Topologie

La chronologie adoptée pour écrire ce cours complet n'est pas mathématiquement correcte. Ce chapitre a le numéro 13 alors qu'il devrait arriver en tête des chapitres d'analyse de même que le chapitre sur les structures doit arriver en en tête des chapitres d'algèbre.
La chronologie des chapitres a été choisie pour des raisons scolaires. Le chapitre « Topologie » est souvent vécu par bon nombre d'élèves comme difficile et abstrait et il peut être assez décourageant de le découvrir en début d'année. D'autre part, bon nombre de problèmes de concours peuvent être traités en totalité ou en grande partie sans connaissances particulières en topologie et il est donc tout à fait jouable de retarder l'apparition de ce chapitre dans l'année.

De quoi s'agit-il ? Un certain nombre de résultats d'analyse en sup sont de la topologie : la définition de la convergence d'une suite réelle, la notion d'intervalle ouvert (notion qui intervient dans le théorème « si f est dérivable sur un intervalle **ouvert** à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admet un extremum en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$ ») ou fermé (notion qui intervient dans le théorème « si f est continue sur un intervalle **fermé borné,** à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors f admet un minimum et un maximum ») ...
Le problème est alors de généraliser ces différentes notions. Que devient la notion d'intervalle ouvert dans le plan ou encore qu'est-ce qu'un domaine ouvert du plan ? De même, la convergence d'une suite réelle est définie à partir d'une évaluation de la distance d'un terme de la suite à sa limite grâce à la valeur absolue : $\dots |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Que devient cette notion de distance pour deux points du plan ou pour deux polynômes dans l'espace des polynômes ? Là, c'est la notion de norme par laquelle nous commencerons.

Plus généralement, il s'agit d'analyser en tant que tel l'« espace ». Le mot topologie vient des mots grecs « topos » (qui signifie : lieu) et « logia » (qui signifie : étude). Littéralement, la topologie est l'étude du lieu.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Espaces vectoriels normés

1) *Normes*

1-a) Définition

Définition 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **norme** sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les quatre axiomes :

1) $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ (positivité) ;
2) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (axiome de séparation) ;
3) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité) ;
4) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Remarque. Une conséquence des axiomes précédent est que $N(0) = 0$ (en appliquant **3)** avec $\lambda = 0$).

Définition 2. Un **espace vectoriel normé** est un couple (E, N) où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N est une norme sur E.

Théorème 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N une norme sur E.

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y).$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. $N(x) = N(x-y+y) \leqslant N(x-y)+N(y)$ et donc $N(x)-N(y) \leqslant N(x-y)$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient $N(y) - N(x) \leqslant (y - x) = N(x - y)$ et finalement, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$.

1-b) Exemples de normes

Dans les exemples qui suivent, nous n'effectuerons qu'une seule démonstration explicite, la plus délicate, à savoir montrer que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(I, \mathbb{K})$. Néanmoins, vous devez considérer toutes les normes explicitées ci-dessous.

Exemple 1 (trois normes sur $\mathbb{K}^n$). Pour $x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \operatorname{Max}\{|x_k|,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

$\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Exemple 2 (norme hilbertienne). Si $(E, (\ |\ ))$ est un espace prehilbertien réel, alors on sait que $\| \|\ :\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E. $\| \|$ est la norme hilbertienne associée au produit scalaire $(\ |\ )$.

Exemple 3 (trois normes sur des espaces de fonctions).

• Soit $E = \mathscr{B}(I, \mathbb{K})$ (espace des fonctions bornées sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$) que l'on peut aussi noter $L^\infty(I, \mathbb{K})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \text{Sup}\{|f(x)|,\ x \in I\}.$$

$\| \|_\infty$ est une norme sur E appelée **norme de la convergence uniforme**. Démontrons-le.

- Soit $f \in E$. f est bornée sur I et admet donc $\mathfrak{l}f|$ admet sur I une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
$\| \|_\infty$ est donc une application de I dans $\mathbb{R}$.

- Soit $f \in E$. $|f|$ est positive sur I et donc $\|f\|_\infty$ est un réel positif.

- Soit $f \in E$.

$$\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant 0 \Rightarrow \forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

- Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si $\lambda = 0$, alors $\|\lambda f\|_\infty = \|0\|_\infty = 0 = |0| \times \|f\|_\infty$. On suppose dorénavant $\lambda \neq 0$.
Pour tout x de I, $|\lambda f(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$. Ainsi, $|\lambda| \times \|f\|_\infty$ est un majorant de $\{|\lambda f(x)|,\ x \in I\}$. Puisque $\|\lambda f\|_\infty$ est le plus petit de ces majorants, on a montré que $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$.
Pour tout $\lambda \neq 0$, on a $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$. Par suite, $\|f\|_\infty = \left\|\dfrac{1}{\lambda}(\lambda f)\right\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$ et donc $|\lambda| \times \|f\|_\infty \leqslant \|\lambda f\|_\infty$.
Finalement, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$.

- Soient $(f, g) \in E^2$. Pour tout x de I,

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ainsi, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $\{|f(x) + g(x)|,\ x \in I\}$. Puisque $\|f + g\|_\infty$ est le plus petit de ces majorants, on a montré que $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Tout ceci démontre que $\| \|_\infty$ est effectivement une norme dans $\mathscr{B}(I, \mathbb{K})$.

• Soit $E = L^1(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues et intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)|\ dx.$$

$\| \|_1$ est une norme sur E appelée **norme de la convergence en moyenne**.

• Soit $E = L^2(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de carré intégrable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(x)|^2\ dx}.$$

$\| \|_2$ est une norme sur E appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**.

Dans le cas particulier où $E = C^0([a, b], \mathbb{K})$, $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sont trois normes sur E.

Exemple 4 (trois normes sur des espaces de suites).

• Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{K})$ l'espace des suites d'éléments bornées d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour $u \in E$, on pose

$$\|u\|_\infty = \text{Sup}\{|u_n|,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

$\| \|_\infty$ est une norme sur E.

• Soit $E = \ell^1(\mathbb{K})$ l'espace des suites sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour $u \in E$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

$\| \|_1$ est une norme sur E.

• Soit $E = \ell^2(\mathbb{K})$ l'espace des suites de carré sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour $u \in E$, on pose

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}.$$

$\| \ \|_2$ est une norme sur E.

1-c) Distance associée à une norme

Une norme sur E sert à mesurer l'écart entre deux éléments de E. Par exemple, quand on voudra analyser la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E vers un élément ℓ de E, il faudra analyser le comportement de $\|u_n - \ell\|$ quand n tend vers $+\infty$. Donc,

Définition 3. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

Pour $(x, y) \in E^2$, la **distance** de x à y est $d(x, y) = \|x - y\|$.

Commentaire. La notion de distance est une notion mathématique qui est normalement définie par une liste d'axiomes, comme les normes. On ne donnera pas ici cette définition. ❑

1-d) Normes équivalentes

Supposons qu'un même espace vectoriel E soit muni de deux normes N et N'. Quand on parlera par exemple de la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E vers un élément ℓ de E, on analysera la distance de u_n à ℓ. Cette distance est $N(u_n - \ell)$ dans l'espace vectoriel normé (E, N) et $N'(u_n - \ell)$ dans l'espace vectoriel normé (E, N'). Un problème se posera alors : est-il équivalent de dire $N(u_n - \ell)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $N'(u_n - \ell)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ou encore est-il équivalent de dire « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans l'espace vectoriel normé (E, N) » et « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans l'espace vectoriel normé (E, N') » ? On met maintenant en place une notion qui permettra le moment venu de régler ce problème, la notion de **normes équivalentes** :

Définition 4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis N et N' deux normes sur E.

N' est équivalente à N si et seulement si il existe deux réels **strictement positifs** α et β tels que

$$\forall x \in E,\ \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x).$$

Théorème 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La relation « N' est équivalente à N » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Démonstration. Notons $\mathscr{R}$ la relation considérée.

• Soit N une norme sur E. Soit $\alpha = \beta = 1$. α et β sont deux réels strictement positifs tels que pour tout x de E, $\alpha N(x) \leqslant N(x) \leqslant \beta N(x)$. Donc, N est équivalente à N. Ceci montre que $\mathscr{R}$ est réflexive.

• Soient N et N' deux normes sur E. Supposons que N' soit équivalente à N. Il existe deux réels strictement positifs α et β tels que pour tout x de E, $\alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$. Mais alors, pour tout x de E,

$$\frac{1}{\beta} N'(x) \leqslant N(x) \leqslant \frac{1}{\alpha} N'(x).$$

Puisque $\dfrac{1}{\beta}$ et $\dfrac{1}{\alpha}$ sont deux réels strictement positifs, N est équivalente à N'. Ceci montre que $\mathscr{R}$ est symétrique.

• Soient N, N' et N'' trois normes sur E. Supposons N' équivalente à N et N'' équivalente à N'. Il existe quatre réels strictement positifs α, β, α' et β' tels que pour tout x de E, $\alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$ et $\alpha' N'(x) \leqslant N''(x) \leqslant \beta' N'(x)$. Mais alors, pour tout x de E,

$$\alpha\alpha' N(x) \leqslant \alpha' N'(x) \leqslant N''(x) \leqslant \beta' N'(x) \leqslant \beta\beta' N(x).$$

Puisque $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ sont deux réels strictement positifs, N'' est équivalente à N. Ceci montre que $\mathscr{R}$ est transitive.

On a montré que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Commentaire 1. On peut donc se permettre de dire : « N et N' sont équivalentes ». ❑

Commentaire 2. Les réels α et β de la définition ont deux caractéristiques : ils sont **strictement** positifs et ils sont **indépendants** de x. ❑

Exercice 1. Dans $E = \mathbb{R}^n$, montrer que $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sont des normes deux à deux équivalentes.

Solution 1.

• Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty = n\,\|x\|_\infty .$$

Inversement, si i_0 est un indice tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$, alors

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n| = \|x\|_1.$$

Donc,

$$\| \|_\infty \leqslant \| \|_1 \leqslant n\| \|_\infty.$$

Ceci montre que $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ sont deux normes équivalentes.

• Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

Inversement, si i_0 est un indice tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$, alors

$$\|x\|_\infty = \sqrt{x_{i_0}^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|_2.$$

Donc,

$$\| \|_\infty \leqslant \| \|_2 \leqslant \sqrt{n}\| \|_\infty.$$

Ceci montre que $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ sont deux normes équivalentes.

• Par transitivité, on en déduit que $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont deux normes équivalentes.

Commentaire 1. On verra plus loin que quand E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** sur $\mathbb{K}$, deux normes données sur E sont toujours équivalentes. ❏

Commentaire 2. On peut obtenir directement des inégalités entre $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sans passer par $\| \|_\infty$. Pour $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit

$$\|x\|_1 = 1 \times |x_1| + \ldots + 1 \times |x_n| \leqslant \sqrt{1^2 + \ldots + 1^2}\sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = \sqrt{n}\|x\|_2.$$

D'autre part,

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |x_i|\,|x_j|} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1.$$

❏

Exercice 2. Dans $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, on pose $N(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ et $N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx$.

1) Montrer que N' est une norme sur E.
2) Comparer les normes N et N' et en particulier vérifier que N et N' ne sont pas équivalentes.

Solution 2.

1) • Soit $f \in E$. f' est alors définie et continue sur le segment $[0,1]$. On en déduit que $N'(f)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• Soit $f \in E$. $N'(f) = |f'(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx \geqslant 0$.

• Soit $f \in E$.

$$N'(f)=0 \Rightarrow |f(0)|=\int_0^1 |f'(x)|\,dx=0$$
$$\Rightarrow |f(0)|=0 \text{ et } \forall x\in[0,1],\ |f'(x)|=0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}$$
$$\Rightarrow f(0)=0 \text{ et } f'=0 \Rightarrow f(0)=0 \text{ et } \forall x\in[0,1],\ f(x)=f(0)$$
$$\Rightarrow f=0.$$

• Soient $f\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$N'(\lambda f)=|\lambda f(0)|+\int_0^1 |\lambda f'(x)|\,dx=|\lambda|\left(|f(0)|+\int_0^1 |f'(x)|\,dx\right)=|\lambda|N'(f).$$

• Soit $(f,g)\in E^2$.

$$N'(f+g)=|f(0)+g(0)|+\int_0^1 |f'(x)+g'(x)|\,dx \leqslant |f(0)|+\int_0^1 |f'(x)|\,dx+|g(0)|+\int_0^1 |g'(x)|\,dx=N'(f)+N'(g).$$

On a montré que N' est une norme sur E.

2) Soit $f\in E$. Pour $x\in[0,1]$,

$$|f(x)|=\left|f(0)+\int_0^x f'(t)\ dt\right|\leqslant |f(0)|+\int_0^x |f'(t)|\,dt$$
$$\leqslant |f(0)|+\int_0^1 |f'(t)|\,dt=N'(f).$$

Par suite, $N(f)=\int_0^1 |f(x)|\,dx\leqslant\int_0^1 N'(f)\,dx=N'(f)$. On a montré que $N\leqslant N'$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$, posons $f_n(x)=x^n$. Chaque f_n est un élément de E tel que $N(f_n)=\dfrac{1}{n+1}$ et $N'(f_n)=1$. Supposons par l'absurde qu'il existe un réel strictement positif α tel que $\alpha N'\leqslant N$. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha N'(f_n)\leqslant N(f_n)$ ou encore

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<\alpha\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $0<\alpha\leqslant 0$ ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas un réel strictement positif α tel que $\alpha N'\leqslant N$. Ceci montre que

les normes N et N' ne sont pas des normes équivalentes.

Commentaire. Quand E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, il est donc possible que deux normes données sur E ne soient pas des normes équivalentes. ❏

2) Produits d'espaces vectoriels normés

Nous vous laissons démontrer le théorème suivant :

Théorème 3. Soient (E_1,N_1), ..., (E_k,N_k) des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Pour $x=(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\times\ldots\times E_n$, on pose $N(x)=\text{Max}\{N_i(x_i),\ 1\leqslant i\leqslant k\}$. Alors, N est une norme sur $E_1\times\ldots\times E_n$.

