Espaces euclidiens

I - Rappels des différents résultats de maths sup

1) Orthogonalité. Bases orthonormales

• Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.
• Si $(E, (\,|\,))$ est un espace euclidien de dimension finie non nulle, il existe au moins une base orthonormée de E.

• Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E, alors pour tous vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = (x|e_i) \qquad (x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

• Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a toujours

- $E = F \oplus F^\perp$. On peut dire que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.
- la dimension de $F^\perp$ est $n - \dim(F)$.
- si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base orthonormée de F, pour tout x de E, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)\, e_i$
- $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

2) Automorphismes orthogonaux. Matrices orthogonales

• Soit $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est un automorphisme orthogonal ou encore une isométrie vectorielle si et seulement si f est un automorphisme qui conserve la norme. L'ensemble des automorphismes orthogonaux se noté $O(E)$.

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ f \in O(E) \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|.$$

• Un automorphisme f est orthogonal si et seulement si f conserve le produit scalaire.

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ f \in O(E) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2,\ (f(x)|f(y) = (x|y).$$

• Un automorphisme f est orthogonal si et seulement si l'image d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E.

• $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. Id_E sont est un automorphisme orthogonal. Une composée d'automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal et la réciproque d'un automorphisme orthogonal est un automorphisme orthogonal.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est une matrice orthogonale si et seulement si ${}^tAA = A{}^tA = I_n$. Il revient au même de dire que A est inversible et que $A^{-1} = {}^tA$. L'ensemble des matrices orthogonales de format n se note $O_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \in O_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow {}^tAA = A{}^tA = I_n \\ &\Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = {}^tA.\end{aligned}$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est une matrice orthogonale si et seulement si les colonnes de A constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. A est une matrice orthogonale si et seulement si les lignes de A constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

Ainsi, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice orthogonale.

• $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. I_n est une matrice orthogonale. Un produit de matrices orthogonales est une matrice orthogonale et l'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

• Soient $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Soient $\mathscr{B}'$ une famille de n vecteurs de E puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.
$\mathscr{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si A est une matrice orthogonale.

Les matrices orthogonales sont donc les matrices de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.
• Soient $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Soient f un endomorphisme de E puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
f est un automorphisme orthogonal si et seulement si A est une matrice orthogonale.
Les matrices orthogonales sont donc les matrices d'automorphismes orthogonaux dans une base orthonormée.

• Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Si $f \in O(E)$, alors $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

La réciproque est fausse. Une matrice de déterminant ± 1 n'est pas nécessairement une matrice orthogonale.
Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de déterminant 1 mais n'est pas une matrice orthogonale.

Une matrice orthogonale de déterminant 1 (resp. -1) est une matrice orthogonale positive (resp. négative). L'ensemble des matrices orthogonales positives se note $O_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $O_n^-(\mathbb{R})$). $O_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ et aussi un sous-groupe de $(SL_n(\mathbb{R}), \times)$ (groupe spécial linéaire constitué des matrices de déterminant 1). $O_n^+(\mathbb{R})$ est également noté $SO_n(\mathbb{R})$ (groupe spécial orthogonal).
Un automorphisme orthogonal de déterminant 1 (resp. -1) est un automorphisme orthogonal positif (resp. négatif). L'ensemble des automorphisme orthogonaux positifs se note $O^+(E)$ (resp. $O^-(E)$). $O^+(E)$ est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$ et aussi un sous-groupe de $(SL(E), \circ)$. $O^+(E)$ est également noté $SO(E)$ (groupe spécial orthogonal).

• $O_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$.
$O_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$.
$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1,\ \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}$.

• $O^+(E_2)$ est constitué des rotations vectorielles. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation vectorielle d'angle θ dans une base orthonormée directe. $O^+(E_2)$ est constitué des réflexions. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice dans une base orthonormée directe de la réflexion d'axe la droite d'équation $y = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) x$. ($D$ est la droite d'« angle polaire » $\dfrac{\theta}{2}$)

II - Endomorphismes symétriques. Matrices symétriques réelles

1) Définition

Définition 1. Soient $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien puis f un endomorphisme de E.

f est **symétrique** si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x)|y) = (x|f(y))$.
L'ensemble des endomorphismes symétriques de E se note $\mathscr{S}(E)$.

