Résumé de cours : Logique, ensembles, applications

I. Logique

1) Et, ou, non, implique.

($\wedge$ =et $\vee$ =ou $\overline{P}$ = la négation de P).

Th : $\overline{P\wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P}\vee\overline{Q}$ $\quad \overline{P\vee Q} \Leftrightarrow \overline{P}\wedge\overline{Q}$ (lois de De Morgan).

Th : « et » est distributif sur « ou » $(P\wedge(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge R))$
« ou » est distributif sur « et » $(P\vee(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

Def : La contraposée de $P\Rightarrow Q$ est $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$. La négation de $P\Rightarrow Q$ est $\overline{P\Rightarrow Q}$. La réciproque de $P\Rightarrow Q$ est $Q\Rightarrow P$.

Th : Une implication est équivalente à sa contraposée : $(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\overline{Q}\Rightarrow\overline{P})$.

Th : La négation de $P\Rightarrow Q$ est $P\wedge\overline{Q}$.

Par exemple, f continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ \forall x\in I\ \ (|x-x_0|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon)$ puis
f n'est pas continue en $x_0 \Leftrightarrow \exists\varepsilon>0,\ \forall\alpha>0/\ \exists x\in I\ \ (|x-x_0|\leqslant\alpha$ et $|f(x)-f(x_0)|>\varepsilon)$.

La réciproque d'une implication n'a aucun lien avec cette implication.

2) Quantificateurs.

Def : Soit $\mathscr{P}(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction d'un élément variable x de E.
Quand la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E, on écrit : $\forall x\in E,\ \mathscr{P}(x)$.
Quand la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, on écrit : $\exists x\in E,\ \mathscr{P}(x)$.

Tout résultat contenant une variable doit être précédé du quantificateur adéquat. Ainsi, $f(x)=0$ est une phrase qui n'a aucun sens. Il faut préciser si l'égalité est vraie pour tout x de E $(\forall x\in E,\ f(x)=0)$ ou pour au moins un x de E $(\exists x\in E/\ f(x)=0$ ou encore, l'équation $f(x)=0$ a (au moins) une solution).

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}}$ est mauvais et $\boxed{\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}}$ est bon.

Ceci aussi est très mauvais : $\boxed{\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}=2^{n-1}}$ alors que ceci est bon : $\boxed{\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}=2^{n-1}}$ et que ceci est faux : $\boxed{\displaystyle\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}=2^{n-1}}$

Les phrases suivantes sont très mauvaises : $f=0\Leftrightarrow f(x)=0$ ou aussi $f=\mathrm{Id}\Leftrightarrow f(x)=x$. On doit écrire : $f=0\Leftrightarrow\forall x\in E,\ f(x)=0$ et $f=\mathrm{Id}\Leftrightarrow\forall x\in E,\ f(x)=x$.

Méthode pour montrer : $\forall x\in E,\ \mathscr{P}(x)$ est vraie (toujours le même schéma) :
soit $x\in E$
...et donc $\mathscr{P}(x)$ est vraie.
On a montré que $\forall x\in E,\ \mathscr{P}(x)$ est vraie.

Méthode pour montrer : $\exists x\in E/\ \mathscr{P}(x)$ est vraie (presque toujours le même schéma) :
soit x_0 cet élément (on fournit explicitement un x)
...et x_0 est tel que $\mathscr{P}(x_0)$ est vraie.
On a montré que $\exists x\in E/\ \mathscr{P}(x)$ est vraie.

Th : $\overline{\forall x\in E,\ \mathscr{P}(x)}\Leftrightarrow\exists x\in E/\ \overline{\mathscr{P}(x)}$ et $\overline{\exists x\in E,\ \mathscr{P}(x)}\Leftrightarrow\forall x\in E/\ \overline{\mathscr{P}(x)}$.

Quand il y a plusieurs quantificateurs :
- on peut permuter deux quantificateurs de même nature.
- on ne peut pas permuter $\forall$ et $\exists$. Dans la phrase « $\exists x\in E/\ \forall y\in E,\ldots$ » le x fourni **ne dépend pas** de y ou encore le x fourni marche pour tous les y. Dans la phrase « $\forall y\in E,\ \exists x\in E/\ldots$ » le x fourni peut varier quand y varie ou encore le x fourni **dépend** de y.

