

Résumé de Math Sup et compléments : déterminants

I - Applications multilinéaires

1) Définition.

Soient E_1, \dots, E_n, F $n + 1$ espaces vectoriels. Soit f une application de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F .

f est n -linéaire $\Leftrightarrow f$ est linéaire par rapport à chaque variable

$$\Leftrightarrow \forall (a_i)_{1 \leq i \leq n}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{l'application } E_i \rightarrow F \text{ est linéaire.}$$

$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Exemple. Un produit scalaire est bilinéaire.

Dans \mathbb{R}^3 euclidien orienté, $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire.

$$(x, y) \mapsto x \wedge y$$

Si $E_1 = \dots = E_n = E$ et $F = \mathbb{K}$, on obtient les formes n -linéaires sur E .

2/ Formes symétriques, antisymétriques, alternées.

Définition. Soit f une forme n -linéaire sur E .

- 1) f est symétrique $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \sigma \in S_n, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$.
- 2) f est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \sigma \in S_n, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$.
- 3) f est alternée $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, [(\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0]$.

Théorème. f est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \tau$ transposition de $\llbracket 1, n \rrbracket, f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration. Soit $\sigma \in S_n$, on écrit $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ où les τ_i sont des transpositions et on sait que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.

Théorème. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} sous-corps de \mathbb{C}) puis f une forme n -linéaire sur E .

f alternée $\Leftrightarrow f$ antisymétrique.

Démonstration.

\Rightarrow / Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Soient $i \neq j$ puis $\tau = \tau_{i,j}$.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Donc pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, pour toute transposition $\tau, f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n)$ et f est antisymétrique.

\Leftarrow / Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ tel qu'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j = x$.

L'égalité $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ s'écrit encore $f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n)$

ou encore $2f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n) = 0$ ou enfin $f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n) = 0$.

II- Formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n . Définition de la forme déterminant dans une base

1) Théorème fondamental. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On note $\Lambda_n^*(E)$ l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E .

Théorème. 1) $\Lambda_n^*(E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 1.

2) Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base donnée de E , il existe une et une seule forme f n -linéaire alternée sur E telle que $f(\mathcal{B}) = 1$.

Définition. L'unique forme f n -linéaire alternée sur E telle que $f(\mathcal{B}) = 1$ s'appelle la forme déterminant dans la base \mathcal{B} et se note $\det_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$ (où les $x_{i,j}$ sont dans \mathbb{K}).

Soit f une forme n -linéaire alternée sur E . En développant $f(x_1, \dots, x_n)$ par n -linéarité, on obtient une somme de n^n termes du type $x_{\chi(1),1} \dots x_{\chi(n),n} f(e_{\chi(1)}, \dots, e_{\chi(n)})$ où χ est une application quelconque de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même.

f est alternée et les termes correspondant aux applications χ telles que $\exists i \neq j / \chi(i) = \chi(j)$, sont nuls. Donc tous les termes pour lesquels χ n'est pas injective disparaissent. Maintenant, $\llbracket 1, n \rrbracket$ étant un ensemble fini, χ est injective si et seulement si χ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur lui-même ou encore une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Il ne reste donc que les termes du type $\chi_{\sigma(1),1} \dots \chi_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \chi_{\sigma(1),1} \dots \chi_{\sigma(n),n} f(e_1, \dots, e_n)$ où σ est un élément quelconque de S_n .

On a montré que nécessairement

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \chi_{\sigma(1),1} \dots \chi_{\sigma(n),n}.$$

Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, posons $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \chi_{\sigma(1),1} \dots \chi_{\sigma(n),n}$.

• φ est une forme n -linéaire sur E car linéaire par rapport à chaque variable.

• φ est non nulle car $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \delta_{\sigma(1),1} \dots \delta_{\sigma(n),n} = 1$.

• φ est alternée. En effet, soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ tel que $x_i = x_j$ pour un certain couple (i, j) tel que $i \neq j$.