3) Boules

Définition 5. Soit $(E,\|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soient $x_0\in E$ et $R\in]0,+\infty[$. La **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon R est $B_o(x_0,R)=\{x\in E/\ \|x-x_0\|<R\}$.
Soient $x_0\in E$ et $R\in[0,+\infty[$. La **boule fermée** de centre x_0 et de rayon R est $B_f(x_0,R)=\{x\in E/\ \|x-x_0\|\leqslant R\}$.
Soient $x_0\in E$ et $R\in[0,+\infty[$. La **sphère** de centre x_0 et de rayon R est $S(x_0,R)=\{x\in E/\ \|x-x_0\|=R\}$.

La boule unité fermée (resp. ouverte) est $B_f(0,1)$ (resp. $B_o(0,1)$). La sphère unité est l'ensemble des vecteurs de E de norme 1 ou des vecteurs **unitaires** de E.

Théorème 4. Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Toute boule ouverte (resp. fermée) est un convexe de l'espace vectoriel E.

Démonstration.

• Soient $x_0 \in E$ et $R \geqslant 0$. Soient $(x, y) \in B_f(x_0, R)^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}\|((1-\lambda)x+\lambda y)-x_0\| &= \|(1-\lambda)(x-x_0)+\lambda(y-x_0)\| \\ &\leqslant |1-\lambda|\,\|x-x_0\|+|\lambda|\,\|y-x_0\| = (1-\lambda)\|x-x_0\|+\lambda\|y-x_0\| \\ &\leqslant (1-\lambda)R+\lambda R = R.\end{aligned}$$

Donc, $\forall (x, y) \in B_f(x_0, R)^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $(1-\lambda)x+\lambda y \in B_f(x_0, R)$. Ceci montre que $B_f(x_0, R)$ est convexe.

• Soient $x_0 \in E$ et $R > 0$. Soient $(x, y) \in B_o(x_0, R)^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}\|((1-\lambda)x+\lambda y)-x_0\| &= \|(1-\lambda)(x-x_0)+\lambda(y-x_0)\| \\ &\leqslant |1-\lambda|\,\|x-x_0\|+|\lambda|\,\|y-x_0\| = (1-\lambda)\|x-x_0\|+\lambda\|y-x_0\|.\end{aligned}$$

Si $\lambda \in]0, 1]$, on a $\lambda > 0$ et $\|y-y_0\| < R$ et donc $\lambda\|y-y_0\| < \lambda R$. D'autre part, $(1-\lambda)\|x-x_0\| \leqslant (1-\lambda)R$ et donc

$$\|((1-\lambda)x+\lambda y)-x_0\| < (1-\lambda)R+\lambda R = R.$$

Cette inégalité reste vraie quand $\lambda = 0$ car $\|x-x_0\| < R$.

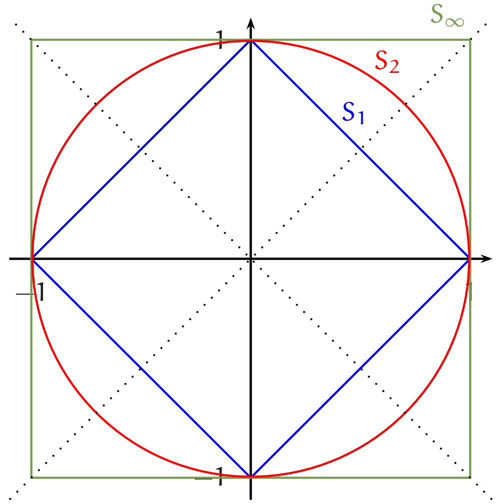
Donc, $\forall (x, y) \in B_o(x_0, R)^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $(1-\lambda)x+\lambda y \in B_o(x_0, R)$. Ceci montre que $B_o(x_0, R)$ est convexe.

Exercice 3. Dessiner les sphères unités de $E = \mathbb{R}^2$ muni de $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $| \ \|_\infty$.

Solution 3. Notons respectivement S_1, S_2, et S_∞ les sphères unités de $\mathbb{R}^2$ muni de respectivement $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $| \ \|_\infty$. De manière générale, si N est une norme et S la sphère unité associée, alors S est symétrique par rapport à 0 car pour tout u de $\mathbb{R}^2$, $N(-u) = N(u)$ et donc $N(u) = 1 \Leftrightarrow N(-u) = 1$. S_1, S_2, et S_∞ sont donc symétriques par rapport à O.

$S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x|+|y| = 1\right\}$, $S_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 = 1\right\}$ et $S_\infty = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ \mathrm{Max}(|x|, |y|) = 1\right\}$. Dans les trois cas, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $N((x, y)) = 1 \Leftrightarrow N((\pm x, \pm y)) = 1$. S_1, S_2, et S_∞ sont donc symétriques par rapport à O, (Ox) et (Oy). Dans les trois cas, on a également $N((x, y)) = 1 \Leftrightarrow N((y, x)) = 1$. Les trois sphères sont également symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. On dessine la partie de S contenue dans le huitième de plan H défini par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $y \leqslant x$, et on complète par symétrie.

$S_1 \cap H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x+y = 1\right\} \cap H$ et $S_\infty \cap H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x = 1\right\} \cap H$ et on obtient le dessin suivant :



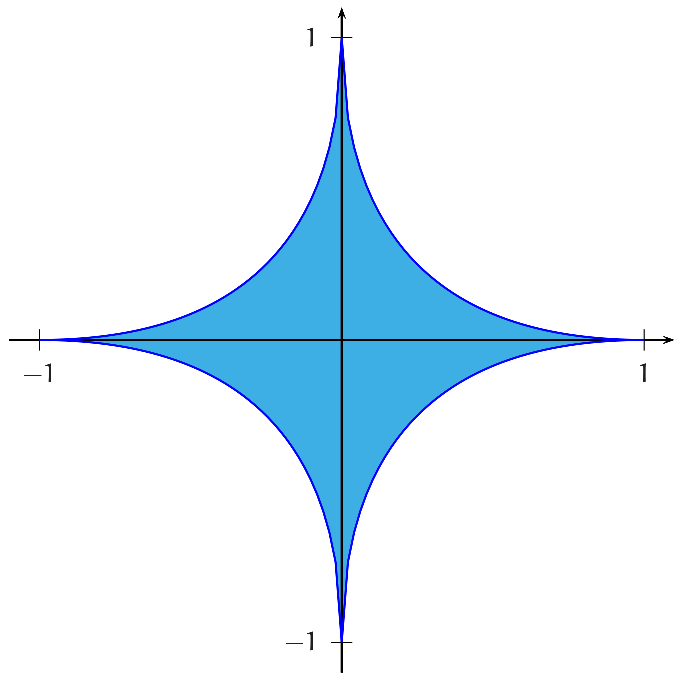
On note que les mots « sphère » et « boule » n'ont pas forcément la signification à laquelle on pense.

Exercice 4. Sur $E = \mathbb{R}^2$, on pose $N((x,y)) = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$. Montrer que N n'est pas une norme sur E.

Solution 4. Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ N((x,y)) \leqslant 1\}$. $(1,0)$ et $(0,1)$ sont deux éléments de B. Vérifions que l'élément $u = \dfrac{1}{2}(1,0) + \dfrac{1}{2}(0,1)$ n'est pas un élément de B. $u = \dfrac{1}{2}(1,0) + \dfrac{1}{2}(0,1) = \dfrac{1}{2}(1,1)$ puis

$$N(u) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1} + \sqrt{1}\right)^2 = 2 > 1.$$

Donc, $u \notin B$. Ceci montre que B n'est pas convexe et en particulier que N n'est pas une norme sur E. Dessinons l'ensemble des vecteurs (x,y) de R^2 tels que $N((x,y)) \leqslant 1$.



II - Suites

1) *Suites bornées*

Définition 6. Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}^+ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \|u_n\| \leqslant M$.

Commentaire. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée équivaut à dire que la suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels majorée. ❏

Exemple. On munit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ des normes N et N' de l'exercice n° 2, page 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = (n+1)x^n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$N(f_n) = \int_0^1 (n+1)x^n \, dx = 1.$$

Donc, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de l'espace vectoriel (E, N).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$N'(f_n) = 0 + \int_0^1 (n+1)nx^{n-1} \, dx = n+1.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite bornée de l'espace vectoriel (E, N').

La notion de suite bornée dépend donc bien sûr de la norme utilisée. ❏

Théorème 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient N et N' deux normes sur E.

Si N et N' sont équivalentes, alors pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de l'espace vectoriel normé (E, N) si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de l'espace vectoriel normé (E, N').

Démonstration. Par hypothèse, il existe deux réels strictement positifs tels que $\alpha N \leqslant N' \leqslant \beta N$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

On suppose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée pour la norme N. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N(u_n) \leqslant M$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$N'(u_n) \leqslant \beta N(u_n) \leqslant \beta M.$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée pour la norme N'. En échangeant les rôles de N et N', on a aussi : si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée pour la norme N', alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée pour la norme N.

Finalement, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme N si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme N'.

Théorème 6. Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. L'ensemble $\ell^\infty(E)$ des suites d'éléments de E qui sont bornées est un sous-espace vectoriel de $\left(E^{\mathbb{N}}, +, .\right)$.

De plus, l'application $N_\infty\ :\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \mathrm{Sup}\{\|u_n\|,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une norme sur $\ell^\infty(E)$.

Démonstration. • La suite nulle est bornée et donc la suite nulle est un élément de $\ell^\infty(E)$.
• Soient $(u, v) \in (\ell^\infty(E))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe deux réels positifs M et M' tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant M$ et $\|v_n\| \leqslant M'$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\lambda u_n + \mu v_n\| \leqslant |\lambda|\,\|u_n\| + |\mu|\,\|v_n\| \leqslant |\lambda|M + |\mu|M'.$$

Donc, la suite $\lambda u + \mu v$ est dans $\ell_\infty(E)$.

On a montré que $\ell^\infty(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\left(E^{\mathbb{N}}, +, .\right)$. Vérifions alors que N_∞ est une norme sur E.

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(E)$. $\{\|u_n\|,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Donc, $\mathrm{Sup}\{\|u_n\|,\ n \in \mathbb{N}\}$ existe dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que N_∞ est une application de $\ell^\infty(E)$ dans $\mathbb{R}$.

• $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(E)$, $N_\infty(u) \geqslant 0$.

• $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(E)$, $N_\infty(u) = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0 \Rightarrow u = 0$.

• Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\lambda u_n\| = |\lambda|\,\|u_n\| \leqslant |\lambda| N_\infty(u)$. Ainsi, $|\lambda| N_\infty(u)$ est un majorant de $\{\|\lambda u_n\|,\ n \in \mathbb{N}\}$. Puisque $N_\infty(\lambda u)$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $N_\infty(\lambda u) \leqslant |\lambda| N_\infty(u)$.

Maintenant, si $\lambda \neq 0$, $N_\infty(u) = N_\infty\left(\dfrac{1}{\lambda}\lambda u\right) \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda u)$. Donc, $|\lambda| N_\infty(u) \leqslant N_\infty(\lambda u)$ puis $|\lambda| N_\infty(u) = N_\infty(\lambda u)$. Si $\lambda = 0$, on a directement $|\lambda| N_\infty(u) = N_\infty(\lambda u)$.

• Soit $(u, v) = \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in (\ell^\infty(E))^2$. Pour tout entier naturel n,

$$\|u_n + v_n\| \leqslant \|u_n\| + \|v_n\| \leqslant N_\infty(u) + N_\infty(v).$$

Ainsi, $N_\infty(u) + N_\infty(v)$ est un majorant de $\{\|u_n + v_n\|,\ n \in \mathbb{N}\}$. Puisque $N_\infty(u + v)$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $N_\infty(u + v) \leqslant |\lambda| N_\infty(u) + N_\infty(v)$.

On a montré que N_∞ est une norme sur $\ell^\infty(E)$.

---

2) *Suites convergentes*

2-1) Définition

Définition 7. Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon).$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si il existe $\ell \in E$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Dans le cas contraire, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

Commentaire. Une définition équivalente est

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in B_f(\ell, \varepsilon)).$$

. ❑

Un résultat immédiat est

Théorème 7. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \Leftrightarrow (u_n-\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_E \Leftrightarrow (\|u_n-\ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème 8. Si ℓ existe, ℓ est unique.

Démonstration. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et ℓ' deux éléments de E. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n_1\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_1$, $\|u_n-\ell\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ et il existe $n_2\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_2$, $\|u_n-\ell'\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $n_0=\text{Max}\{n_1,n_2\}$.

$$\|\ell-\ell'\|\leqslant\|\ell-u_{n_0}\|+\|u_{n_0}-\ell'\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ainsi, $\forall\varepsilon>0$, $\|\ell-\ell'\|\leqslant\varepsilon$. Ainsi, $\|\ell-\ell'\|$ est un réel positif inférieur ou égal à tout réel positif. Par suite, $\|\ell-\ell'\|=0$ et donc $\ell=\ell'$.

Commentaire 1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on peut dire que ℓ est **la** limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$. ❑

Commentaire 2. Comme on l'a déjà signalé en maths sup, il n'est pas question de dire que la suite $((-1)^n)^{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et -1 car une suite ne peut avoir deux limites distinctes. On sait que la suite $((-1)^n)^{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. ❑

La notion de convergence est définie à partir d'une norme. Si on change de norme (et donc on change d'espace vectoriel normé), il est possible que la suite considérée ne converge plus.
Par exemple, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, posons $f_n(x)=\sqrt{n}x^n$. Chaque f_n est un élément de $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout entier naturel n,

$$\|f_n\|_1=\int_0^1\sqrt{n}x^n\,dx=\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|_1=0$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle dans l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_1)$.
D'autre part, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_2=\sqrt{\int_0^1 nx^{2n}\,dx}=\sqrt{\frac{n}{2n+1}}.$$

Par suite, $\|f_n\|_2$ tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ quand n tend vers $+\infty$ et en particulier, $\|f_n-0\|_2$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_2)$.

Théorème 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient N et N' deux normes sur E.

