

Résumé de sup : BERNOULLI

1) Loi de BERNOULLI

Définition. Soit $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X suit la **loi de BERNOULLI** de paramètre p si et seulement si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$ (et $P(X = 0) = 1 - p$). (Remarque. $X^2 = X$.)

Théorème. Si X suit une loi de BERNOULLI de paramètre p , $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration. $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

2) Loi binomiale

Définition. Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, notée $\mathcal{B}(n, p)$, si et seulement si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Théorème. Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Démonstration directe.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1 - p)^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{l=0}^{n-1} n \binom{n-1}{l} p^l (1 - p)^{(n-1)-l} \\ &= np(p + (1 - p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= np + \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1 - p)^{n-k} = np + n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1 - p)^{(n-2)-(k-2)} \\ &= np + n(n-1)p^2(p + (1 - p))^{n-2} = np + n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

puis

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np - np^2 = np(1 - p).$$

3) La loi binomiale comme somme de n variables de BERNOULLI indépendantes

Théorème. • Si X et Y sont deux variables indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) , alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(n + m, p)$.

• Si X_1, \dots, X_k sont des variables indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n_i, p) , $1 \leq i \leq k$,

alors $X_1 + \dots + X_k$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) où $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

• Si X_1, \dots, X_n sont des variables indépendantes suivant une loi de BERNOULLI de paramètre p , alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Démonstration.

• Soit $Z = X + Y$. $Z(\Omega) = \llbracket 0, n + m \rrbracket$. Puisque X et Y sont indépendantes, pour tout $k \in \llbracket 0, n + m \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X + Y = k) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket, i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=0}^k P(X = i) P(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1 - p)^{m-(k-i)} = p^k (1 - p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}. \end{aligned}$$

Maintenant, $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$ est le coefficient de X^k dans le développement de $(1+X)^n \times (1+X)^m = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} X^i \right) \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} X^j \right)$.

Puisque $(1+X)^n \times (1+X)^m = (1+X)^{n+m}$, ce coefficient est aussi $\binom{n+m}{k}$. Donc,

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} \text{ (relation de VANDERMONDE).}$$

Mais alors, $P(Z = k) = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}$. Ceci montre que Z suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$.

- Le deuxième résultat se montre par récurrence sur k et puisque X_1, \dots, X_{k+1} indépendantes $\Rightarrow X_{k+1}$ et $X_1 + \dots + X_k$ indépendantes.

- Le troisième résultat est le cas particulier $\forall i, n_i = 1$. Dans ce cas, $\sum_{i=1}^n n_i = n$.

Théorème. Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Démonstration. Soient X_1, \dots, X_n n variables indépendantes suivant la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(1, p)$. D'après ce qui précède, $X_1 + \dots + X_n = X$.

Par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + \dots + p = np$.

Puisque les variables X_1, \dots, X_n , sont indépendantes, les variables X_1, \dots, X_n , sont deux à deux indépendantes. On en déduit que $V(X) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = p(1-p) + \dots + p(1-p) = np(1-p)$.