

Planche n° 1. Algèbre linéaire I

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (** I)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .
Montrer que : $[(F \cup G \text{ sous-espace de } E) \Leftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)]$.

Exercice n° 2 (****)

Généralisation. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 puis F_1, \dots, F_n n sous-espaces de E où E est un espace vectoriel sur un sous-corps \mathbb{K} de \mathbb{C} . Montrer que $\left[(F_1 \cup \dots \cup F_n \text{ sous-espace de } E) \Leftrightarrow (\text{il existe } i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \bigcup_{j \neq i} F_j \subset F_i) \right]$.

Exercice n° 3 (** I)

$E = \mathbb{K}^n$ où \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} .

Soient $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in E / x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, \dots, 1))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F et G sont supplémentaires dans E . Préciser le projeté d'un vecteur x de E sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F .

Techniques de démonstration d'indépendance (du n° 4 au n° 12).

Exercice n° 4 (**)

Les familles suivantes de \mathbb{R}^4 sont-elles libres ou liées? Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

- 1) (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (3, 0, 1, -2)$, $e_2 = (1, 5, 0, -1)$ et $e_3 = (7, 5, 2, 1)$.
- 2) (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, -1)$, $e_3 = (1, 1, -1, 1)$ et $e_4 = (1, -1, 1, 1)$.
- 3) (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (0, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 0, 1)$, $e_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_4 = (0, 1, 0, 0)$.
- 4) (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (2, -1, 3, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (4, 1, 5, 3)$ et $e_4 = (1, -2, 2, 0)$.

Exercice n° 5 (***)

Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} .

Exercice n° 6 (**)

Soit $f(x) = \ln(1+x)$ pour x réel positif. Soient $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$ et $f_3 = f \circ f \circ f$. Etudier la liberté de (f_1, f_2, f_3) dans $[0, +\infty[^{[0, +\infty[}$.

Exercice n° 7 (**)

Soit $f_a(x) = |x - a|$ pour a et x réels. Etudier la liberté de la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$.

Exercice n° 8 (**I)

On pose $f_a(x) = e^{ax}$ pour a et x réels. Etudier la liberté de la famille de fonctions $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$.

Exercice n° 9 (**)

Montrer que toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Montrer que toute famille de polynômes non nuls de valuations deux à deux distinctes est libre.

Exercice n° 10 (**I)

$E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E .

Exercice n° 11 (**I) (Polynômes d'interpolation de LAGRANGE)

Soient a_0, \dots, a_n $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts et b_0, \dots, b_n $n+1$ nombres complexes.

Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_i(a_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

Exercice n° 12 ()**

1) Calculer pour p et q entiers naturels donnés les intégrales suivantes :

$$J(p, q) = \int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) \, dx, \quad K(p, q) = \int_0^{2\pi} \cos(px) \sin(qx) \, dx \quad \text{et} \quad L(p, q) = \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) \, dx.$$

2) Montrer que la famille de fonctions $(\cos(px))_{p \in \mathbb{N}} \cup (\sin(qx))_{q \in \mathbb{N}^*}$ est libre.

Exercice n° 13 (*)**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} .

Démontrer que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice n° 14 ()**

Soient F , G et H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbb{K} .

Montrer que : $\dim(F + G + H) \leq \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(G \cap H) - \dim(H \cap F) + \dim(F \cap G \cap H)$.

Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice n° 15 (*)**

Soient F_1, F_2, \dots, F_n n sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie sur \mathbb{K} ($n \geq 2$).

Montrer que $\dim(F_1 + \dots + F_n) \leq \dim F_1 + \dots + \dim F_n$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Exercice n° 16 ()**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 3$. Montrer que l'intersection de $n - 1$ hyperplans de E est non nulle.

Exercice n° 17 ()**

Soient (x_1, \dots, x_n) une famille de n vecteurs de rang r et (x_1, \dots, x_m) une sous famille de rang s ($m \leq n$ et $s \leq r$). Montrer que $s \geq r + m - n$. Cas d'égalité ?

Exercice n° 18 ()**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soient f et g deux applications linéaires de E dans F . Montrer que $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

Exercice n° 19 ()**

Soient E , F et G , trois \mathbb{K} -espaces vectoriels puis $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$.