Si N et N' sont équivalentes, alors pour tout $\ell\in E$ et toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans (E,N) si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans (E,N').

Démonstration. Soient N et N' deux normes équivalentes. Soient α et β deux réels strictement positifs tels que $\alpha N\leqslant N'\leqslant\beta N$.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell\in E$. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans l'espace vectoriel normé (E,N). Alors,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\ (n\geqslant n_0\Rightarrow N(u_n-\ell)\leqslant\varepsilon).$$

Soit $\varepsilon>0$. Soit $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $N(u_n-\ell)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\beta}$. Pour $n\geqslant n_0$, on a

$$N'(u_n-\ell)\leqslant\beta N(u_n-\ell)\leqslant\beta\frac{\varepsilon}{\beta}=\varepsilon.$$

On a montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\ (n\geqslant n_0\Rightarrow N'(u_n-\ell)\leqslant\varepsilon)$$

et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans l'espace vectoriel normé (E,N'). En échangeant les rôles de N et N', ceci montre aussi que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans l'espace vectoriel normé (E,N'), alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans l'espace vectoriel normé (E,N).

Exemple. Reprenons l'exemple des normes N et N' définies sur $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ par $N(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$ et $N'(f) = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = x^n$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E. Pour tout entier naturel n, $N(f_n) = \dfrac{1}{n+1}$ et pour tout entier naturel n, $N'(f_n) = 1$ (y compris pour $n = 0$). Donc, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N) et ne converge pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N'). On en déduit que les normes N et N' ne sont pas des normes équivalentes.

2-2) Propriétés

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N est une norme sur E donnée.

Théorème 10. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (pour la norme N), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (pour la même norme N).

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers un certain élément ℓ de E. Il existe un entier n_0 strictement positif tel que pour $n \geqslant n_0$, $N(u_n - \ell) \leqslant 1$. Pour $n \geqslant n_0$,

$$N(u_n) = N(u_n - \ell + \ell) \leqslant N(u_n - \ell) + N(\ell) \leqslant 1 + N(\ell).$$

Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$N(u_n) \leqslant \text{Max}\{N(u_0 - \ell), \dots, N(u_{n_0-1} - \ell), 1 + N(\ell)\}.$$

Ceci montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Théorème 11. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.

Dit autrement, l'ensemble des suites convergentes d'éléments de E est un espace vectoriel sur E et l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une application linéaire de l'espace des suites convergentes d'éléments de E vers E.

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E et soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell' \in E$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $N(u_n - \ell) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)}$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_2$, $N(v_n - \ell') \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)}$.
Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
N((\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda\ell + \mu\ell')) &= N(\lambda(u_n - \ell) + \mu(v_n - \ell')) \\
&\leqslant |\lambda| N(u_n - \ell) + |\mu| N(v_n - \ell') \leqslant |\lambda| \frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)} + |\mu| \frac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)} \\
&\leqslant (|\lambda|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)} + (|\mu|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow N((\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda\ell + \mu\ell')) \leqslant \varepsilon)$ et donc la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.

Théorème 12. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ et que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, la suite $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$N(\lambda_n u_n - \lambda\ell) = N(\lambda_n(u_n - \ell) + (\lambda_n - \lambda)\ell) \leqslant |\lambda_n|\, N(u_n - \ell) + |\lambda_n - \lambda|\, N(\ell).$$

La suite $(|\lambda_n|)$ est une suite réelle bornée et la suite $(N(u_n - \ell))$ est une suite réelle convergeant vers 0. Donc, $|\lambda_n|\, N(u_n - \ell)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'autre part, $|\lambda_n - \lambda|\, N(\ell)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, $|\lambda_n|\, N(u_n - \ell) + |\lambda_n - \lambda|\, N(\ell)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et finalement $N(\lambda_n u_n - \lambda\ell)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge vers $\lambda\ell$.

On donne maintenant, dans le cas d'un espace de dimension finie, une caractérisation de la convergence à partir de la convergence des « suites coordonnées ». Dans le théorème et la démonstration qui suivent, nous admettrons momentanément le résultat suivant : « si E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et si N et N' sont deux normes sur E, alors N et N' sont équivalentes » (résultat qui sera démontré ultérieurement). Dit autrement, si E est de dimension finie et si $\mathscr{B}$ est une base fixée de E, alors toute norme N sur E est équivalente à $\| \ \|_\infty$ où la norme infinie d'un vecteur est le maximum des valeurs absolues de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 13. Soit E un espace de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base donnée de E.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et ℓ un élément de E.

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_{n,k} e_k$ et d'autre part, on pose $\ell = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite numérique $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre ℓ_k.

Démonstration. Supposons que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite numérique $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre ℓ_k. Alors, d'après les théorèmes 11 et 12, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}} e_k$ converge vers $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k$ ou encore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Réciproquement, supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_\infty)$. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n,k} - \ell_k| \leqslant \|u_n - \ell\|_\infty$. Par hypothèse, $\|u_n - \ell\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $|u_{n,k} - \ell_k|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ou encore la suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k.

D'après le résultat momentanément admis plus haut et le théorème 8, tout ceci reste vrai si on remplace la norme $\| \ \|_\infty$ par une norme N quelconque.

---

3) Suites extraites. Valeurs d'adhérence

Définition 8. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Ainsi, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+7})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ où p_n est le n-ème nombre premier, sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Une suite extraite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soient φ une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, strictement croissante sur $\mathbb{N}$ puis $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soient ψ une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, strictement croissante sur $\mathbb{N}$ puis $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(v_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(v_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, $\varphi \circ \psi$ est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, strictement croissante sur $\mathbb{N}$ en tant que composée d'applications strictement croissantes sur $\mathbb{N}$. Ceci montre que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace normé (E, N).

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors toute suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E de limite $\ell \in E$. Soient φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante sur $\mathbb{N}$ puis $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Commençons par redémontrer un lemme : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$. L'inégalité est vraie quand $n = 0$ et si elle vraie pour $n \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned}\varphi(n+1) &\geqslant \varphi(n) + 1 \text{ (car } \varphi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{N} \text{ à valeurs dans } \mathbb{N})\\ &\geqslant n + 1 \text{ (par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $N(u_n - \ell) \leqslant \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ et donc

$$N(v_n - \ell) = N\left(u_{\varphi(n)} - \ell\right) \leqslant \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow N(v_n - \ell) \leqslant \varepsilon)$.

Définition 9. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et soit $a \in E$.

a est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente de limite a.

Le théorème 15 peut alors se réénoncer sous la forme :

Théorème 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence et une seule, à savoir sa limite.

Ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Par exemple, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} -1$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

La réciproque du théorème 15 est fausse. Une suite peut avoir une valeur d'adhérence et une seule et être divergente. Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0\quad 1\quad 0\quad 2\quad 0\quad 3\quad 0\ldots)$ admet une unique valeur d'adhérence, à savoir 0 mais est divergente car admet une suite extraite tendant vers $+\infty$.

On peut aussi noter qu'une suite n'admet pas forcément de valeur d'adhérence. Par exemple, soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$. Toute suite extraite de la suite u tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et donc toute suite extraite de la suite u est divergente. La suite u n'admet pas de valeur d'adhérence.

Théorème 17. (théorème de Bolzano-Weierstrass).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente ou encore toute suite bornée d'éléments de E admet au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration. Le résultat est immédiat si $E = \{0\}$.
Le théorème de Bolzano-Weierstrass a été démontré en maths sup dans le cas où $E = \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrons le résultat par récurrence sur $p = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$. Dans la démonstration qui suit, on admet de nouveau momentanément le fait qu'en dimension finie, deux normes sont équivalentes. Ceci nous permet de choisir une norme adaptée à la situation.

• Le cas $p = 1$ est le cas où $E = \mathbb{K}$. Le résultat est donc vrai quand $p = 1$.

• Soit $p \geqslant 1$. Supposons que pour tout espace de dimension p, de toute suite bornée on puisse extraire une sous-suite convergente. Soient E un espace de dimension $p+1$ puis $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1})$ une base de E. On munit E de la norme infinie associée à cette base notée N_∞.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de E. Soit M un majorant de la suite $(N(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} u_{n,k}e_k$ où pour chaque $k \in [\![1, p+1]\!]$, $u_{n,k} \in \mathbb{K}$. Posons encore $v_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_{n,k}e_k$ de sorte que $v_{n,p}$ est un vecteur de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ tel que $u_n = v_{n,p} + u_{n,p+1}e_{p+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n,p+1}| \leqslant N_\infty(u_n) \leqslant M$. Donc, la suite $(u_{n,p+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres bornée. On peut en extraire une sous-suite $\left(u_{\varphi(n),p+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain nombre ℓ_{p+1}. Mais alors la suite $\left(u_{\varphi(n),p+1}e_{p+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $\ell_{p+1}e_{p+1}$. En particulier, cette suite est bornée.

La suite $\left(v_{\varphi(n),p}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n),p+1}e_{p+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (en tant que combinaison linéaire de suites bornées) d'éléments de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Par hypothèse de récurrence, on peut en extraire une suite $\left(v_{\psi(n),p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente de limite un certain vecteur v de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

La suite $\left(u_{\psi(n),p+1}e_{p+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente en tant que suite extraite de la suite convergente $\left(u_{\varphi(n),p+1}e_{p+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais alors, la suite $\left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(v_{\psi(n),p}\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(u_{\psi(n),p+1}e_{p+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en tant que somme de deux suites convergentes et a pour limite $v + \ell_{p+1}e_{p+1}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

III - Ouverts, fermés, compacts. Intérieur, adhérence

1) Voisinages

Définition 10. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soient x_0 un point de E et V une partie de E.

V est un **voisinage** de x_0 si et seulement si V contient une boule ouverte de centre x_0 (et de rayon strictement positif). L'ensemble des voisinages de x_0 se note $\mathscr{V}(x_0)$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $]-\infty, 2] \cup [4, 9[$ est un voisinage de 5 car contient $]4,5;5,5[= B_o\left(5, \dfrac{1}{2}\right)$.

Commentaire 1. La définition précédente s'écrit avec des quantificateurs de la façon suivante :

$$\forall V \in \mathscr{P}(E),\ V \in \mathscr{V}(x_0) \Leftrightarrow \exists r > 0/\ B_o(x_0, r) \subset V.$$

Commentaire 2. Toute boule ouverte (non vide) de centre x_0 est en particulier un voisinage de x_0.

Commentaire 3. Tout voisinage de x_0 contient x_0.

Théorème 18. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit x_0 un élément de E.

Une **réunion quelconque** (non vide) de voisinages de x_0 est un voisinage de x_0.
Une **intersection finie** (non vide) de voisinages de x_0 est un voisinage de x_0.

Démonstration.

• Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide (c'est-à-dire $I \neq \varnothing$) de voisinages de x_0 puis $V = \displaystyle\bigcup_{i\in I} V_i$. Soit $i_0 \in I$. V_{i_0} contient une boule ouverte de centre x_0 et V contient V_{i_0}. Donc, V contient une boule ouverte de centre x_0. Par suite, V est un voisinage de x_0.

• Soit $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie non vide (c'est-à-dire $I \neq \varnothing$) de voisinages de x_0 puis $V = \displaystyle\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} V_i$.

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $r_i > 0$ tel que $B_o(x_0, r_i) \subset V_i$. Posons alors $r = \text{Min}(r_1, \ldots, r_n)$. r existe et est un réel strictement positif.

$B_o(x_0, r)$ est une boule ouverte de centre x_0 contenue dans chaque V_i et donc contenue dans V. Par suite, V est un voisinage de x_0.

Commentaire. Une intersection quelconque de voisinage de x_0 n'est pas nécessairement un voisinage de x_0. Par exemple, l'intersection de tous les voisinages de x_0 est $\{x_0\}$ et n'est donc pas un voisinage de x_0 car ne contient aucune boule ouverte de centre x_0 et de rayon strictement positif.
Démontrons explicitement que $\displaystyle\bigcap_{V\in\mathscr{V}(x_0)} V = \{x_0\}$. On sait déjà que $\{x_0\} \subset \displaystyle\bigcap_{V\in\mathscr{V}(x_0)} V$. Soit alors x un élément de E distinct de x_0. Soient $r = N(x - x_0) > 0$ puis $B = B_o(x_0, r)$. x n'est pas dans B qui est un voisinage de x_0 et donc $x \notin \displaystyle\bigcap_{V\in\mathscr{V}(x_0)} V$.

Ceci montre que $\displaystyle\bigcap_{V\in\mathscr{V}(x_0)} V = \{x_0\}$

Théorème 19. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N et N' équivalentes. Soient x_0 un élément de E et V une partie de E

V est un voisinage de x_0 dans l'espace vectoriel normé (E, N) si et seulement si V est un voisinage de x_0 dans l'espace vectoriel normé (E, N').

Démonstration. Soit V un voisinage de x_0 pour la norme N. Il existe un réel $r > 0$ tel que $\{x \in E/\ N(x - x_0) < r\} \subset V$. Les normes N et N' sont équivalentes. Donc, il existe un réel $\beta > 0$ tel que $N \leqslant \beta N'$. Pour $x \in E$,

$$N'(x - x_0) < \frac{r}{\beta} \Rightarrow \beta N'(x - x_0) < r \Rightarrow N(x - x_0) < r.$$

Ceci montre que $\left\{x \in E/\ N'(x - x_0) < \dfrac{r}{\beta}\right\} \subset \{x \in E/\ N(x - x_0) < r\} \subset V$ et donc V contient la boule ouverte de centre x_0 et de rayon $\dfrac{r}{\beta}$ pour la norme N'. V est donc un voisinage de x_0 dans l'espace normé (E, N').

En échangeant les rôles des normes N et N', un voisinage de x_0 dans (E, N') est un voisinage de x_0 dans (E, N).

2) Ouverts

Définition 11. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit O une partie de E.