Par exemple,
- f est une homothétie de $E\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{K}/\ f=\lambda\mathrm{Id}_E\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{K}/\ \forall x\in E,\ f(x)=\lambda x$ ce qui n'est pas du tout équivalent à $\forall x\in E,\ \exists\lambda\in\mathbb{K}/\ f(x)=\lambda x$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow\exists M\in\mathbb{R}/\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant M$ ce qui n'est pas du tout équivalent à $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists M\in\mathbb{R}/\ |u_n|\leqslant M$.

3) Variables muettes.

Dans les expressions suivantes, certaines variables sont muettes :

dans $\sum_{k=0}^{n} u_k$, la variable k est muette : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{i=0}^{n} u_i$. $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est une fonction de n mais pas de k.
dans $\int_0^x f(t)\,dt$, la variable t est muette : $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x f(u)\,du$. $\int_0^x f(t)\,dt$ est une fonction de x mais pas de t.
dans $\lim_{n\to+\infty} u_n$, la variable n est muette : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} u_p$.
dans $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, la variable i est muette : $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$.
dans $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la variable n est muette : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

« $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = n$ » est mauvais et « $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = n$ » est bon.
« $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ » est mauvais et « $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ » est bon.
« $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée » est mauvais et « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée » est bon.
« $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E » est mauvais et « $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E » est bon.
« $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante » est mauvais et « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante » est bon.
« $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ » est mauvais et « $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ » est bon ...

II. Ensembles

Intersection et réunion. Soit $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$. $A\cap B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à A **et** à B et $A\cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à A **ou** à B.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\in E/\ \forall i\in I,\ x\in A_i\}$ et $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x\in E/\ \exists i\in I,\ x\in A_i\}$.

Donc : $\forall x\in E$, $\left(x\in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i\in I,\ x\in A_i\right)$ et $\forall x\in E$, $\left(x\in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i\in I/\ x\in A_i\right)$.

Th : $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$.

Th : L'intersection et la réunion sont commutatives et associatives dans $\mathscr{P}(E)$. L'élément neutre pour $\cup$ est $\varnothing$ et l'élément neutre pour $\cap$ est E.
L'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur l'intersection.

Fonction caractéristique ou indicatrice.

Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. La fonction caractéristique (ou indicatrice) de A est la fonction de E dans $\{0,1\}$, notée χ_A (ou 1_A) définie par : $\forall x\in E$, $\chi_A(x) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x\in A \\ 0 \text{ si } x\notin A \end{array}\right.$.

Th : $\chi_{\overline{A}} = 1-\chi_A$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A\times\chi_B$ et $\chi_{A\cup B} = \chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B$.

Def : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E ($I\neq\varnothing$). $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si et seulement si
- $\forall i\in I$, $A_i\neq\varnothing$,
- $\forall i\neq j$, $A_i\cap A_j=\varnothing$,
- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

Dans ce cas, tout élément de E appartient à une et une seule partie A_i, $i\in I$.

III. Relations

1) Relations binaires.

Def : Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est :
réflexive $\Leftrightarrow \forall x\in E,\ x\mathscr{R}x$.
symétrique $\Leftrightarrow \forall (x,y)\in E^2,\ (x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x)$.
anti-symétrique $\Leftrightarrow \forall (x,y)\in E^2,\ (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x \Rightarrow x=y)$.
transitive $\Leftrightarrow \forall (x,y,z)\in E^3,\ (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z)$.

2) Relations d'équivalence.

Def : Une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation réflexive, symétrique et transitive.

Les relations suivantes sont des relations d'équivalence :

- l'égalité sur E ensemble quelconque
- la congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$ ($\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2$, $(a\equiv b\ [n] \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ b=a+kn)$.
- la relation de similitude sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ($\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, A et B semblables $\Leftrightarrow \exists P\in GL_n(\mathbb{K})/\ B=P^{-1}AP$).
- la relation $\sim$ sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang ($u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1$).

Def : Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. Soit $x\in E$. La classe d'équivalence de x est l'ensemble des éléments en relation avec x : $\widehat{x} = \{y\in E,\ x\mathscr{R}y\}$.

