Planche n° 1. Algèbre linéaire I

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (I)**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $[(F \cup G \text{ sous-espace de } E) \Leftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)]$.

Exercice n° 2 (****)

Généralisation. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 puis F_1, ... , F_n n sous-espaces de E où E est un espace vectoriel sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$. Montrer que $\left[(F_1 \cup \ldots \cup F_n \text{ sous-espace de } E) \Leftrightarrow (\text{il existe } i \in [\![1,n]\!]/ \bigcup_{j\neq i} F_j \subset F_i)\right]$.

Exercice n° 3 (I)**

$E = \mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Soient $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E/\ x_1 + \ldots + x_n = 0\}$ et $G = \text{Vect}\,((1, \ldots, 1))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Préciser le projeté d'un vecteur x de E sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F.

Techniques de démonstration d'indépendance (du n° 4 au n° 12).

Exercice n° 4 (**)

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^4$ sont-elles libres ou liées ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

1) (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (3, 0, 1, -2)$, $e_2 = (1, 5, 0, -1)$ et $e_3 = (7, 5, 2, 1)$.
2) (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, -1)$, $e_3 = (1, 1, -1, 1)$ et $e_4 = (1, -1, 1, 1)$.
3) (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (0, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 0, 1)$, $e_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_4 = (0, 1, 0, 0)$.
4) (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (2, -1, 3, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (4, 1, 5, 3)$ et $e_4 = (1, -2, 2, 0)$.

Exercice n° 5 (***)

Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice n° 6 (**)

Soit $f(x) = \ln(1 + x)$ pour x réel positif. Soient $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$ et $f_3 = f \circ f \circ f$. Etudier la liberté de (f_1, f_2, f_3) dans $[0, +\infty[^{[0,+\infty[}$.

Exercice n° 7 (**)

Soit $f_a(x) = |x - a|$ pour a et x réels. Etudier la liberté de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Exercice n° 8 (I)**

On pose $f_a(x) = e^{ax}$ pour a et x réels. Etudier la liberté de la famille de fonctions $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Exercice n° 9 (**)

Montrer que toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.
Montrer que toute famille de polynômes non nuls de valuations deux à deux distinctes est libre.

Exercice n° 10 (I)**

$E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$. Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.

Exercice n° 11 (I) (Polynômes d'interpolation de Lagrange)**

Soient a_0,..., a_n $n + 1$ nombres complexes deux à deux distincts et b_0,..., b_n $n + 1$ nombres complexes.
Montrer qu'il existe une unique famille de $n + 1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall (i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $L_i(a_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
Montrer que la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

Exercice n° 12 (**)

1) Calculer pour p et q entiers naturels donnés les intégrales suivantes :

$$J(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\, dx,\ K(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)\, dx \text{ et } L(p,q) = \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\, dx.$$

2) Montrer que la famille de fonctions $(\cos(px))_{p\in\mathbb{N}} \cup (\sin(qx))_{q\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Exercice n° 13 (*I)**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
Démontrer que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$.

Exercice n° 14 (**)

Soient F, G et H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
Montrer que : $\dim(F+G+H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F\cap G) - \dim(G\cap H) - \dim(H\cap F) + \dim(F\cap G\cap H)$.
Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice n° 15 (***)

Soient F_1, F_2,..., F_n n sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ ($n \geqslant 2$).
Montrer que $\dim(F_1 + ... + F_n) \leqslant \dim F_1 + ... + \dim F_n$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Exercice n° 16 (I)**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 3$. Montrer que l'intersection de $n-1$ hyperplans de E est non nulle.

Exercice n° 17 (**)

Soient $(x_1, .., x_n)$ une famille de n vecteurs de rang r et $(x_1, ..., x_m)$ une sous famille de rang s ($m \leqslant n$ et $s \leqslant r$). Montrer que $s \geqslant r+m-n$. Cas d'égalité ?

Exercice n° 18 (**)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soient f et g deux applications linéaires de E dans F. Montrer que $|\mathrm{rg}f - \mathrm{rg}g| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g$.