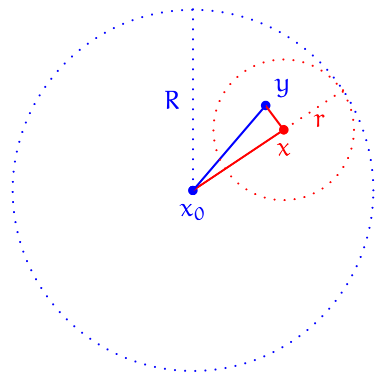
O est un **ouvert** de E si et seulement si, ou bien O est vide, ou bien O est non vide et voisinage de chacun de ses points.

- On a donc décidé conventionnellement que l'ensemble vide est une partie ouverte de l'espace vectoriel normé (E, N).
- On doit noter aussi que E est une partie ouverte de l'espace vectoriel normé (E, N).

Théorème 20. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit x_0 un élément de E.

Toute boule ouverte de centre x_0 est un ouvert de E.

Démonstration. Soient $x_0 \in E$ et $R > 0$ puis $B = B_o(x_0, R)$.



Vérifions que B est voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in B$. Soit $r = R - N(x - x_0)$. Puisque $N(x - x_0) < R$, r est un réel strictement positif. Soit $b = B_o(x, r)$. Vérifions que $b \subset B$. Soit $y \in b$.

$$N(y - x_0) = N((y - x) + (x - x_0)) \leqslant N(y - x) + N(x - x_0) < r + N(x - x_0) = R.$$

Ainsi, tout y de b est dans B et donc $b \subset B$. Ceci montre que B est un voisinage de x.

On a montré que B est voisinage de chacun de ses points et donc que B est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N).

Ainsi, $]2, 3[= B_o\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ (la norme utilisée est ici la valeur absolue) est un ouvert de $\mathbb{R}$ et plus généralement $]a, b[$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 21. Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

Une **réunion quelconque** (non vide) d'ouverts de E est un ouvert de E.
Une **intersection finie** (non vide) d'ouverts de E est un ouvert de E.

Démonstration. • Soit $(O_i)_{i \in I}$ $(I \neq \varnothing)$ une famille d'ouverts de l'espace vectoriel normé (E, N). Soit $O = \bigcup_{i \in I} O_i$. Vérifions que O est un ouvert de E. Si O est vide, c'est fini. Sinon, O n'est pas vide. Soit alors $x_0 \in O$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x_0 \in O_{i_0}$. O_{i_0} est un ouvert de E et donc contient une boule ouverte B de centre x_0. Mais alors O contient B et donc O est un voisinage de x_0. Finalement, O est voisinage de chacun de ses points et donc O est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N).

• Soit $(O_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'ouverts de l'espace vectoriel normé (E, N). Soit $O = \bigcap_{i \in I} O_i$. Vérifions que O est un ouvert de E. Si O est vide, c'est fini.
Sinon, O n'est pas vide. Soit alors $x_0 \in O$. x_0 est dans chaque O_i et chaque O_i est un ouvert. Donc, chaque O_i est un voisinage de x_0 puis O est un voisinage de x_0 d'après le théorème 18.
Finalement, O est voisinage de chacun de ses points et donc O est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N).

Ainsi, $]2, +\infty[= \bigcup_{n \geqslant 2}]n, n + 2[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et plus généralement les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ ou $] - \infty, a[$ sont des ouvert de $\mathbb{R}$. En tenant compte du fait que $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on a vérifié que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. On en déduit encore que des domaines du genre $] - 1, 3[\cup]4, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Théorème 22. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N et N' équivalentes. Soit O une partie de E.

O est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N) si et seulement si O est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N').

Démonstration. Soit O un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N). Si $O = \varnothing$, alors O est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N').
Sinon, O est voisinage de chacun de ses points dans l'espace vectoriel normé (E, N). D'après le théorème 18, O est encore voisinage de chacun de ses points dans l'espace vectoriel normé (E, N') et est donc un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N').
En échangeant les rôles de N et N', on a aussi : si O est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N'), alors O est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N).

Commentaire. On a l'habitude dire que « les topologies associées à des normes équivalentes sont les mêmes ».

3) Fermés

Définition 12. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit F une partie de E.

F est un **fermé** de E si et seulement si le complémentaire de F dans E est un ouvert de E.

« fermé » n'est pas le contraire d'« ouvert ». En effet, dans $\mathbb{R}$ par exemple, l'ensemble $]0, 1]$ n'est ni ouvert, ni fermé, et $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des parties de $\mathbb{R}$ à la fois ouvertes et fermées.

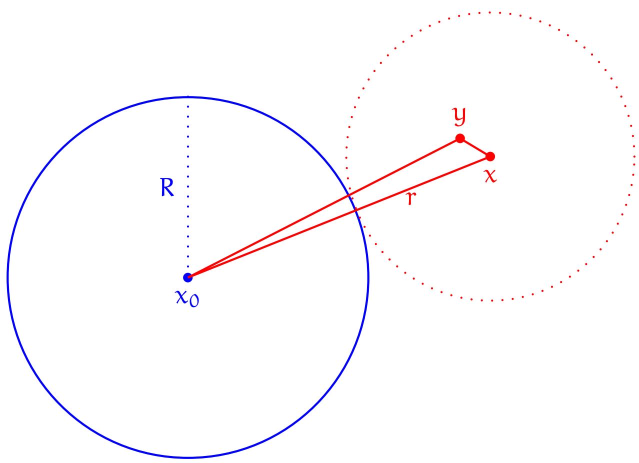
De manière générale, $\varnothing$ et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées de l'espace vectoriel normé (E, N).

Théorème 23. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit x_0 un élément de E.

Toute boule fermée de centre x_0 est un fermé de E. Toute sphère de centre x_0 est un fermé de E.

Démonstration.

• Soient $x_0 \in E$ et $R \geqslant 0$ puis $B = B_f(x_0, R)$.



Vérifions que $C_E(B)$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N).

Soit $x \in C_E(B)$. Soit $r = N(x - x_0) - R$. Puisque $N(x - x_0) > R$, r est un réel strictement positif. Soit $b = B_o(x, r)$. Vérifions que $b \subset C_E(B)$. Soit $y \in b$.

$$N(y - x_0) = N((x - x_0) - (x - y)) \geqslant N(x - x_0) - N(y - x) > N(x - x_0) - r = R.$$

Ainsi, tout y de b est dans $C_E(B)$ puis $b \subset C_E(B)$. Ceci montre que $C_E(B)$ est un voisinage de x.

On a montré que $C_E(B)$ est voisinage de chacun de ses points et donc que $C_E(B)$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N) ou encore que B est un fermé de l'espace vectoriel normé (E, N).

• Soient $x_0 \in E$ et $R \geqslant 0$ puis $S = S(x_0, R)$, la sphère de centre x_0 et de rayon R. S est la complémentaire de $\{x \in E/\ N(x - x_0) < R\} \cup \{x \in E/\ N(x - x_0) > R\}$. $\{x \in E/\ N(x - x_0) < R\} = B_o(x_0, R)$ est un ouvert d'après le théorème 19 et $\{x \in E/\ N(x - x_0) > R\}$ est le complémentaire du fermé $B_f(x_0, R)$ et est donc ouvert. Donc, $\{x \in E/\ N(x - x_0) < R\} \cup \{x \in E/\ N(x - x_0) > R\}$ est un ouvert d'après le théorème 20 puis S est un fermé.

Ainsi, dans $\mathbb{R}$, le segment $[a, b]$ qui est encore la boule fermée de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\dfrac{b-a}{2}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. On note qu'un intervalle de la forme $]-\infty, a]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire, à savoir $]a, +\infty[$, est ouvert. De même, $[a, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ bien qu'ouvert en $+\infty$ et on rappelle que $]-\infty, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ bien qu'ouvert des deux côtés. La caractérisation séquentielle des fermés (théorème 25) fera comprendre la signification exact du mot fermé et que le fait que $[0, +\infty[$ soit fermé, n'est pas paradoxal.

Théorème 24. Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

Une **intersection quelconque** de fermés de E est un fermé de E.
Une **réunion finie** de fermés de E est un fermé de E.

Démonstration.

• Soient $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés puis $F = \bigcap_{i\in I} F_i$. Alors $C_E(F) = \bigcup_{i\in I} C_E(F_i)$ est un ouvert de E en tant que réunion d'ouverts de E d'après le théorème 21. Donc, F est un fermé de E.

• Soient $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de fermés puis $F = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} F_i$. Alors $C_E(F) = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} C_E(F_i)$ est un ouvert de E en tant qu'intersection finie d'ouverts de E d'après le théorème 21. Donc, F est un fermé de E.

Théorème 25. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N et N' équivalentes. Soit F une partie de E.

F est un fermé de l'espace vectoriel normé (E, N) si et seulement si F est un fermé de l'espace vectoriel normé (E, N').

Démonstration. Soit F un partie de E. D'après le théorème 21,

$$F \text{ fermé dans } (E, N) \Leftrightarrow C_E(F) \text{ ouvert dans } (E, N) \Leftrightarrow C_E(F) \text{ ouvert dans } (E, N') \Leftrightarrow F \text{ fermé dans } (E, N').$$

Théorème 26. (caractérisation séquentielle des fermés)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit F une partie non vide de E.

F est fermée si et seulement si pour toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est un élément de F.

Démonstration.

• Soit F un fermé non vide de l'espace vectoriel normé (E, N). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F, convergente, de limite $\ell \in E$. Montrons que $\ell \in F$.
Si $\ell \notin F$, alors $\ell \in C_E(F)$. Puisque $C_E(F)$ est un ouvert, il existe une boule ouverte B de centre ℓ et de rayon $r > 0$ qui soit contenue dans $C_E(F)$. B ne contient aucun élément de F et en particulier ne contient aucun terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci contredit le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Donc, $\ell \in F$.

• Supposons maintenant F non fermé. Donc, $C_E(F)$ n'est pas ouvert. Soit $\ell \in C_E(F)$ dont $C_E(F)$ n'est pas un voisinage. Toute boule ouverte de centre ℓ contient un élément qui n'est pas dans $C_E(F)$ et qui est donc dans F. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in F/\ u_n \in B_o\left(\ell, \dfrac{1}{n+1}\right)$.

Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}$, $N(u_n - \ell) < \dfrac{1}{n+1}$. Puisque $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $N(u_n - \ell)$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

On vient ainsi de trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F, convergente, dont la limite n'appartient pas à F. Par contraposition, si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F convergente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in F$, alors F est fermé.

On doit ainsi mieux comprendre pourquoi, dans $\mathbb{R}$, $[0, +\infty[$ est fermé : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de réels de $[0, +\infty[$, la limite ℓ reste dans $[0, +\infty[$ ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0 \Rightarrow \ell \geqslant 0$) alors que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de réels de $]0, +\infty[$, la limite ℓ n'est pas nécessairement dans $]0, +\infty[$ mais peut être égale à 0 ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \not\Rightarrow \ell > 0$).

Partie fermée signifie : « fermée pour le passage à la limite ». Les limites des suites convergentes ne peuvent pas sortir de la partie.

4) Intérieur, adhérence, frontière, parties denses

4-a) Intérieur d'une partie

DÉFINITION 13. Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

Soit A une partie non vide de E. L'intérieur de A, notée $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble des éléments de E dont A est voisinage. Par convention, $\overset{\circ}{\varnothing} = \varnothing$.

En appliquant la définition d'un voisinage, on obtient les résultats suivants pour une partie non vide A de E : pour tout x de E,

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{A} &\Leftrightarrow A \in \mathscr{V}(x) \\ &\Leftrightarrow \exists r > 0/\ B_o(x, r) \subset A. \end{aligned}$$

Par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'intérieur de $]0, 1]$ est $]0, 1[$ et l'intérieur de $]0, 1[$ est $]0, 1[$ lui-même.
On sait depuis la maths sup qu'entre deux rationnels distincts, il y a toujours au moins un irrationnel et qu'entre deux irrationnels distincts, il y a toujours au moins un rationnel. Donc, toute boule ouverte de $\mathbb{R}$ contient au moins un irrationnel et un rationnel ou encore aucune boule ouverte de $\mathbb{R}$ n'est contenue dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ceci montre que $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$ et $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \varnothing$.

Théorème 27. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

1) $\overset{\circ}{A} \subset A$.
2) $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

Démonstration. Si $\overset{\circ}{A} = \varnothing$, on a $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

Supposons dorénavant $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$. Pour $x \in \overset{\circ}{A}$, A est voisinage de x et en particulier, $x \in A$. Ceci montre que $\overset{\circ}{A} \subset A$.
Vérifions alors que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. A est un voisinage de x et il s'agit de montrer qu'en fait $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage de x.
Soit $B = B_o(x, r)$ une boule ouverte de centre x contenue dans A. On va vérifier que $B \subset \overset{\circ}{A}$.
Soit $y \in B$. D'après le théorème 22, B est un ouvert de E et donc B est un voisinage de y ou encore B contient une boule ouverte de centre y. Mais alors, A contient une boule ouverte de centre y et donc A est un voisinage de y. On en déduit que $y \in \overset{\circ}{A}$.
On a montré que $B \subset \overset{\circ}{A}$. Ceci montre que $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage de x.

Ainsi, $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage de chacun de ses points et finalement $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.

Théorème 28. (caractérisation de l'intérieur d'une partie)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert de E contenu dans A.

Démonstration. On sait déjà que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E contenu dans A.
Soit alors O un ouvert de E contenu dans A. Si O est vide, $O \subset \overset{\circ}{A}$. Si O n'est pas vide, O est voisinage de chacun de ses points. Mais alors, A (qui contient O) est voisinage de chacun des points de O ou encore $O \subset \overset{\circ}{A}$.

Théorème 29. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

1) $\overset{\circ}{A} = A \Leftrightarrow A$ est ouvert.
2) $\overset{\circ}{\left(\overset{\circ}{A}\right)} = \overset{\circ}{A}$.