Soit $\tau = \tau_{i,j}$. On sait que si A_n est l'ensemble des permutations paires, $A_n \tau$ est l'ensemble des permutations impaires. Donc

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in A_n} \chi_{\sigma(1),1} \dots \chi_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in A_n} \chi_{\sigma\tau(1),1} \dots \chi_{\sigma\tau(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} \chi_{\sigma(1),1} \dots \chi_{\sigma(i),i} \dots \chi_{\sigma(j),j} \dots \chi_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in A_n} \chi_{\sigma(1),1} \dots \chi_{\sigma(j),i} \dots \chi_{\sigma(i),j} \dots \chi_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} \chi_{\sigma(1),1} \dots \chi_{\sigma(i),i} \dots \chi_{\sigma(j),j} \dots \chi_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in A_n} \chi_{\sigma(1),1} \dots \chi_{\sigma(j),j} \dots \chi_{\sigma(i),i} \dots \chi_{\sigma(n),n} \text{ (car } x_i = x_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, $\Lambda_n^*(E) = \text{Vect}(\varphi)$ avec $\varphi \neq 0$ et $\Lambda_n^*(E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 1.

On a vu que $\varphi(\mathcal{B}) = 1$ et que si $f \in \Lambda_n^*(E)$, $f = f(\mathcal{B})\varphi$. Par suite, $f(\mathcal{B}) = 1 \Leftrightarrow f = \varphi$.

2) Propriétés.

Théorème.

- 1) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
- 2) $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.
- 3) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$.
- 4) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')$.

Démonstration. On applique : $\forall f \in \Lambda_n^*(E)$, $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

3) Applications.

a) Théorème. Soit \mathcal{B} une base de E de dimension finie $n \geq 1$ et \mathcal{B}' une famille de n vecteurs de E . \mathcal{B}' est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

Démonstration. Si \mathcal{B}' est une base, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$ et en particulier $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

Si \mathcal{B}' n'est pas une base, puisque $\text{card}(\mathcal{B}) = n$, \mathcal{B}' est liée. Par suite, l'un des vecteurs de \mathcal{B}' est combinaison linéaire des autres vecteurs de \mathcal{B}' . Par n linéarité de $\det_{\mathcal{B}}$ et puisque $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée, on a bien $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 0$.

b) Orientation.

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de $E \neq \{0\}$. On définit la relation : « \mathcal{B}' a même orientation que $\mathcal{B} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ ».

La relation précédente est une relation d'équivalence à deux classes. On appelle arbitrairement l'une des deux classes, classe des bases directes et l'autre, classe des bases indirectes. L'espace E est alors orienté.

III - Déterminant d'une matrice . Déterminant d'un endomorphisme .

1) Déterminant d'un endomorphisme.

a) Définition.

(Remarque. L'ordre de présentation 1) déterminant d'un endomorphisme 2) déterminant d'une matrice est un ordre qui permet de parvenir facilement à $\det(AB) = \det A \times \det B$).

Soit f une forme n -linéaire alternée non nulle sur E (de dimension finie non nulle n) et soit u un endomorphisme de E .

Soit f_u définie par : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f_u(x_1, \dots, x_n) = f(u(x_1), \dots, u(x_n))$.

f_u est une forme n -linéaire alternée sur E . Donc il existe un scalaire λ tel que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f_u(x_1, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$ ou encore telle que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$.

Montrons que λ ne dépend que de \mathbf{u} et pas de \mathbf{f} .

Soit \mathbf{g} une forme n -linéaire alternée sur E . Puisque $\dim \Lambda_n^*(E) = 1$, il existe un scalaire μ tel que $\mathbf{g} = \mu \mathbf{f}$. Donc pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}(x_1), \dots, \mathbf{u}(x_n)) = \mu \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_1), \dots, \mathbf{u}(x_n)) = \lambda \mu \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \lambda \mathbf{g}(x_1, \dots, x_n).$$

Définition. Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(E)$. Le déterminant de \mathbf{u} est le scalaire noté $\det(\mathbf{u})$ tel que $\forall \mathbf{f} \in \Lambda_n^*(E), \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$
 $\mathbf{f}(\mathbf{u}(x_1), \dots, \mathbf{u}(x_n)) = (\det(\mathbf{u})) \times \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)$.

b) Propriétés.