Exemple 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $f = \lambda \mathrm{Id}_E$. Pour x et y éléments de E,

$$(f(x)|y) = \lambda(x|y) = (x|f(y)).$$

Donc, les homothéties vectorielles sont des endomorphismes symétriques.

Exemple 2. Soient F un sous-espace vectoriel de E puis p_F la projection orthogonale sur F. Pour x et y éléments de E,

$$(p_F(x)|y) = (p_F(x)|y - p_F(y) + p_F(y)) = \Big(\underbrace{p_F(x)}_{\in F} \Big| \underbrace{y - p_F(y)}_{\in F^\perp} \Big) + (p_F(x)|p_F(y)) = (p_F(x)|p_F(y)).$$

Par symétrie des rôles de x et y $(x|p_F(y)) = (p_F(x)|p_F(y)) = (p_F(x)|y)$. Une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.

Exemple 3. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ puis r_θ la rotation vectorielle d'angle θ. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe du plan euclidien orienté P.

$$(r_\theta(e_1)|e_2) = ((\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2)|e_2) = \sin(\theta)$$

et

$$(e_1|r_\theta(e_2)) = (e_1|(-\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2)) = -\sin(\theta).$$

Puisque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $(r_\theta(e_1)|e_2) \neq (e_1|r_\theta(e_2))$. Donc, une rotation vectorielle distincte de $\pm \mathrm{Id}_P$ n'est pas un endomorphisme symétrique.

Théorème 1. Soient $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien puis f un endomorphisme de E. Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de E puis $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

f est symétrique si et seulement si A est symétrique.

Démonstration. Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

• Supposons f symétrique. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée,

$$a_{i,j} = (e_i | f(e_j)) = (f(e_i) | e_j) = a_{j,i}.$$

Donc, la matrice A est symétrique.

• Supposons A symétrique. Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux éléments de E.

$$\begin{aligned}(f(x)|y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \,|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j (f(e_i) | e_j) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i y_j \text{ (car } \mathscr{B} \text{ est orthonormée)} \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i} x_i y_j = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j (f(e_j) | e_i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j)\right) = (x | f(y)).\end{aligned}$$

Donc, f est symétrique.

On sait que l'application $f \mapsto \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Du théorème précédent, on déduit

Théorème 2. $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(E), +, .)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (où $n = \dim(E)$).

Exemple. Soient F un sous-espace vectoriel de E puis s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Puisque $s_F = 2p_F - Id_E$ et que p_F et Id_E sont dans $\mathscr{S}(E)$, on en déduit que s_F est un endomorphisme symétrique. Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme symétrique.

2) Le théorème spectral

Le résultat central de ce paragraphe est le fait qu'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien diagonalise dans une base orthonormée de cet espace ou encore qu'une matrice symétrique réelle est orthogonalement senblable à une matrice diagonale réelle. On prépare le terrain en établissant d'abord deux résultats préliminaires.

Théorème 3.

• Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.
• Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien non réduit à $\{0\}$. Alors χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. • Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Il existe $X = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. On note tout d'abord que

$$^t X \overline{X} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\lambda\, ^t X \overline{X} &= {}^t(\lambda X) \overline{X} = {}^t(AX) \overline{X} = {}^t X\, ^t A\, \overline{X} \\ &= {}^t X \overline{A}\, \overline{X} \text{ (car } A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ &= {}^t X (\overline{AX}) = {}^t X (\overline{\lambda X}) \\ &= \overline{\lambda}\, ^t X \overline{X}\end{aligned}$$

et donc $\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)\,{}^t X\overline{X}=0$. Puisque ${}^t X\overline{X}\neq 0$, on en déduit que $\lambda-\overline{\lambda}=0$ et donc que λ est un réel.