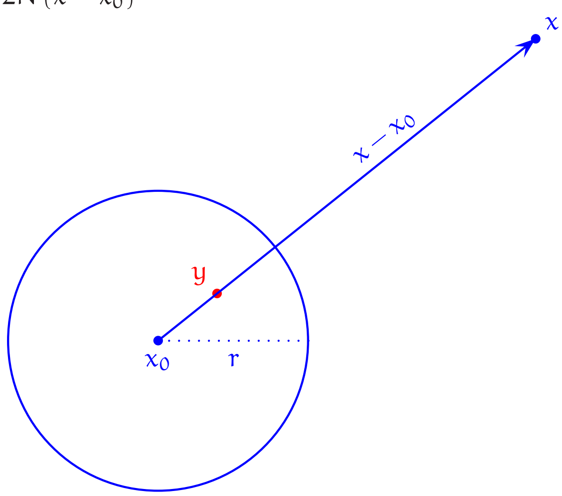
Démonstration. 1) Si $A = \overset{\circ}{A}$, alors A est un ouvert de E d'après le théorème 27. Si A est un ouvert, A est le plus grand ouvert de A contenu dans A et donc $A = \overset{\circ}{A}$ d'après le théorème 28.

2) $\mathring{A}$ est ouvert et donc l'intérieur de $\mathring{A}$ est $\mathring{A}$ d'après 1).

Exercice 5. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E. Montrer que $\mathring{F} = \varnothing$ (on pourra raisonner par contraposition).

Solution 5. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrons que si $\mathring{F} \neq \varnothing$, alors $F = E$. Supposons donc $\mathring{F} \neq \varnothing$.

Soit $x_0 \in \mathring{F}$. Il existe $r > 0$ tel que $B_o(x_0, r) \subset F$.
Soit alors $x \in E \setminus \{x_0\}$. Soit $y = x_0 + \dfrac{r}{2N(x - x_0)}(x - x_0)$.



On a

$$N(y - x_0) = N\left(\frac{r}{2N(x - x_0)}(x - x_0)\right) = \frac{r}{2N(x - x_0)} N(x - x_0) = \frac{r}{2} < r.$$

Donc, $y \in B_o(x_0, r) \subset F$. Mais alors, puisque x_0 et y sont dans le sous-espace vectoriel F,

$$x = x_0 + \frac{2N(x - x_0)}{r}(y - x_0) \in F.$$

4-b) Adhérence d'une partie

DÉFINITION 14. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.

1) Soit x_0 un élément de E. x_0 est **adhérent** à A si et seulement si tout voisinage de x_0 rencontre A.

2) L'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A.

Convention. L'adhérence de $\varnothing$ est $\varnothing$.

L'appartenance de x_0 à l'adhérence d'une partie non vide A peut s'écrire avec des quantificateurs de différentes façons :

$$\begin{aligned} x_0 \in A &\Leftrightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A /\ N(x - x_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Un point x_0 adhérent à A est donc un point de E pas nécessairement dans A tel que, aussi près de x_0 qu'on le veut, il existe un élément de A.

Il est alors immédiat qu'un point de A est adhérent à A et donc $A \subset \overline{A}$ (y compris si $A = \varnothing$). En particulier, $\overline{E} = E$.

Théorème 30. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

1) $C_E\left(\overline{A}\right) = \overset{\circ}{\left(C_E(A)\right)}$.

2) $C_E\left(\mathring{A}\right) = \overline{C_E(A)}$.

Démonstration. Si $A = \varnothing$, $C_E(A) = E$ puis $C_E\left(\overset{o}{A}\right) = C_E(\varnothing) = E = \overline{E} = \overline{C_E(A)}$. On suppose dorénavant $A \neq \varnothing$.

1) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in C_E\left(\overline{A}\right) &\Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{V}(x)/\ V \cap A = \varnothing \\ &\Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{V}(x)/\ V \subset C_E(A) \Leftrightarrow C_E(A) \in \mathscr{V}(x) \\ &\Leftrightarrow x \in (C_E\overset{o}{(}A)). \end{aligned}$$

On a montré que $C_E\left(\overline{A}\right) = (C_E\overset{o}{(}A))$.

2) En appliquant 1) à $C_E(A)$, on obtient $C_E\left(\overline{C_E(A)}\right) = \overset{o}{A}$ puis par passage au complémentaire $\overline{C_E(A)} = C_E\left(\overset{o}{A}\right)$.

A partir du théorème 30 et des différents résultats sur l'intérieur d'une partie, on obtient les théorèmes suivants :

Théorème 31. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

1) $A \subset \overline{A}$.
2) $\overline{A}$ est fermé.

Théorème 32. (caractérisation de l'adhérence d'une partie)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

$\overline{A}$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé de E contenant A.

Théorème 33. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

1) $\overline{A} = A \Leftrightarrow A$ est fermé.
2) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$.

On donne enfin la caractérisation séquentielle de l'adhérence d'une partie non vide A : les points adhérents à A sont les limites des suites d'éléments de A qui sont convergentes.

Théorème 34. (caractérisation séquentielle de l'adhérence d'une partie)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. Soit $x \in E$

x est adhérent à A si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, convergente, de limite x.

Démonstration.

• Soit $x \in \overline{A}$. Alors tout voisinage de x rencontre A. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in A/\ x_n \in B_o\left(x, \dfrac{1}{n+1}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $N(x_n - x) < \dfrac{1}{n+1}$. Puisque $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x.

• Soit $x \in E$ tel qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Soit V un voisinage de x. Il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset V$. Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe n_0 tel que $N(x_{n_0} - x) < r$. Mais alors x_{n_0} est un élément de A qui appartient à $B_o(x, r)$ et donc à V. On a montré que tout voisinage de x rencontre A et donc que x est adhérent à A.

On sait depuis la math sup que tout réel est limite d'une suite de rationnels et aussi que tout réel est limite d'une suite d'irrationnels. D'après le théorème précédent, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

4-c) Frontière d'une partie

DÉFINITION 15. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

La **frontière** de A est $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(C_E(A))} = \overline{A} \cap C_E\left(\overset{o}{A}\right)$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Fr}([0, 1]) = \{0, 1\}$ ou aussi $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{(C_E(\mathbb{Q}))} = \mathbb{R}$.

4-d) Parties denses

Définition 16. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

A est **dense** de E si et seulement si $\overline{A} = E$.
Plus généralement, Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, A est dense dans B si et seulement si $B \subset \overline{A}$.

D'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence, A est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A. Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

5) Compacts

Définition 17. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.

A est **bornée** si et seulement si il existe un réel M tel que pour tout x de A, $N(x) \leqslant M$.

Définition 18. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit K une partie de E.

K est un **compact** de E si et seulement si ou bien K est vide, ou bien K est non vide et de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente, de limite appartenant à K.

Théorème 35. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit K une partie non vide et compacte de cet espace.

Alors, K est fermée et bornée.

Démonstration. • Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K qui converge vers un certain élément $\ell \in E$. Puisque K est compact, on peut extraire de cette suite une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant dans K. Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, la suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ et donc $\ell \in K$.

On a montré que toute suite convergente d'éléments de K converge dans $\mathbb{K}$ et donc K est un fermé de l'espace vectoriel normé (E, N).

• Supposons K non bornée. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément x_n dans K tel que $N(x_n) \geqslant n$. Soit $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout entier n, $N\left(x_{\varphi(n)}\right) \geqslant \varphi(n) \geqslant n$. Ainsi, la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et donc n'est pas convergente.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K dont on ne peut extraire une sous-suite convergente ce qui contredit le fait que K est compact. Donc K est bornée.

Théorème 36. (théorème de Borel-Lebesgue)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit K une partie non vide de cet espace.

K est compact si et seulement si K est fermé et borné.

Démonstration.

• Soit K un compact non vide de l'espace vectoriel normé (E, N). D'après le théorème 34, K est une partie fermée et bornée de l'espace vectoriel normé (E, N).

• Soit K une partie non vide fermée et bornée de l'espace vectoriel normé (E, N). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. En particulier, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 16), on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un certain $\ell \in E$. La suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de K. Puisque K est fermé, $\ell \in K$.
On a montré que de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergeant dans K et donc K est un compact de l'espace vectoriel normé (E, N).

Ainsi, dans $\mathbb{R}$, $[a, b]$ est un compact car fermé et borné.

Théorème 37. Un compact non vide de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

Démonstration. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}$. K est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et donc K admet une borne inférieure m et une borne supérieure M. Vérifions par exemple que $M \in K$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $M - \dfrac{1}{n+1} < x_n \leqslant M$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K qui converge vers M et donc $M \in K$ puisque K est fermée. Ainsi, M est la maximum de K. De même, m est le minimum de K.

Théorème 38. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit K un compact de cet espace.

Toute partie de K fermée dans l'espace (E, N) est compacte.

Démonstration. Soit A une partie de K qui est un fermé de l'espace (E, N). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K et on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un certain élément ℓ de K.
$\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite convergente d'éléments de A. Puisque A est fermée, ℓ est dans A. On a montré que de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergeant dans A et donc A est compacte.

Théorème 39. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit K un compact non vide de cet espace. Soit $(x_n)_{\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration.

• Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on sait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence et une seule, à savoir sa limite.

• Inversement, supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence et une seule ℓ. Supposons par l'absurde que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ. Donc,

$$\exists \varepsilon > 0/\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0/\ N\left(x_n - \ell\right) > \varepsilon.$$

ε est ainsi dorénavant fixé. Construisons par récurrence une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N\left(x_{\varphi(n)} - \ell\right) > \varepsilon$.

- Il existe un entier $\varphi(0) \geqslant 0$ tel que $N\left(x_{\varphi(0)} - \ell\right) > \varepsilon$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons avoir construit $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ tel que $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $N\left(x_{\varphi(k)} - \ell\right) > \varepsilon$. Il existe alors un entier $\varphi(n+1) \geqslant 1 + \varphi(n)$ tel que $N\left(x_{\varphi(n+1)} - \ell\right) > \varepsilon$.

On a construit par récurrence une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N\left(x_{\varphi(n)} - \ell\right) > \varepsilon$. La suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K et on peut donc en extraire une sous-suite $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un certain $\ell' \in K$. $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc ℓ' est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité, on a $\ell' = \ell$ ou encore, la suite $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Mais ceci contredit le fait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N\left(x_{\psi(n)} - \ell\right) > \varepsilon$.

On a montré par l'absurde que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6) Topologie induite

La topologie d'un espace vectoriel normé (E, N) (les voisinages, les ouverts, ...) induit une topologie dans une partie A de E de la façon suivante :

DÉFINITION 19. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.

Soit x un élément de E. Un **voisinage relatif de x dans** A est l'intersection d'un voisinage de x dans E avec A.

Un ouvert (resp. fermé, compact) relatif de A est l'intersection d'un ouvert de E (resp. fermé, compact) avec A.

Par exemple, $A = [0, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ mais est un ouvert relatif de A car A est l'intersection de A et de l'ouvert $\mathbb{R}$.

IV - Continuité

1) Limites de fonctions en un point

DÉFINITION 20. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit f une application définie sur une partie non vide D de E à valeurs dans E'. Soient x_0 un point adhérent à D et $\ell \in E'$.

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 ou encore f a pour limite ℓ quand x tend vers x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ (\forall x \in D),\ \left(N\left(x - x_0\right) \leqslant \alpha \Rightarrow N'\left(f(x) - \ell\right) \leqslant \varepsilon\right).$$

Théorème 40. Si f a une limite en x_0, alors celle-ci est unique.

Démonstration. Supposons que f tende vers ℓ et ℓ' quand x tend x_0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_1 > 0$ (resp. $\alpha_2 > 0$) tel que pour tout x de D, si $N(x - x_0) \leqslant \alpha_1$ (resp. α_2), on a $N'(f(x) - \ell) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ (resp. $N'(f(x) - \ell') \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$).
Soit $x \in D$ tel que $N(x - x_0) \leqslant \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

$$N'(\ell - \ell') \leqslant N'(\ell - f(x)) + N'(f(x) - \ell') \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $N(\ell - \ell') \leqslant \varepsilon$. $N(\ell - \ell')$ est donc un réel positif inférieur ou égal à tout réel strictement positif et on en déduit que $N(\ell - \ell') = 0$ puis que $\ell = \ell'$.

On peut donc parler de **la** limite de f en x_0 quand elle existe ce qui valide les notations $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\rightarrow} \ell$.

Plus généralement, on peut définir la notion de limite suivant un sous-ensemble :

Définition 21. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit f une application définie sur une partie non vide D de E à valeurs dans E'. Soient D' une partie de D puis x_0 un point adhérent à D' et $\ell \in E'$. Alors, x_0 est adhérent à D et

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 en restant dans D' si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \ (\forall x \in D'),\ (N(x - x_0) \leqslant \alpha \Rightarrow N'(f(x) - \ell) \leqslant \varepsilon).$$

Par exemple, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'a pas de limite quand x tend vers 1 ou encore $\lim\limits_{x \to 1} \chi_{\mathbb{Q}}$ n'existe pas mais la limite de $\chi_{\mathbb{Q}}$ quand x tend vers 1 en restant dans $\mathbb{Q}$ existe et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{Q}}} \chi_{\mathbb{Q}} = 1$.

Théorème 41. Si f a une limite en x_0, alors f a une limite suivant tout ensemble de D en x_0.

Démonstration. Si pour tout x dans D, on a $(N(x - x_0) \leqslant \alpha \Rightarrow N'(f(x) - \ell) \leqslant \varepsilon)$, alors en particulier, pour tout x dans D', on a $(N(x - x_0) \leqslant \alpha \Rightarrow N'(f(x) - \ell) \leqslant \varepsilon)$.

Définition 22. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit f une application définie sur une partie non vide D de E à valeurs dans E'.

f est **bornée** sur D si et seulement si il existe un réel M tel que pour tout x de D, $N'(f(x)) \leqslant M$.
Il revient au même de dire que $\{f(x),\ x \in D\}$ est une partie bornée de l'espace vectoriel normé (E', N').

Théorème 42. Si f a une limite en x_0, alors f est bornée sur un voisinage de x_0.