Exercice n° 19 (**)

Soient E, F et G, trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels puis $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Montrer que $\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g - \dim F \leqslant \mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}f, \mathrm{rg}g\}$.

Exercice n° 20 (***)

Soient E un espace de dimension finie et F et G deux sous-espaces de E. Condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $F = \mathrm{Ker}f$ et $G = \mathrm{Im}f$.

Exercice n° 21 (***)

Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Montrer que : **1)** (f non injective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f diviseur de zéro à gauche).
2) (f non surjective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f diviseur de zéro à droite).

Exercice n° 22 (* I)**

Soient E un espace de dimension finie n non nulle et f un endomorphisme nilpotent de E. Montrer que $f^n = 0$.

Exercice n° 23 (*I)**

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Justifier l'existence de A et B puis calculer BA.

Exercice n° 24 (I) (Noyaux itérés)**

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ puis $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ et $I = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. ($N$ est le nilespace de f et I le cœur de f)

1) a) Montrer que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.
b) Montrer que N et I sont stables par f.
c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})$.

2) On suppose de plus que $\dim E = n$ entier naturel non nul.

a) Soit $A = \{k \in \mathbb{N}/\ N_k = N_{k+1}\}$ et $B = \{k \in \mathbb{N}/\ I_k = I_{k+1}\}$. Montrer qu'il existe un entier $p \leqslant n$ tel que $A = B = \{k \in \mathbb{N}/\ k \geqslant p\}$.
b) Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.
c) Montrer que $f_{/N}$ est nilpotent et que $f_{/I} \in GL(I)$.

3) Trouver des exemples où **a)** A est vide et B est non vide **b)** A est non vide et B est vide **c)** **(****)** A et B sont vides.

4) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $d_k = \dim(I_k)$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice n° 25 (*I)**

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice n° 26 (*I)**

Soit E un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de E qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de E.

Exercice n° 27 (I)**

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
Montrer que ($p + q$ projecteur) $\Leftrightarrow$ ($p \circ q = q \circ p = 0$) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$).
Dans le cas où $p + q$ est un projecteur, déterminer $\mathrm{Ker}(p + q)$ et $\mathrm{Im}(p + q)$.

Exercice n° 28 (I)**

Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Exercice n° 29 (****)

Soient p_1,..., p_n n projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie. Montrer que ($p_1+...+p_n$ projecteur) $\Leftrightarrow \forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$.

Exercice n° 30 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie n. Soient p_1,..., p_n n projecteurs non nuls de E tels que $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

1) Montrer que tous les p_i sont de rang 1.
2) Soient q_1,..., q_n n projecteurs vérifiant les mêmes égalités. Montrer qu'il existe un automorphisme f de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $q_i = f \circ p_i \circ f^{-1}$.

Exercice n° 31 (***)

Soit E un espace vectoriel. Soit G un sous-groupe fini de $\mathscr{GL}(E)$ de cardinal n. Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de G et p un projecteur d'image F. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g\in G} g \circ p \circ g^{-1}$ est un projecteur d'image F.

Exercice n° 32 (***)

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\displaystyle\sum_{M\in G} \mathrm{Tr}(M) = 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{M\in G} M = 0$.

Exercice n° 33 (***) :

Soit G un sous-groupe de $GL(E)$ avec $\dim E = n$ et $\mathrm{card} G = p$. Soit $F = \{x \in E/\ \forall g \in G,\ g(x) = x\}$.
Montrer que $\dim(F) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{g\in G} \mathrm{Tr} g$.

Exercice n° 34 (*I)**

Soient A_1,..., A_p p matrices distinctes et inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $G = \{A_1, ..., A_p\}$ soit stable pour la multiplication. Soit $A = A_1 + ... + A_p$. Montrer que $\mathrm{Tr}A$ est un entier divisible par p.

Exercice n° 35 (****)

Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient des matrices inversibles.

