. Posons $X_0 = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = 0 \Rightarrow a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j|.$$

On prend alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Puisque $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$. De plus,

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leq \left(\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \right) |x_{i_0}|,$$

et puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient après simplification $|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$ ce qui contredit les hypothèses.

Donc $\text{Ker}A = \{0\}$ et A est inversible.

Exercice n° 21

Non, car $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0 \neq n = \text{Tr}(I_n)$.

Exercice n° 22

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, posons $f(A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} a_{i,j}$ où les $\alpha_{i,j}$ sont indépendants de A (les $\alpha_{i,j}$ sont les $f(E_{i,j})$).

Soient i et j deux entiers distincts pris dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\alpha_{i,i} = f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}) = \alpha_{j,j},$$

et

$$\alpha_{i,j} = f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0.$$

Finalement en notant α la valeur commune des $\alpha_{i,i}$, $1 \leq i \leq n$, pour toute matrice A on a $f(A) = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} = \alpha \text{Tr}A$ où α est indépendant de A . (Réciproquement, les $f = \alpha \text{Tr}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, sont des formes linéaires vérifiant $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$.)

Exercice n° 23

Puisque $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 = 1$, il existe un unique réel $\theta_n \in]-\pi, \pi[$ tel que

$$\cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \text{ et } \sin \theta_n = \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}.$$

La matrice A_n s'écrit alors $A_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix}$ et donc

$$(A_n)^n = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant,

$$\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left(\frac{n}{2} \times o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$$

Ensuite, en notant ε le signe de a , $\theta_n = \varepsilon \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et on en déduit que

$$n\theta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \sin(\theta_n) = n \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} a.$$

Finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n)^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 24

Soient i et j deux indices pris dans $[[1, n]]$.

$$f(E_{i,j}) = E_{i,j} \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} = \sum_{l=1}^n a_{j,l} E_{i,l},$$

et en remplissant coefficient à coefficient, on trouve la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & {}^tA \end{pmatrix}$.

Exercice n° 25

On note r le rang de A . Si $r = 0$, A est nulle et donc B est nulle.

Sinon, il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soient

$$P' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{C}) \text{ et } Q' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{C}).$$

Puisque $\det(P') = (\det(P))^p \neq 0$ et $\det(Q') = (\det(Q))^p \neq 0$, les matrices P' et Q' sont inversibles. De plus, un calcul par blocs montre que

$$B = \begin{pmatrix} PJ_rQ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & PJ_rQ \end{pmatrix} = P'J'_rQ' \text{ où } J'_r = \begin{pmatrix} J_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}.$$

La matrice B est équivalente à la matrice J'_r et a donc même rang que J'_r . Enfin, en supprimant les lignes nulles et les colonnes nulles, on voit que la matrice J'_r a même rang que la matrice I_{pr} à savoir pr . Dans tous les cas, on a montré que

$$\text{rg}B = p \text{rg}A.$$

Exercice n° 26

Soit r le rang de H . Il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $H = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (avec la convention $J_r = 0$ si $r = 0$). L'égalité $H A H = \lambda_A H$ s'écrit après simplifications $J_r Q A P J_r = \lambda_A J_r$. Maintenant, quand A décrit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $B = Q A P$ décrit également $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (par exemple, l'application qui à A associe $Q A P$ est une permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de réciproque l'application qui à A associe $Q^{-1} A P^{-1}$).

L'énoncé s'écrit maintenant de manière plus simple : montrons que $(\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists \lambda_B \in \mathbb{K} / J_r B J_r = \lambda_B J_r) \Rightarrow r \leq 1$.

Un calcul par blocs fournit en posant $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$

$$J_r B J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais si $r \geq 2$, il existe des matrices carrées B_1 de format r qui ne sont pas des matrices scalaires et donc telles que B_1 n'est pas colinéaire à I_r . Donc $r \leq 1$.

Exercice n° 27

(1) \Rightarrow (2).

$M^2 = 0 \Rightarrow \text{Im}M \subset \text{Ker}M \Rightarrow \text{rg}M \leq \dim(\text{Ker}M) = 3 - \text{rg}M \Rightarrow \text{rg}M \leq \frac{3}{2}$ et donc $\text{rg}M \leq 1$.

Si $\text{rg}M = 0$ alors $\text{Tr}M = 0$. On suppose maintenant que $\text{rg}M = 1$ et donc $\dim(\text{Ker}M) = 2$.

Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Im}M$ alors il existe un vecteur e_3 (non nul) tel que $M e_3 = e_1$.

On complète la famille libre (e_1) de $\text{Im}M \subset \text{Ker}M$ en (e_1, e_2) base de $\text{Ker}M$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car

$$a e_1 + b e_2 + c e_3 = 0 \Rightarrow M(a e_1 + b e_2 + c e_3) = 0 \Rightarrow c e_1 = 0 \Rightarrow c = 0,$$

puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.

M est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en particulier $\text{Tr}M = 0$.

(2) \Rightarrow (1).

Si $\text{rg}M = 0$, $M^2 = 0$.