Démonstration. Il existe $r > 0$ tel que pour tout x de D, si $N(x - x_0) \leqslant r$ alors $N'(f(x) - \ell) \leqslant 1$. Soit $V = B_o(x_0, r)$. Pour tout x de $V \cap D$,

$$N'(f(x)) = N'(f(x) - \ell + \ell) \leqslant N'(f(x) - \ell) + N(\ell) \leqslant 1 + N(\ell).$$

Ceci montre que f est bornée sur $V \cap D$.

Théorème 43. Si f a une limite ℓ en x_0 et g a une limite ℓ' en x_0, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ a une limite en x_0 à savoir $\lambda\ell + \mu\ell'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha_1 > 0$ (resp. $\alpha_2 > 0$) tel que pour tout x de D, si $N(x - x_0) \leqslant \alpha_1$ (resp. α_2), alors $N'(f(x) - \ell) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\lambda| + 1)}$ (resp. $N'(g(x) - \ell') \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\mu| + 1)}$).
Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$. Pour $x \in D$ tel que $N(x - x_0) \leqslant \alpha$,

$$\begin{aligned}
N((\lambda f(x) + \mu g(x)) - \lambda\ell + \mu\ell') &= N(\lambda(f(x) - \ell) + \mu(g(x) - \ell')) \\
&\leqslant |\lambda| N(f(x) - \ell) + |\mu| N'(f(x) - \ell') \leqslant \frac{|\lambda|\varepsilon}{2(|\lambda| + 1)} + \frac{|\mu|\varepsilon}{2(|\mu| + 1)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction $\lambda f + \mu g$ a une limite en x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda\ell + \mu\ell'$.

Théorème 44. (le théorème de composition des limites)

Soient (E, N), (E', N') et (E'', N'') trois espaces vectoriels normés. Soient f une application définie sur un domaine D de E à valeurs dans E' et g une application définie sur un domaine D' de E' à valeurs dans E'' telles que $f(D) \subset D'$. Soit x_0 adhérent à D.

On suppose que f a une limite $\ell \in E'$ quand x tend vers x_0. Alors ℓ est adhérent à D'.
On suppose de plus que g a une limite $\ell' \in E''$ quand y tend vers ℓ.

Alors, $g \circ f$ a une limite quand x tend x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell'$.

Démonstration. Tout d'abord, tout voisinage de ℓ dans E' rencontre $f(D)$ et donc D'. On en déduit que ℓ est adhérent à D'.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout y de D', si $N'(y - \ell) \leqslant \beta$, alors $N''(g(y) - \ell') \leqslant \varepsilon$ puis il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout x de D, si $N(x - x_0) \leqslant \alpha$, alors $N'(f(x) - \ell) \leqslant \beta$.

Pour tout x de D tel que $N(x - x_0) \leqslant \alpha$, on a $N''(g(f(x)) - \ell') \leqslant \varepsilon$ ce qui démontre le théorème.

Théorème 45. (caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction)

Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soient f une application définie sur un domaine D de E à valeurs dans E'. Soit a adhérent à D.

La fonction f a une limite $\ell \in E'$ quand x tend vers a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Dans le cas où $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Démonstration. • Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que pour tout x de D, si $N(x - a) \leqslant \alpha$, alors $N'(f(x) - \ell) \leqslant \varepsilon$.

Puisque a est adhérent à D, il existe au moins une suite d'éléments de D convergeant vers a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D convergeant vers a. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $N(x_n - a) \leqslant \alpha$. Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, $N'(f(x_n) - \ell) \leqslant \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_0,\ N'(f(x_n) - \ell) \leqslant \varepsilon$ et donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Ainsi, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

• Supposons que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites fixées d'éléments de D, convergentes, de limite a, puis $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{2n} = x_n$ et $z_{2n+1} = y_n$. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite a et donc la suite $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in E'$. Les suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite convergente $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et ont donc même limite ℓ. Ceci montre que pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Supposons par l'absurde que $f(x)$ ne tende pas vers ℓ quand x tend vers a. Alors,

$$\exists \varepsilon > 0/\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in D/\ \left(N(x - a) \leqslant \alpha \text{ et } N'(f(x) - \ell) > \varepsilon\right).$$

ε est ainsi dorénavant fixé. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in D$ tel que $N(u_n - a) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $N'(f(u_n) - \ell) > \varepsilon$. Puisque $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D, convergente, de limite a. D'après ce qui précède, on doit avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$ ce qui contredit le fait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N'(f(u_n) - \ell) > \varepsilon$. Donc, $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

---

2) *Continuité*

2-a) Continuité en un point

Définition 23. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit f une application définie sur une partie non vide D de E à valeurs dans E'. Soit $x_0 \in D$.

f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ (\forall x \in D),\ \left(N\left(x - x_0\right) \leqslant \alpha \Rightarrow N'\left(f(x) - f\left(x_0\right)\right) \leqslant \varepsilon\right).$$

Quand on étudie la continuité en x_0, un préalable est que x_0 est dans le domaine D. On peut traduire la définition de la continuité en un point en terme de limite. Supposons que f ait une limite ℓ en x_0. La définition 21 montre que $\forall \varepsilon > 0$, $N'\left(f\left(x_0\right) - \ell\right) \leqslant \varepsilon$ et donc que nécessairement $\ell = f\left(x_0\right)$. L'existence de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ assure donc la continuité en x_0. Réciproquement, la continuité en x_0 impose l'existence de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et le fait que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right)$. Dans la pratique, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'est pas la limite la plus intelligente pour étudier la continuité. On lui préfère $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$. Cette limite peut exister sans que f soit continue en x_0, la continuité étant alors équivalente au fait que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f\left(x_0\right)$:

Théorème 46. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soient f une application définie sur un domaine D de E à valeurs dans E'. Soit x_0 un point de D.

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe.

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$ existe et vaut $f\left(x_0\right)$.

On peut aussi traduire la continuité en x_0 en terme de voisinage :

Théorème 47. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soient f une application définie sur un domaine D de E à valeurs dans E'. Soit x_0 un point de D.

f est continue en x_0 si et seulement si $\forall V \in \mathscr{V}\left(f\left(x_0\right)\right),\ \exists U \in \mathscr{V}\left(x_0\right) /\ f(U \cap D) \subset V$.

Démonstration. • Supposons f continue en x_0. Donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ \left(N\left(x - x_0\right) \leqslant \alpha \Rightarrow N'\left(f(x) - f\left(x_0\right)\right) \leqslant \varepsilon\right).$$

Soit V un voisinage de $f\left(x_0\right)$ dans E'. Il existe $r > 0$ tel que $B_o\left(f\left(x_0\right), r\right) \subset V$. Soit $\varepsilon = \dfrac{r}{2}$. Soit $\alpha > 0$ tel que pour $x \in D$, si $N\left(x - x_0\right) \leqslant \alpha$, alors $N'\left(f(x) - f\left(x_0\right)\right) \leqslant \varepsilon$.
Soit $U = B_o\left(x_0, \alpha\right)$.

$$\begin{aligned} x \in U \cap D &\Rightarrow N\left(x - x_0\right) < \alpha \Rightarrow N\left(x - x_0\right) \leqslant \alpha \\ &\Rightarrow N'\left(f(x) - f\left(x_0\right)\right) \leqslant \frac{r}{2} \Rightarrow N'\left(f(x) - f\left(x_0\right)\right) < r \Rightarrow f(x) \in B_o\left(f\left(x_0\right), r\right) \\ &\Rightarrow f(x) \in V. \end{aligned}$$

Ainsi, U est un voisinage de x_0 tel que $f(U \cap D) \subset V$.

• Supposons que $\forall V \in \mathscr{V}\left(f\left(x_0\right)\right),\ \exists U \in \mathscr{V}\left(x_0\right) /\ f(U \cap D) \subset V$. Soit $\varepsilon > 0$. $V = B_o\left(f\left(x_0\right), \varepsilon\right)$ est un voisinage de $f\left(x_0\right)$ dans E'. Il existe un voisinage U de x_0 dans E tel que $f(U \cap D) \subset V$. Soit $r > 0$ tel que $B_o\left(x_0, r\right) \subset U$. Soit $\alpha = \dfrac{r}{2} > 0$. Pour $x \in D$,

$$\begin{aligned} N\left(x - x_0\right) \leqslant \alpha &\Rightarrow N\left(x - x_0\right) < r \Rightarrow x \in U \cap D \\ &\Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow N'\left(f(x) - f\left(x_0\right)\right) < \varepsilon \\ &\Rightarrow N'\left(f(x) - f\left(x_0\right)\right) \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, ;\exists \alpha > 0/\ (\forall x \in D),\ \left(N\left(x - x_0\right) \leqslant \alpha \Rightarrow N'\left(f(x) - f\left(x_0\right)\right) \leqslant \varepsilon\right)$ et donc que f est continue en x_0.

Commentaire. L'inclusion $f(U \cap D) \subset V$ équivaut à l'inclusion $U \cap D \subset f^{-1}(V)$ $(f(x) \in V \Leftrightarrow x \in f^{-1}(V))$. Le théorème 47 peut donc se réénoncer sous la forme : f est continue en x_0 si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de $f\left(x_0\right)$ par f dans E' est un voisinage relatif de x_0 dans D. ❏

Les différents théorèmes sur les limites fournissent immédiatement les théorèmes suivants :

Théorème 48. Si f est continue en x_0, f est bornée sur un voisinage (relatif) de x_0.

Théorème 49. Si f et g sont continues en x_0, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0.

Théorème 50. Si f est continue en x_0, alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite x_0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

Dit autrement, le théorème précédent s'écrit : si f est continue en x_0 et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.

Ce théorème est assez souvent utilisé dans la pratique.

On peut encore rajouter les théorèmes généraux suivants

Théorème 51. Si f et g sont définies et continues en x_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $f \times g$ est continue en x_0.

Si de plus g ne s'annule pas en x_0, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies sur un voisinage de x_0 et continues en x_0.

Démonstration. Pour $x \in D$,

$$\begin{aligned}
N'(f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)) &= N'(f(x)(g(x) - g(x_0)) + (f(x) - f(x_0))g(x_0)) \\
&\leqslant N'(f(x))N(g(x) - g(x_0)) + N'(f(x) - f(x_0))N'(g(x_0)).
\end{aligned}$$

f est continue en x_0 et donc bornée sur un voisinage de x_0 et g est continue en x_0. Donc, $N'(f(x))N'(g(x) - g(x_0))$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. De même, $N'(f(x) - f(x_0))N'(g(x_0))$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 et finalement $N'(f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0))$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. Ceci montre que $f \times g$ est continue en x_0.

• Supposons que $g(x_0) \neq 0$. En traduisant la continuité de g avec $\varepsilon = \frac{N'(g(x_0))}{2} > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout x de $U \cap D$, $N'(g(x)) \geqslant \frac{N'(g(x_0))}{2} > 0$. Ceci montre déjà que la fonction $\frac{1}{g}$ est définie sur $U \cap D$. De plus, pour $x \in U \cap D$,

$$N'\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \frac{N'(g(x) - g(x_0))}{N'(g(x))N'(g(x_0))} \leqslant \frac{2N'(g(x) - g(x_0))}{N'(g(x_0))^2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers x_0 et il en est de même de $N'\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right)$. Ceci montre la continuité de $\frac{1}{g}$ en x_0. Enfin, $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ est continue en x_0 en tant que produit de fonctions continues en x_0.

Théorème 52. Soient (E, N), (E', N') et (E'', N'') trois espaces vectoriels normés. Soient f une application définie sur un domaine D de E à valeurs dans E' et g une application définie sur un domaine D' de E' à valeurs dans E'' telles que $f(D) \subset D'$. Soit $x_0 \in D$.

Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème de composition des limites.

2-b) Continuité

Définition 24. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit f une application définie sur une partie non vide D de E à valeurs dans E'.

f est continue sur D si et seulement si f est continue en chaque point de D.
Donc, f est continue sur D si et seulement si

$$\forall x_0 \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \ (\forall x \in D),\ (N(x - x_0) \leqslant \alpha \Rightarrow N'(f(x) - f(x_0)) \leqslant \varepsilon).$$

L'ensemble des fonctions continues sur D à valeurs dans E' se note $\mathscr{C}(D, E')$ ou $C^0(D, E')$.

Théorème 53. Soient (E, N) et (E', N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit D une partie non vide de l'espace vectoriel normé (E, N).

$\mathscr{C}(D, E')$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Vérifions que $\mathscr{C}(D, E')$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de D dans E'.

La fonction nulle appartient $\mathscr{C}(D, E')$.

Soient $(f, g) \in (\mathscr{C}(D, E'))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en chaque point de D d'après le théorème 49 et est donc un élément de $\mathscr{C}(D, E')$.

On a montré que $\mathscr{C}(D, E')$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de D dans E'.

Les théorèmes 51 et 52 fournissent immédiatement :

Théorème 54. Si f et g sont définies et continues D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $f \times g$ est continue sur D.

Si de plus g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont définies et continues sur D.

Théorème 55. Soient (E, N), (E', N') et (E'', N'') trois espaces vectoriels normés. Soient f une application définie sur un domaine D de E à valeurs dans E' et g une application définie sur un domaine D' de E' à valeurs dans E'' telles que $f(D) \subset D'$.

Si f est continue sur D et g est continue sur $f(D)$, alors $g \circ f$ est continue sur D.

Enfin, le théorème suivant dit que si deux applications continues coïncident sur une partie dense, alors ces deux applications sont égales.

Théorème 56. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soient f et g deux applications définies et continues sur un domaine non vide D de E à valeurs dans E'. Soit enfin Δ une partie de D, dense dans D.

Si $f_{/\Delta} = g_{/\Delta}$ alors $f = g$.

Démonstration. Soit x un élément de D. Puisque Δ est dense dans D, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Δ, convergente, de limite x. Puisque f et g sont continues sur D et donc en x et puisque f et g coïncident sur Δ,

$$f(x) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = g(x).$$

On a montré que $f = g$.

Exercice 6. Trouver les morphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ qui sont continus.