Théorème. Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Pour toute base \mathcal{B} de E , pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}(x_1), \dots, \mathbf{u}(x_n)) = (\det \mathbf{u}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- 2) Pour toute base \mathcal{B} de E , $\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}(\mathcal{B})) = \det(\mathbf{u})$.

Théorème.

- 1) $\det(\text{Id}) = 1$.
- 2) $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $\det(\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) = (\det \mathbf{u}) \times (\det \mathbf{v})$.
- 3) $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}(E)$, ($\mathbf{u} \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow \det \mathbf{u} \neq 0$) et dans ce cas, $\det(\mathbf{u}^{-1}) = (\det \mathbf{u})^{-1}$.

Démonstration. Soit \mathcal{B} une base de E .

- 1) $\det(\text{Id}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
- 2) $\det(\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}(\mathbf{v}(\mathcal{B}))) = (\det \mathbf{u}) \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}(\mathcal{B})) = (\det \mathbf{u})(\det \mathbf{v})$.
- 3) Si $\mathbf{u} \in \text{GL}(E)$, $(\det \mathbf{u})(\det(\mathbf{u}^{-1})) = \det(\mathbf{u} \circ \mathbf{u}^{-1}) = \det(\text{Id}) = 1 \neq 0$.
 Si $\det \mathbf{u} \neq 0$, $\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}(\mathcal{B})) = \det \mathbf{u} \neq 0$ et $\mathbf{u}(\mathcal{B})$ est une base de E puis $\mathbf{u} \in \text{GL}(E)$.

Théorème. $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda \mathbf{u}) = \lambda^n (\det \mathbf{u})$.

Danger. En général, $\det(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq \det \mathbf{u} + \det \mathbf{v}$.

2) Déterminant d'une matrice carrée.

a) Définition.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le déterminant de A est le nombre $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$.

Notation. $\det A = |a_{i,j}|_{1 \leq i,j \leq n}$.

b) Propriétés.

Théorème. Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans une base \mathcal{B} de E donnée. Alors $\det(\mathbf{u}) = \det(A)$.

Théorème. Deux matrices semblables ont même déterminant

Théorème. 1) L'application $\det : (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}, \times)$ est un morphisme et l'application

$$A \mapsto \det A$$

$\det : (\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupes.

$$A \mapsto \det A$$

- 2) $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- 3) $\det(I_n) = 1$.
- 4) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, [$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$] et dans ce cas $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Le noyau du morphisme de groupes $\det : (\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ c'est-à-dire l'ensemble des matrice carrées de

$$A \mapsto \det A$$

déterminant 1 est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ noté $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ (groupe spécial linéaire).

Théorème. $\det A = \det({}^t A)$.

Démonstration. $\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$.

Soit σ un élément donné de S_n . Si on pose $i_1 = \sigma(1), \dots, i_n = \sigma(n)$, alors $\sigma^{-1}(i_1) = 1, \dots, \sigma^{-1}(i_n) = n$.

Le monôme $a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$ s'écrit $a_{\sigma^{-1}(i_1),i_1} \dots a_{\sigma^{-1}(i_n),i_n}$ ou encore $a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n}$, après avoir remis dans l'ordre les n facteurs. Donc,

$$\begin{aligned} \det({}^t A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

car l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une permutation de S_n (puisque application involutive de S_n dans lui-même).

IV - Calculs de déterminants

- 1) **Transposition.** $\det A = \det({}^t A)$ et donc toutes les règles portant sur les colonnes sont encore valables sur les lignes.
- 2) **Matrices triangulaires.** Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.
- 3) **Opérations élémentaires.**
- a) $\forall \sigma \in S_n, \det(C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(C_1, \dots, C_n)$. Quand on permute des colonnes, le déterminant est multiplié par la signature de la permutation.
- b) Si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, le déterminant garde la même valeur.
- c) \det est n -linéaire et donc $\det(C_1, \dots, C_i + C'_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n)$ et $\det(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_n)$.
- Danger. $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ en général et $\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, \lambda C_n) = \lambda^n \det(C_1, \dots, C_n) = \lambda^n \det A$.
- 4) **Calculs par blocs.**

Théorème. Si les A_i sont des matrices carrées, $\det \begin{pmatrix} A_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix} = (\det A_1)(\det A_2) \dots (\det A_p)$.