Si $\text{rg}M = 1$, on peut se rappeler de l'écriture générale d'une matrice de rang 1 : il existe trois réels u_1, u_2 et u_3 non

tous nuls et trois réels v_1, v_2 et v_3 non tous nuls tels que $M = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}$ ou encore il existe deux vecteurs

colonnes, tous deux non nuls U et V tels que $M = U^t V$. L'égalité $\text{Tr}M = 0$ fournit $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$ ou encore ${}^t U V = 0$. Mais alors

$$M^2 = U^t V U^t V = U^t ({}^t U V) V = 0$$

Cet exercice admet des solutions bien plus brèves avec des connaissances sur la réduction .

Exercice n° 28

Soit p un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} A^p B - B A^p &= A^p B - A^{p-1} B A + A^{p-1} B A - A^{p-2} B A^2 + A^{p-2} B A^2 - \dots + A B A^{p-1} - B A^p \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (A^{p-k} B A^k - A^{p-k-1} B A^{k+1}) = \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-k-1} (A B - B A) A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-k-1} A A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^p \\ &= p A^p. \end{aligned}$$

Donc $2016 \times \text{Tr}(A^{2016}) = \text{Tr}(2016 A^{2016}) = \text{Tr}(A^{2016} B) - \text{Tr}(B A^{2016}) = 0$ et $\text{Tr}(A^{2016}) = 0$.

Exercice n° 29

Si $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables alors nécessairement $\text{Tr}(M(a)) = \text{Tr}(N(a))$. Or, pour tout scalaire a , $\text{Tr}(M(a)) = 4 - 3a = \text{Tr}(N(a))$. La trace ne fournit aucun renseignement.

On doit aussi avoir $\det(M(a)) = \det(N(a))$. Or, $\det(N(a)) = (1 - a)^2(2 - a)$ et

$$\begin{aligned} \det(M(a)) &= (4 - a)(a^2 - 1 - 2) + 6(1 - a + 1) + 2(2 - 1 - a) = (4 - a)(a^2 - 3) + 14 - 8a = -a^3 + 4a^2 - 5a + 2 \\ &= (a - 1)^2(2 - a) = \det(N(a)). \end{aligned}$$

Le déterminant ne fournit aucun renseignement.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{K}^3 de matrice $M(a)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (i, j, k)$ de \mathbb{K}^3 .

Le problème posé équivaut à l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{K}^3 telle que $f(e_1) = (1 - a)e_1$, $f(e_2) = (1 - a)e_2 + e_1$ et $f(e_3) = (2 - a)e_3$. Soit (x, y, z) un élément de \mathbb{K}^3 .

- $f((x, y, z)) = (1 - a)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -6x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$. On peut prendre $e_1 = (1, -2, 1)$.
- $f((x, y, z)) = (1 - a)(x, y, z) + (1, -2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ -6x - 2y + 2z = -2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = x \end{cases}$. On peut prendre $e_2 = (0, 1, 0)$.
- $f((x, y, z)) = (2 - a)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -6x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$. On peut prendre $e_3 = (1, -2, 0)$.

La matrice de la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans la base \mathcal{B}_0 est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\det P = -1 \neq 0$ et donc la famille

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{K}^3 . Puisque $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0} f = M(a)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = N(a)$, les matrices $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables.

Exercice n° 30

Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Il existe P élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PB = AP$ (bien plus manipulable que $B = P^{-1}AP$).

Posons $P = Q + iR$ où Q et R sont des matrices réelles. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a $QB = AQ$ et $RB = AR$ mais l'exercice n° 30 n'en est pas pour autant achevé car Q ou R n'ont aucune raison d'être inversibles.

On a $QB = AQ$ et $RB = AR$ et donc plus généralement pour tout réel x , $(Q + xR)B = A(Q + xR)$.

Maintenant, $\det(Q + xR)$ est un polynôme à coefficients réels en x mais n'est pas le polynôme nul car sa valeur en i (tel que $i^2 = -1$) est $\det P$ qui est non nul. Donc il n'existe qu'un nombre fini de réels x , éventuellement nul, tels que $\det(Q + xR) = 0$. En particulier, il existe au moins un réel x_0 tel que la matrice $P_0 = Q + x_0R$ soit inversible. P_0 est une matrice réelle inversible telle que $P_0 A = B P_0$ et A et B sont bien semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice n° 31

1) Soient p l'indice de nilpotence de A et q l'indice de nilpotence de B . Puisque A et B commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$(A + B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}$$

Dans cette somme,

- si $k \geq p$, $A^k = 0$ et donc $A^k B^{p+q-1-k} = 0$
- si $k \leq p-1$ alors $p+q-1-k \geq q$ et encore une fois $B^{p+q-1-k} = 0$.

Finalement, $(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$ et $A+B$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p+q-1$.

Les sommes définissant $\exp A$, $\exp B$ et $\exp(A+B)$ sont finies car A , B et $A+B$ sont nilpotentes et

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \\ &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) \quad (\text{toutes les sommes sont finies}) \\ &= \exp A \times \exp B. \end{aligned}$$

2) Si A est nilpotente, $-A$ l'est aussi et commute avec A . Donc $\exp A \times \exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0) = I_n$. $\exp A$ est inversible à gauche et donc inversible et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

3) Les puissances de A sont bien connues et on trouve immédiatement

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$