- $\widehat{x} = \widehat{y} \Leftrightarrow x\mathscr{R}y$.
- Tout élément d'une classe d'équivalence est un représentant de cette classe d'équivalence.
- Les classes d'équivalence forment une partition de E.

3) Relations d'ordre.

Def : Une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive.

Def : La relation d'ordre $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre total $\Leftrightarrow$ deux éléments quelconques de E sont toujours comparables ($\forall (x,y) \in E^2$, $(x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x)$).
La relation d'ordre $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre partiel $\Leftrightarrow$ il existe deux éléments de E qui ne sont pas comparables ($\exists (x,y) \in E^2$, $(x\text{non}\mathscr{R}y$ et $y\text{non}\mathscr{R}x)$).

Les relations suivantes sont des relations d'ordre :

$\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ (ordre total).
L'inclusion dans $\mathscr{P}(E)$ (relation d'ordre partiel dès que $\text{card}(E) \geqslant 2$).
La divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ ($\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $b|a \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^*/\ a = bq$) (ordre partiel)

IV. Applications

1) Injections, surjections, bijections.

Def : Soit f une application de E vers F.

- f est injective $\Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
$\Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ (le plus utilisé)
$\Leftrightarrow \forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, a au plus une solution.

(Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F et uniquement dans ce cas : f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Si f est une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et uniquement dans ce cas : si f est strictement monotone sur I, alors f est injective. Si de plus f est continue : f est injective si et seulement si f est strictement monotone).

- f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists x \in E/\ y = f(x)$.
$\Leftrightarrow \forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, a au moins une solution.

- f est bijective $\Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists! x \in E/\ y = f(x)$.
$\Leftrightarrow \forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, a exactement une solution.

Th : Soient f une application de E vers F et g une application de F vers G.
Si f et g injectives, alors $g \circ f$ injective. Si f et g surjectives, alors $g \circ f$ surjective. Si f et g bijectives, alors $g \circ f$ bijective.

Th : Soient f une application de E vers F et g une application de F vers G.
Si $g \circ f$ injective, alors f injective. Si $g \circ f$ surjective, alors g surjective.

Def : Soit f une bijection de E sur F.
La réciproque de f est l'application de F vers E définie par : $\forall (x,y) \in E \times F,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Th : Si f est bijective, $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

Th : Soit f une application de E vers F. Si il existe une application g de F vers E telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$, alors f est bijective et de plus $g = f^{-1}$. En général, une seule égalité ne suffit pas (penser à $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} n-1 \text{ si } n \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } n = 0 \end{array} \right. \end{array}$).

Th : Soit f une bijection de E sur F. Alors, f^{-1} est une bijection de F sur E et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Th : Soient f une bijection de E sur F et g une bijection de F sur G. $g \circ f$ est bijective et de plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2) Image directes, images réciproques d'une partie par une application.

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. Soient A une partie de E et B une partie de F.

L'image directe de la partie A par l'application f est : $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$. $f(A)$ est donc l'ensemble des images des éléments de A par f :

$$\forall y \in F,\ (y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A/\ f(x) = y)\,.$$

L'image réciproque de la partie B par l'application f est : $f^{-1}(B) = \{x \in E/\ f(x) \in B\} = \{x \in E/\ \exists y \in B/\ y = f(x)\}$. $f^{-1}(B)$ est donc l'ensemble des antécédents des éléments de B par f :

$$\forall x \in E,\ \left(x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B\right)\,.$$

$f^{-1}(B)$ a toujours une signification même si f n'est pas bijective. Dans la notation $f^{-1}(B)$, il ne faut pas lire ; l'image de la partie B par la réciproque de f. Par contre, si f est bijective, $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des images des éléments de B par la réciproque f^{-1}.

Th : Soit $f : E \to F$ une application.

1) $\forall (A, B) \in (\mathscr{P}(F))^2$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(C_F(A)) = C_E\left(f^{-1}(A)\right)$ (tout se passe bien avec l'image réciproque).

2) $\forall (A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (avec égalité pour tout (A, B) si et seulement si f est injective), $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ (ça se passe nettement moins bien avec l'image directe).

3) $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ (avec égalité pour tout A si et seulement si f est injective) et $\forall B \in \mathscr{P}(F)$, $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ (avec égalité pour tout B si et seulement si f est surjective).