Solution 6. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

- Nécessairement, $f(0) = f(0) + f(0)$ et donc $f(0) = 0$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ et donc $f(-x) = -f(x)$. f est impaire.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.
- Soit $a = f(1)$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$ puis f étant impaire, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = an$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $a = f(1) = f\left(p \times \dfrac{1}{p}\right) = pf\left(\dfrac{1}{p}\right)$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{a}{p}$.
- Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = pf\left(\dfrac{1}{q}\right) = p \times \dfrac{a}{q} = a\dfrac{p}{q}$. Ainsi, pour tout nombre rationnel r, on a $f(r) = ar$ où $a = f(1)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = ax$. Les applications f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = ax$.

Réciproquement, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

---

3) Fonctions uniformément continues

3-a) Définition

DÉFINITION 25. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit f une application définie sur une partie non vide D de E à valeurs dans E'.

f est uniformément continue sur D si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ (\forall (x, y) \in D^2),\ (N(x - y) \leqslant \alpha \Rightarrow N'(f(x) - f(y)) \leqslant \varepsilon).$$

Théorème 57. Soient (E, N) et (E', N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soient D une partie non vide de l'espace vectoriel normé (E, N) puis f une application de D vers E'.

Si f est uniformément continue sur D alors f est continue sur D.

Démonstration. La phrase $\ldots,\ \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in D^2,\ \ldots$ entraîne la phrase $\forall x \in D,\ \ldots,\ \exists \alpha > 0, \forall y \in D,\ \ldots$ Dans le premier cas, α ne dépend pas de x et y alors que dans le deuxième cas, α peut changer quand x change.

Une activité classique consiste à montrer qu'une application n'est pas uniformément continue. Dans ce but, le théorème suivant est assez fréquemment utilisé :

Théorème 58. Soient (E, N) et (E', N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soient D une partie non vide de l'espace vectoriel normé (E, N) puis f une application de D vers E'.

f n'est pas uniformément continue sur D si et seulement si il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D tells que $x_n - y_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $f(x_n) - f(y_n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

• Supposons f non uniformément continue sur D. Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $(x, y) \in D^2$ tel que $N(x - y) \leqslant \alpha$ et $N'(f(x) - f(y)) > \varepsilon$. ε est ainsi dorénavant fixé.

En particulier, pour chaque entier n, il existe $(x_n, y_n) \in D^2$ tel que $N(x_n - y_n) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $N'(f(x_n) - f(y_n)) > \varepsilon$. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conviennent.

• Supposons f uniformément continue sur D. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in D^2$ si $N(x - y) \leqslant \alpha$ alors $N'(f(x) - f(y)) \leqslant \varepsilon$.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de D telles que $x_n - y_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ associé comme plus haut.
Puisque $x_n - y_n$ tend vers 0, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $N(x_n - y_n) \leqslant \alpha$. Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, $N'(f(x_n) - f(y_n)) \leqslant \varepsilon$. Ceci montre que $f(x_n) - f(y_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On a montré que si f est uniformément continue sur D, alors pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, si $x_n - y_n$ tend vers 0 alors $f(x_n) - f(y_n)$ tend vers 0. Par contraposition, s'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telles que $x_n - y_n$ tend vers 0 et $f(x_n) - f(y_n)$ ne tend pas vers 0, alors f n'est pas uniformément continue sur D.

Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$ car si pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n$ et $y_n = n + \dfrac{1}{n}$, alors $y_n - x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ mais $f(y_n) - f(x_n) = 2 + \dfrac{1}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3-b) Le théorème de Heine

Théorème 59. (le théorème de HEINE)

Soient (E, N) et (E', N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soient K un compact de l'espace vectoriel normé (E, N) puis f une application de K vers E'.

Si f est continue sur K alors f est uniformément continue sur K.

Démonstration. Soit f une application continue sur le compact K. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue sur K. Donc,

$$\exists \varepsilon > 0/\ \forall \alpha > 0,\ \exists (x, y) \in D^2/\ (N(x - y) \leqslant \alpha \text{ et } N'(f(x) - f(y)) > \varepsilon.$$

ε est ainsi dorénavant fixé.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in D^2$ tel que $N(x_n - y_n) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $N'(f(x_n) - f(y_n)) > \varepsilon$. Puisque pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $N(x_n - y_n) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, la suite $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

La suite $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du compact K. Donc, on peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un certain élément a de K. La suite $\left(x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 en tant que suite extraite d'une suite de limite nulle. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - \left(x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right)$, la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers a.

Par continuité de f sur K et donc en a, $f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)$ tend vers $f(a) - f(a) = 0$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci contredit le fait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N'\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right) > \varepsilon$. Donc, f est uniformément continue sur K.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur le segment $[0, 1]$.

3-c) Fonctions lipschitziennes

Définition 26. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit f une application définie sur une partie non vide D de E à valeurs dans E'.

f est lipschitzienne sur D si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ / \ (\forall (x, y) \in D^2), \ N'(f(x) - f(y)) \leqslant kN(x - y).$$

Théorème 60. Soient (E, N) et (E', N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soient D une partie non vide de E puis f une application de D vers E'.

Si f est lipschitzienne sur D alors f est uniformément continue sur D.

Démonstration. Soit $k \geqslant 0$ tel que pour tout $(x, y) \in D^2$, $N'(f(x) - f(y)) \leqslant kN(x - y)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k+1} > 0$. Pour $(x, y) \in D^2$ tel que $N(x - y) \leqslant \alpha$, on a

$$N'(f(x) - f(y)) \leqslant kN(x - y) \leqslant k\alpha = \frac{k\varepsilon}{k+1} \leqslant \varepsilon.$$

Donc, f est uniformément continue sur D.

Exemple 1. Pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[^2$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \dfrac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ et en particulier est uniformément continue sur $[1, +\infty[$. ❑

Exemple 2. Un objet classique de classe préparatoire est la fonction « distance d'un point à une partie » : soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E, N). Pour $x \in E$, posons $d(x, A) = \text{Inf}\{N(x - a), \ a \in A\}$. Tout d'abord, pour $x \in E$ donné, $\text{Inf}\{N(x - a), \ a \in A\}$ est une partie non vide (car $A \neq \varnothing$) et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $d(x, A)$. La fonction $x \mapsto d(x, A)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Vérifions que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $a \in A$,

$$d(x, A) \leqslant N(x - a) \leqslant N(x - y) + N(y - a).$$

Ainsi, le nombre $d(x, A) - N(x - y)$ est un minorant de $\{N(y - a), \ a \in A\}$. Puisque $d(y, A)$ est le plus grand de ces minorants, on en déduit que $d(x, A) - N(x - y) \leqslant d(y, A)$ ou encore que $d(x, A) - d(y, A) \leqslant N(x - y)$. En échangeant les rôles de x et y, on a aussi $d(y, A) - d(x, A) \leqslant N(x - y)$ et finalement,

$$\forall (x, y) \in E^2, \ |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant N(x - y).$$

Ceci montre la fonction $\begin{array}{ccc} (E, N) & \rightarrow & (\mathbb{R}, |\ |) \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne sur E et en particulier continue sur E.

❑

Sinon, une application du théorème 60 est la « continuité de la norme » :

Théorème 61. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis N une norme sur E.

L'application $f : \begin{array}{ccc} (E, N) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue sur E.

Démonstration. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$. Donc, l'application f est 1-lipscitzienne sur E. En particulier, cette application est continue sur E.

Dans le théorème précédent, nous avons montré que l'application $\begin{array}{ccc} (E, N) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue sur E.

Mais si N' est une autre norme sur E, nous ne savons rien de la continuité de l'application $\begin{array}{ccc} (E, N') & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$.

On peut montrer que cette dernière application est continue si N et N' sont équivalentes et peut ne pas l'être si N et N' ne sont pas équivalentes.

4) Images directes ou réciproques par une application continue

4-a) Image réciproque d'un ouvert et d'un fermé par une application continue

Théorème 62. Soient (E, N) et (E', N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soient D une partie non vide de E puis f une application de D vers E'.

f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de l'espace vectoriel normé (E', N') est un ouvert relatif de D c'est-à-dire l'intersection d'un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N) avec D.
f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de l'espace vectoriel normé (E', N') est un fermé relatif de D c'est-à-dire l'intersection d'un fermé de l'espace vectoriel normé (E, N) avec D.

Démonstration.

• Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de l'espace vectoriel normé (E', N') est un ouvert relatif de D. Montrons que f est continue sur D.
Soit $x_0 \in D$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $V = B_o(f(x_0), \varepsilon)$. V est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E', N'). Donc, il existe un ouvert U de l'espace vectoriel normé (E, N) tel que $f^{-1}(V) = U \cap D$. Puisque U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_o(x_0, r) \subset U$.
Soit $\alpha = \dfrac{r}{2}$. Pour $x \in D$,

$$\begin{aligned} N(x - x_0) \leqslant \alpha \Rightarrow N(x - x_0) < r \Rightarrow x \in B_o(x_0, r) \Rightarrow x \in U \cap D \\ \Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow N'(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon \\ \Rightarrow N'(f(x) - f(x_0)) \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, f est continue en chaque x_0 de D et donc f est continue sur D.

• Supposons f continue sur D. Soit V un ouvert de (E', N'). Si $f^{-1}(V)$ est vide, $f^{-1}(V)$ est un ouvert relatif de D. On suppose dorénavant $f^{-1}(V)$ non vide.
Soit $x_0 \in f^{-1}(V)$. Alors, $f(x_0) \in V$. Puisque V est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_o(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in B_f(x_0, \alpha) \cap D$, alors $f(x) \in B_f\left(f(x_0), \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \subset B_o(f(x_0), \varepsilon) \subset V$.
Si $x \in B_o\left(x_0, \dfrac{\alpha}{2}\right)$, alors $f(x) \in V$ ou encore $x \in f^{-1}(V)$. Ainsi, $B_o\left(x_0, \dfrac{\alpha}{2}\right) \cap D \subset f^{-1}(V)$. $f^{-1}(V)$ est donc un voisinage relatif dans D de chacun de ses points ou encore $f^{-1}(V)$ est un ouvert relatif de D.

• Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de l'espace vectoriel normé (E', N') est un ouvert relatif de D. Montrons que l'image réciproque de tout fermé de l'espace vectoriel normé (E', N') est un fermé relatif de D.
Soit F un fermé de l'espace (E', N'). $C_{E'}(F)$ est un ouvert de l'espace (E', N'). Donc, $C_E\left(f^{-1}(F)\right) = f^{-1}(C_{E'}(F))$ est un ouvert relatif de D ou encore $f^{-1}(F)$ est un fermé relatif de D ($f^{-1}(F)$ étant, par définition de f, contenue dans D).

Supposons que l'image réciproque de tout fermé de l'espace vectoriel normé (E', N') est un fermé relatif de D. Montrons que l'image réciproque de tout ouvert de l'espace vectoriel normé (E', N') est un ouvert relatif de D.
Soit U un ouvert de l'espace (E', N'). $C_{E'}(U)$ est un ouvert de l'espace (E', N'). Donc, $C_E\left(f^{-1}(U)\right) = f^{-1}(C_{E'}(U))$ est un fermé relatif de D ou encore $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de D.

Le résultat « l'image directe d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue est un ouvert (resp. fermé) » **est faux**. Par exemple, si f est l'application $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$, continue sur $\mathbb{R}$, on a $f(]-\infty,+\infty[) = [-1,1]$ avec $]-\infty,+\infty[$ ouvert et $[-1,1]$ pas ouvert.

Le théorème 62 est un nouvel outil très performant pour prouver qu'une certaine partie est ouverte ou fermée. Par exemple, d'après le théorème 60, l'application $\begin{array}{llll} N : & (E,N) & \to & (\mathbb{R},|\;|) \\ & x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue sur E. Puisque $\{1\} = [1,1]$ et $[0,1]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, on retrouve le fait que $S(0,1) = N^{-1}(\{1\})$ et $B_f(0,1) = N^{-1}([0,1])$ sont des fermés de l'espace vectoriel normé (E,N).

4-b) Image directe d'un compact par une application continue

Théorème 63. Soient (E,N) et (E',N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soient D une partie non vide de E puis f une application de D vers E'. Soit K un compact relatif de D.

Alors $f(K)$ est un compact de l'espace vectoriel normé (E',N').

Démonstration. Si K est vide, alors $f(K)$ est vide et en particulier, $f(K)$ est un compact de l'espace vectoriel normé (E',N'). On suppose dorénavant K non vide de sorte que $f(K)$ est non vide.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite du compact relatif K, on peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente, de limite un certain élément x de K. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{\varphi(n)} = f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ et puisque f est continue sur K et donc en x, la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $f(x) \in f(K)$.

On a montré que de toute suite d'éléments de $f(K)$, on peut en extraire une sous-suite convergeant dans $f(K)$ et donc $f(K)$ est un compact de l'espace vectoriel normé (E',N').

Le résultat « l'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact » **est faux**. Par exemple, si f est l'application $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$, continue sur $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$ avec $[-1,1]$ compact et $\mathbb{R}$ pas compact. ❑

Dans le cas particulier d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, on retrouve dans une forme plus générale, un résultat énoncé en math sup (en tenant compte du théorème 37) :

Théorème 64. Soit (E,N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soient D une partie non vide de E puis f une application de D vers $\mathbb{R}$. Soit K un compact relatif de D.

Alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$ et en particulier, f admet sur K un minimum et un maximum.

4-c) Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 65. (équivalence des normes en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient N et N' deux normes sur E.

Alors, N et N' sont équivalentes.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base fixée de E. Pour $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on pose $\|x\|_\infty = \text{Max}\{|x_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On sait que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.

• Soit $S = \{x \in E/\ \|x\|_\infty = 1\}$. S est la sphère unité de l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_\infty)$. On sait que S est un fermé de l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_\infty)$. D'autre part, S est une partie bornée de l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_\infty)$. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, S est un compact de l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_\infty)$ puisque E est de dimension finie.