Ainsi, toute valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ est réelle ou encore χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

• Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien non réduit à $\{0\}$. Soit A la matrice de f dans une base orthonormée de E. D'après le théorème 1, A est une matrice symétrique réelle et donc $\chi_f=\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E,(\ |\ ))$ non réduit à $\{0\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

Démonstration. Soit $(x,y)\in F^\perp\times F$. Par hypothèse, $f(y)\in F$ et donc

$$(f(x)|y)=(x|f(y))=0.$$

Ainsi, $\forall x\in F^\perp$, $f(x)\in F^\perp$ ou encore $F^\perp$ est stable par f.

On peut alors passer au théorème central du paragraphe, le théorème spectral.

Théorème 5. (théorème spectral pour les endomorphismes)

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E,(\ |\ ))$ non réduit à $\{0\}$. f est symétrique si et seulement si il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f ou encore f est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

Démonstration. On note E_n un espace euclidien de dimension n. On montre par récurrence sur $n=\dim(E_n)\geqslant 1$ que tout endomorphisme symétrique de E_n diagonalise en base orthonormée.

• $\mathscr{S}(E_1)=\mathscr{L}(E_1)=\{\lambda Id_{E_1}\}$. Donc, tout endomorphisme de E_1 est diagonalisable dans une base orthonormée de E_1 et en particulier, tout endomorphisme symétrique de E_1 est diagonalisable dans une base orthonormée de E_1.

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n soit diagonalisable en base orthonormée.
Soit f un endomorphisme symétrique de E_{n+1}, un espace euclidien de dimension $n+1$. D'après le théorème 3, χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$. f admet donc au moins une valeur propre λ_1 (λ_1 est un réel). Soit e_1' un vecteur propre associé à λ_1. Alors $e_1=\dfrac{1}{\|e_1'\|}e_1'$ est un vecteur propre unitaire associé à λ_1.

Soit $D=\text{Vect}\,(e_1)$. D est stable par f et donc $D^\perp$ est stable par f d'après le théorème 4. f induit donc un endomorphisme de $D^\perp$, endomorphisme que l'on note $f_{D^\perp}$. $f_{D^\perp}$ vérifie $\forall(x,y)\in\left(D^\perp\right)^2$, $(f_{D^\perp}(x)|y)=(x|f_{D^\perp}(y))$. Donc $f_{D^\perp}$ est un endomorphisme symétrique de $D^\perp$ qui est un espace euclidien de dimension n. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(e_2,\ldots,e_{n+1})$ de $D^\perp$ constituée de vecteurs propres de $f_{D^\perp}$ et donc de f.

e_1 est unitaire et orthogonal à chacun des e_i, $2\leqslant i\leqslant n+1$. Donc, $(e_1,e_2,\ldots,e_{n+1})$ est une base orthonormée de E, constituée de vecteurs propres de f.

Le résultat est démontré par récurrence.

Réciproquement, soient $n\geqslant 1$ puis f un endomorphisme de E_n tel qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f. Soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées. Soient $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $y=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$ deux éléments de E. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée,

$$(f(x)|y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_ie_i|\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_iy_i.$$

En échangeant les rôles de x et y, on a

$$(f(x)|y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_iy_i=(f(y)|x)=(x|f(y)).$$

Donc, f est un endomorphisme symétrique.

Théorème 6. (théorème spectral pour les matrices symétriques réelles)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est symétrique si et seulement si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle ou encore si et seulement si

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}) /\ A = PD{}^tP.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathscr{B}$ la base canonique (de sorte que $\mathscr{B}$ est orthonormée et que $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$).

Si A est symétrique réelle, alors f est symétrique et il existe une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f. $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ est une matrice orthogonale D et d'autre part, $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est une matrice orthogonale car matrice de passage d'une base orthonormée à une autre. Les formules de changement de base fournissent

$$A = PDP^{-1} = PD{}^tP.$$

A est donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

Réciproquement, s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PD{}^tP$, alors

$${}^tA = {}^t\left({}^tP\right){}^tD{}^tP = PD{}^tP = A,$$

et A est symétrique réelle.