Démonstration. On le montre pour $p = 2$ puis on termine par récurrence.

On montre que $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = (\det A)(\det B)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$. φ « est » une application n -linéaire alternée des colonnes de X .

$$X \mapsto \det \begin{pmatrix} X & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Donc, il existe une constante k (indépendante de X) telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(X) = k(\det X)$ avec $k = k \det(I_n) = \varphi(I_n)$ ce qui montre que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det \begin{pmatrix} X & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det X \times \det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

De même, l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ « est » une application p -linéaire alternée des lignes de Y .

$$X \mapsto \det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

Donc, il existe une constante k' (indépendante de Y) telle que $\forall Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \psi(Y) = k'(\det Y)$ avec $k' = k' \det I_p = \psi(I_p)$. Ceci montre que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \det \begin{pmatrix} X & C \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \det X \times \det Y \times \det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. Enfin le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produit de ses coefficients diagonaux et donc $\det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = 1$.

5) Développement suivant une ligne ou une colonne.

Théorème. Soient $m_{i,j}$ le mineur de $a_{i,j}$ et $A_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$ = cofacteur de $a_{i,j}$. Alors, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{i,k} \text{ (développement suivant la ligne } i) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,j} A_{k,j} \text{ (développement suivant la colonne } j) \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la formule de développement suivant une colonne car $\det A = \det({}^t A)$.

Ensuite, il suffit de démontrer la formule de développement suivant la première colonne car alors, si on veut développer suivant la colonne j , on effectue la permutation des colonnes $C_j \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \dots \rightarrow C_{j-1}$ dont la signature est $(-1)^{j-1}$ (signature d'un cycle de longueur j), puis en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\det A = (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^n a_{k,j} (-1)^{k+1} m_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,j} A_{k,j}$$

Il reste à démontrer la formule de développement suivant la première colonne.

C_1 est somme de n colonnes du type $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et par n -linéarité du déterminant, $\det A = \sum_{i=1}^n \det A_i$ où

$$\det A_i = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Si $i = 1$, un calcul de déterminant par blocs fournit $\det A_1 = a_{1,1} A_{1,1}$.

Si $i \geq 2$, on passe L_i en L_1 , L_1 en L_2, \dots , L_{i-1} en L_i . On obtient

$$\det A_i = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = A_{i,1} \text{ (calcul par blocs)}$$

et finalement $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,1} A_{i,1}$.

V - Comatrice. Inverse d'une matrice .

La comatrice de la matrice carrée A de format n est la matrice, notée $\text{com}A$, dont le coefficient ligne i , colonne j , est le cofacteur de l'élément $a_{i,j}$ de A , c'est-à-dire si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\text{com}(A) = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. La transposée de la comatrice de A est appelée matrice complémentaire de A et est notée \tilde{A} .

Théorème.

1) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I_n$ ou encore $A({}^t\text{com}A) = ({}^t\text{com}A)A = (\det A)I_n$.

2) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0)$ et dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t\text{com}A)$.

Démonstration. Le coefficient ligne i , colonne j de $A{}^t\text{com}A$ vaut $\sum_{k=1}^n a_{i,k}A_{j,k}$.

• Si $i = j$, cette expression n'est autre que le développement de $\det A$ suivant sa i -ème ligne et vaut donc $\det A$.

• Si $i \neq j$, $\sum_{k=1}^n a_{i,k}A_{j,k}$ est le développement suivant la ligne j du déterminant déduit de $\det A$ en remplaçant la ligne j de $\det A$ par sa ligne i (et en ne modifiant pas sa ligne i). Cette expression est donc nulle puisque égale à un déterminant ayant deux lignes identiques.

Ensuite, il est clair que $\text{com}({}^tA) = {}^t(\text{com}A)$ (à partir de la définition de $\text{com}A$) et donc $\tilde{A}A = ({}^t\text{com}A)A = \text{com}({}^tA){}^t({}^tA) = {}^t({}^tA{}^t(\text{com}({}^tA))) = {}^t((\det({}^tA)I_n)) = (\det A)I_n$.