Exercice n° 20 (*)**

Soient E un espace de dimension finie et F et G deux sous-espaces de E . Condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $F = \operatorname{Ker} f$ et $G = \operatorname{Im} f$.

Exercice n° 21 (*)**

Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie et f un endomorphisme de E .

Montrer que : **1)** (f non injective) $\Leftrightarrow (f = 0$ ou f diviseur de zéro à gauche).

2) (f non surjective) $\Leftrightarrow (f = 0$ ou f diviseur de zéro à droite).

Exercice n° 22 (*) I)**

Soient E un espace de dimension finie n non nulle et f un endomorphisme nilpotent de E . Montrer que $f^n = 0$.

Exercice n° 23 (*) I)**

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Justifier l'existence de A et B puis calculer BA .

Exercice n° 24 (*) I) (Noyaux itérés)**

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E . Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \operatorname{Ker}(f^k)$ et $I_k = \operatorname{Im}(f^k)$ puis

$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ et $I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$. (N est le nilspace de f et I le cœur de f)

1) a) Montrer que les suites $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.

b) Montrer que N et I sont stables par f .

c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, (N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})$.

2) On suppose de plus que $\dim E = n$ entier naturel non nul.

- a) Soit $A = \{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$ et $B = \{k \in \mathbb{N} / I_k = I_{k+1}\}$. Montrer qu'il existe un entier $p \leq n$ tel que $A = B = \{k \in \mathbb{N} / k \geq p\}$.
- b) Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.
- c) Montrer que $f_{/N}$ est nilpotent et que $f_{/I} \in GL(I)$.
- 3) Trouver des exemples où a) A est vide et B est non vide b) A est non vide et B est vide c) (****) A et B sont vides.
- 4) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $d_k = \dim(I_k)$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice n° 25 (*I)**

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice n° 26 (*I)**

Soit E un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de E qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de E .

Exercice n° 27 (I)**

Soient p et q deux projecteurs d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E .

Montrer que $(p + q \text{ projecteur}) \Leftrightarrow (p \circ q = q \circ p = 0) \Leftrightarrow (\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q) \text{ et } \text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p))$.

Dans le cas où $p + q$ est un projecteur, déterminer $\text{Ker}(p + q)$ et $\text{Im}(p + q)$.

Exercice n° 28 (I)**

Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Exercice n° 29 (**)**

Soient p_1, \dots, p_n n projecteurs d'un \mathbb{C} -espace de dimension finie. Montrer que $(p_1 + \dots + p_n \text{ projecteur}) \Leftrightarrow \forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0$.

Exercice n° 30 (*)**

Soit E un \mathbb{C} -espace de dimension finie n . Soient p_1, \dots, p_n n projecteurs non nuls de E tels que $\forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0$.

1) Montrer que tous les p_i sont de rang 1.

2) Soient q_1, \dots, q_n n projecteurs vérifiant les mêmes égalités. Montrer qu'il existe un automorphisme f de E tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, q_i = f \circ p_i \circ f^{-1}$.

Exercice n° 31 (*)**

Soit E un espace vectoriel. Soit G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(E)$ de cardinal n . Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de G et p un projecteur d'image F . Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1}$ est un projecteur d'image F .

Exercice n° 32 (*)**

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{M \in G} \text{Tr}(M) = 0$. Montrer que $\sum_{M \in G} M = 0$.

Exercice n° 33 (*) :**

Soit G un sous-groupe de $GL(E)$ avec $\dim E = n$ et $\text{card} G = p$. Soit $F = \{x \in E / \forall g \in G, g(x) = x\}$.

Montrer que $\dim(F) = \frac{1}{p} \sum_{g \in G} \text{Tr}g$.

Exercice n° 34 (*I)**

Soient A_1, \dots, A_p p matrices distinctes et inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $G = \{A_1, \dots, A_p\}$ soit stable pour la multiplication. Soit $A = A_1 + \dots + A_p$. Montrer que $\text{Tr}A$ est un entier divisible par p .

Exercice n° 35 (**)**

Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient des matrices inversibles.