• Soit N une norme quelconque sur E. Pour tout $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, N(e_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)\right) \|x\|_\infty .$$

Soit $k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} N(e_i)$. k est un réel strictement positif (car N est une norme, chaque e_i est non nul et donc chaque $N(e_i)$ est un réel strictement positif). De plus, k ne varie pas quand x varie. Ainsi, k est un réel strictement positif, indépendant de x tel que pour tout x de E,

$$N(x) \leqslant k\|x\|_\infty .$$

• Soit $N : \begin{array}{ccc} (E, \| \|_\infty) & \rightarrow & (\mathbb{R}, | |) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|N(y) - N(x)| \leqslant N(y - x) \leqslant k\|y - x\|_\infty .$$

Donc N est une application lipschitzienne sur l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_\infty)$. En particulier, N est une application continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_\infty)$.

• Puisque N est une application continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_\infty)$ et que S est un compact de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_\infty)$, on sait que $N(S)$ est un compact de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, | |)$. En particulier, $N(S)$ est un ensemble de réels qui a un minimum et un maximum.

Soient α ce minimum et β ce maximum. Il existe $(x_1, x_2) \in S^2$ tel que $\alpha = N(x_1)$ et $\beta = N(x_2)$. Les vecteurs x_1 et x_2 ne sont pas nuls car ces vecteurs sont unitaires pour la norme $\| \|_\infty$. On en déduit que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Soit $x \in \setminus\{0\}$. $\dfrac{1}{\|x\|_\infty}x$ est un élément de S. Donc, $\alpha \leqslant N\left(\dfrac{1}{\|x\|_\infty}x\right) \leqslant \beta$ ou encore, puisque $\|x\|_\infty > 0$

$$\alpha\|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\|_\infty .$$

Cet encadrement reste vrai quand $x = 0$. On a trouvé des nombres réels strictement positifs α et β tels que

$$\forall x \in E,\ \alpha\|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\|_\infty .$$

Ceci montre que les normes N et $\| \|_\infty$ sont équivalentes. Si maintenant N et N' sont deux normes sur E, N et N' sont équivalentes à $\| \|_\infty$ et on sait alors que N et N' sont équivalentes.

Une conséquence importante de ce théorème est que, quand on « fait de la topologie » dans un espace de dimension finie comme $\mathbb{K}^n$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les différents notions ne dépendent pas du choix d'une norme. On choisit donc une norme adaptée à la situation. Par exemple, $\| \|_2$ sera peut-être plus adaptée à un travail dans $O_n(\mathbb{R})$ alors que $\| \|_\infty$ sera peut-être plus adaptée à des matrices à coefficients dans $[-3, 3]$.

5) Continuité des applications linéaires

Une application linéaire d'un espace normé (E, N) vers un espace normé (E', N') est en particulier une application de E vers E' et, en tant que telle, a le droit d'être continue ou pas. Les théorèmes qui suivent analysent cette situation particulière.

Mais commençons par étudier un exemple. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme 1 définie par : $\forall P \in E$, $\|P\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\,dt$. On considère l'application $D : \begin{array}{ccc} (E, \| \|_1) & \rightarrow & (E, \| \|_1) \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. f est un endomorphisme de E. Considérons alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|P_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$. Donc, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (le polynôme nul) dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_1)$. Si D est continue en 0, on doit avoir $D(P_n) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} D(0) = 0$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|D(P_n)\|_1 = \int_0^1 nt^{n-1}\,dt = 1.$$

Donc, $D(P_n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que l'application D n'est pas continue en 0. En fait, l'application D est discontinue en tout point de E car pour tous polynômes P_0 et P, $D(P) - D(P_0) = D(P - P_0)$.

Théorème 66. (continuité d'une application linéaire)

Soient (E, N) et (E', N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$.

f est continue sur E si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E,\ N'(f(x)) \leqslant kN(x)$.

Démonstration.

• Supposons que $\exists k \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E,\ N'(f(x)) \leqslant kN(x)$. Soit $(x, y) \in E^2$. Puisque f est linéaire,

$$N'(f(x) - f(y)) = N'(f(x - y)) \leqslant kN(x - y).$$

Par suite, f est k-lipschitzienne sur E et en particulier, f est continue sur E.

• Supposons f continue sur E. f est alors continue en 0. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x de E, si $N(x) \leqslant \alpha$, alors $N'(f(x)) \leqslant 1$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $N\left(\dfrac{\alpha}{N(x)}x\right) = \alpha$ et donc $N'\left(f\left(\dfrac{\alpha}{N(x)}x\right)\right) \leqslant 1$ ou encore, puisque f est linéaire, $\dfrac{\alpha}{N(x)}N'(f(x)) \leqslant 1$ puis $N'(f(x)) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}N(x)$. Cette dernière inégalité reste vraie quand $x = 0$ et donc, si $k = \dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^+$, alors pour tout x de E, $N'(f(x)) \leqslant kN(x)$.

Définition 27. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. L'ensemble des applications linéaires de E vers E′, continues sur l'espace vectoriel normé (E, N), se note $\mathscr{L}_c(E, E')$.

Commentaire. La notation $\mathscr{L}_c(E, E')$ est un peu ambigüe car il n'y a aucune référence aux normes N et N′.

Théorème 67. $\mathscr{L}_c(E, E')$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, E')$.

Démonstration. $\mathscr{L}(E, E')$ et $C^0(E, E')$ sont des sous-espaces vectoriels de E'^E. Donc, $\mathscr{L}_c(E, E') = \mathscr{L}(E, E') \cap C^0(E, E')$ est un sous-espace vectoriel de E'^E puis de $\mathscr{L}(E, E')$.

Théorème 68. (continuité des applications linéaires en dimension finie)

Soient (E, N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et (E', N') un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$. Alors f est continue sur E.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. On note $\| \ \|_\infty$ la norme infinie associée à cette base. Puisque E est de dimension finie, N et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes. Donc, il existe un réel $\beta > 0$ tel que, pour tout x de E, $\|x\|_\infty \leqslant \beta N(x)$. Pour tout x de E,

$$\begin{aligned} N'(f(x)) &= N'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(f(e_i)) \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} N(f(e_i))\right) \|x\|_\infty \leqslant \beta\left(\sum_{i=1}^{n} N(f(e_i))\right) N(x). \end{aligned}$$

Le réel $k = \beta\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} N(f(e_i))\right)$ est un réel positif tel que, pour tout x de E, $N'(f(x)) \leqslant kN(x)$. D'après le théorème précédent, f est continue sur E.

Théorème 69. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

F est un fermé de l'espace vectoriel normé (E, N).

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Il existe un endomorphisme f de E dont F est le noyau (par exemple, une projection parallèlement à F). Puisque E est de dimension finie, f est continue sur E. Mais alors, $F = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E en tant qu'image réciproque d'un fermé de E (à savoir $\{0\} = B_f(0, 0)$) par une application continue.

Commentaire. Si E est de dimension quelconque, F n'est pas nécessairement fermé.

Exemple. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Une conséquence est que si une certaine suite de matrices symétriques réelles converge, sa limite est une matrice symétrique réelle. ❏

Ainsi, si l'espace de départ est de dimension finie, toute application linéaire est continue. On peut démontrer et on admettra le fait que de manière générale, toute application multilinéaire sur un produit d'espaces de dimension finie est continue sur ce produit. Un cas particulier très important est celui du déterminant. L'application $d : \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n & \to & \mathbb{K} \\ (C_1, \ldots, C_n) & \mapsto & \det(C_1, \ldots, C_n) \end{array}$ est continue sur $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n$ car n-linéaire, ce qui signifie que si, pour une norme donnée, les normes des colonnes C_1,

…, C_n varient peu, le déterminant varie peu. Une variante de ce résultat est le fait que l'application qui, aux n^2 nombres $a_{i,j}$, associe $\det(a_{i,j}) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(n),n}$, est continue sur $\mathbb{K}^{n^2}$. Ce dernier résultat est plutôt une conséquence des théorèmes généraux sur la continuité : chaque application $(a_{i,j}) \mapsto a_{k,l}$ est continue en tant que forme linéaire puis $(a_{i,j}) \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(n),n}$ est continu en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions continues. Enfin, l'application $d: \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K}\\ A & \mapsto & \det(A)\end{array}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car composée de $\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K}^{n^2}\\ A & \mapsto & (a_{i,j})\end{array}$ (continue car linéaire) et de $(a_{i,j}) \mapsto \det(a_{i,j})$.

Exercice 7. (un peu de topologie dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 7.

1) • Soit $\det: \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R}\\ M & \mapsto & \det(M)\end{array}$. On sait que l'application d est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de n'importe quelle norme) et que $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant que réunion de deux intervalles ouverts.
Par suite, $GL_n(\mathbb{R}) = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynôme $\det(A - XI_n)$ n'a qu'un nombre fini de racines (éventuellement nul). Donc pour p entier naturel supérieur ou égal à un certain p_0, $\det\left(A - \frac{1}{p}I\right) \neq 0$. La suite $\left(A - \frac{1}{p}I\right)_{p\geqslant p_0}$ est une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$, convergente, de limite A. Ceci montre que l'adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ est $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou encore $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) • Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé. Posons $g: \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2\\ M & \mapsto & (M, {}^tM)\end{array}$, $h: \begin{array}{ccc}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \rightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ (M,N) & \mapsto & MN\end{array}$ puis $f: \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathscr{M}_n(R)\\ M & \mapsto & M{}^tM\end{array}$ de sorte que $f = h\circ g$.
g est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie. h est continue sur $(M_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que $f = h\circ g$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Enfin $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

• Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est borné. $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$ et donc $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$.

D'après le théorème de Borel-Lebesgue, puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6) Connexité par arcs. Le théorème de valeurs intermédiaires

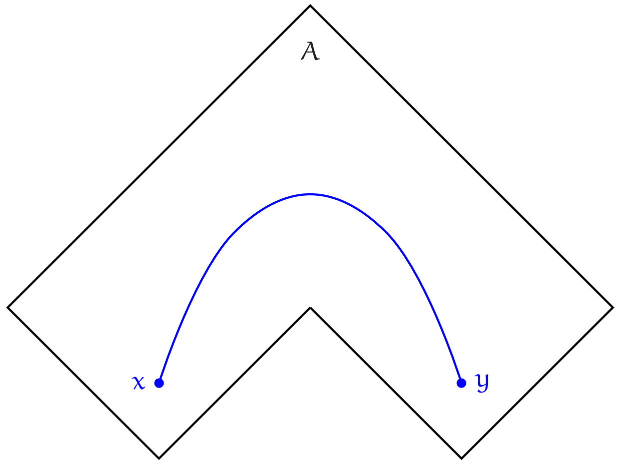
En sup, le théorème des valeurs intermédiaires a à peu près la forme suivante : « si f est une application continue sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'image par f d'un intervalle est un intervalle » ou encore, en plus condensé « l'image continue d'un intervalle est un intervalle ». Nous allons généraliser ce théorème en dégageant d'abord la notion qui généralise la notion d'intervalle.

Définition 28. Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soient x et y deux points de E.

Un **chemin continu joignant les points** x **et** y est une application $\gamma: \begin{array}{ccc}[0,1] & \rightarrow & E\\ t & \mapsto & \gamma(t)\end{array}$, continue sur $[0,1]$, telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Définition 29. Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.

A est **connexe par arcs** si et seulement si, pour tout $(x,y) \in A^2$, il existe un chemin continu γ, joignant les points x et y, tel que $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) \in A$.



Exercice 8. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

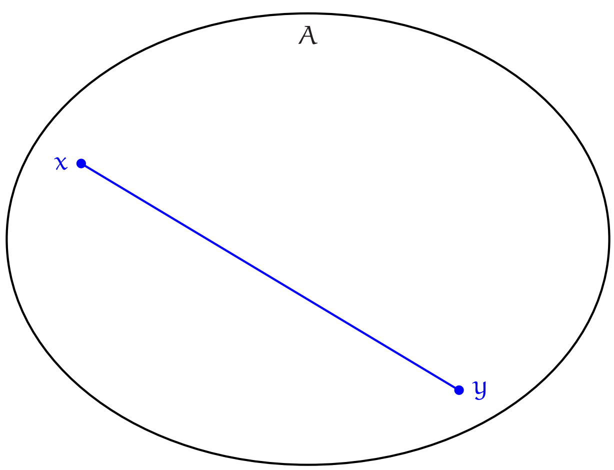
Solution 8. Soient A et B deux matrices réelles diagonalisables. Soient $\gamma_1 : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & (1-t).A + t.0 = (1-t)A \end{array}$ et $\gamma_2 : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & tB \end{array}$. Soit enfin $\gamma : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(2t) \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-1) \text{ si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array} \right. \end{array}$.

γ_1 est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice nulle et γ_2 est un chemin continu joignant la matrice nulle à la matrice B. Donc γ est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice B. De plus, pour tout réel $t \in [0,1]$, la matrice $\gamma_1(t) = (1-t)A$ est diagonalisable car si $A = P\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$ alors $(1-t)A = P\text{diag}((1-t)\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$ et de même, pour tout réel $t \in [0,1]$, la matrice $\gamma_2(t) = tB$ est diagonalisable. Finalement γ est un chemin continu joignant les deux matrices A et B diagonalisables dans $\mathbb{R}$, contenu dans l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$. On a montré que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ est connexe par arcs.

Théorème 70. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.

Si A est convexe, alors A est connexe par arcs.

Démonstration. Soient x et y deux points de A. On sait que pour tout réel $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in A$. L'application $\gamma : t \mapsto (1-t)x + ty$ est un chemin continu joignant les points x et y et tel que $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) \in A$. Ceci montre que A est connexe par arcs.



Théorème 71. (le théorème des valeurs intermédiaires)

Soient (E, N) deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit f une application de E vers E', continue sur E.

L'image par f d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

Démonstration. Soit A une partie non vide de E qui est connexe par arcs. Vérifions que $f(A)$ est connexe par arcs.

Soient x et y deux points de A. Il existe $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$, continue sur $[0,1]$, telles que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ et $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) \in A$.
Soit $\gamma_1 = f \circ \gamma$. γ_1 est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans E' en tant que composée d'applications continues sur $[0,1]$ et E respectivement. De plus, $\gamma_1(0) = f(x)$, $\gamma_1(1) = f(y)$ et pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma_1(t) = f(\gamma(t)) \in f(A)$.

On a montré que $f(A)$ est connexe par arcs.