Commentaire. Le théorème spectral affirme en particulier qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable. Le résultat ne se généralise pas aux matrices symétriques complexes.
Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$. Alors $\chi_A = X^2 - 2iX - 1 = (X - i)^2$. Si A était diagonalisable, A serait semblable à $\text{diag}(i, i) = iI_2$ et donc égale à iI_2 ce qui n'est pas. Donc A est une matrice symétrique complexe non diagonalisable. ❏

3) Projections orthogonales. Symétries orthogonales

3-a) Projections orthogonales

Théorème 7. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. Soit p une projection de E

p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Démonstration.

• Supposons que p soit une projection orthogonale. Soit $x \in E$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

et donc $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

• Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis p la projection sur F parallèlement à G.
Supposons que $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Soit $(x, y) \in F \setminus \{0\} \times G \setminus \{0\}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $p(x + \lambda y) = x$. Par hypothèse, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|x\|^2 = \|p(x + \lambda y)\|^2 \leqslant \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2$$

et donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x|y) \geqslant 0$. Puisque $\|y\|^2 \neq 0$, $\lambda \mapsto \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x|y)$ est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit $0 \geqslant (x|y)^2$ puis $(x|y) = 0$.

Ainsi, tout vecteur non nul de F est orthogonal à tout vecteur non nul de G. Ceci montre que $G \subset F^\perp$. D'autre part, G et $F^\perp$ sont deux supplémentaires de F. Donc, $F^\perp$ et G ont même dimension finie.
On en déduit que $G = F^\perp$ et donc que p est une projection orthogonale.

Théorème 8. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. Soit p une projection de E

p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Démonstration.

• Soit F un sous-espace vectoriel de E. Supposons que p soit la projection orthogonale sur F. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$(p(x)|y) = (p(x)|y - p(y) + p(y)) = (\underbrace{p(x)}_{\in F}|\underbrace{y - p(y)}_{\in F^\perp}) + (p(x)|p(y)) = (p(x)|p(y)).$$

En échangeant les rôles de x et y, on obtient $(p(x)|y) = (p(x)|p(y)) = (x|p(y))$. On a montré que p est un endomorphisme symétrique de E.

• Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis p la projection sur F parallèlement à G.
Supposons que p soit un endomorphisme symétrique. Soit $(x, y) \in F \times G$. Alors, $p(x) = x$ et $p(y) = 0$ puis

$$(x|y) = (p(x)|y) = (x|p(y) = (x|0) = 0.$$

Ainsi, tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G. Ceci montre que $G \subset F^\perp$. D'autre part, G et $F^\perp$ sont deux supplémentaires de F. Donc, $F^\perp$ et G ont même dimension finie.
On en déduit que $G = F^\perp$ et donc que p est une projection orthogonale.

Théorème 9. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. Soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

f est une projection orthogonale si et seulement si $A^2 = A$ et ${}^tA = A$.

Démonstration. On sait déjà que f est une projection si et seulement si $A^2 = A$. D'autre part, puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, f est symétrique si et seulement si A est symétrique d'après le théorème 1.
D'après le théorème précédent, f est une projection orthogonale si et seulement si f est une projection et f est symétrique ce qui équivaut à $A^2 = A$ et ${}^tA = A$.

3-b) Symétries orthogonales

Théorème 10. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. Soit s une symétrie de E

s est une symétrie orthogonale si et seulement si $\forall x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Démonstration.

• Soit F un sous-espace vectoriel de E. Supposons que s soit la symétrie orthogonale par rapport à F. Soit $x \in E$. Posons $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|-x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2.$$

• Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires. Supposons que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G et que pour tout x de E, $\|s(x)\| = \|x\|$. Alors, pour tout $(x_1, x_2) \in F \times G$,

$$0 = \|x_1 + x_2\|^2 - \|s(x_1 + x_2)\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 = 4(x_1|x_2)$$

et donc $(x_1|x_2) = 0$. Ceci montre que $G \subset F^\perp$ puis que $G = F^\perp$ par égalité des dimensions. Ainsi, s est une symétrie orthogonale.

Théorème 11. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. Soit s une symétrie de E.

s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.

Démonstration. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Puisque $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et aussi $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$, que $(\mathscr{S}(E), +, .)$ est un espace vectoriel et que Id_E est un endomorphisme symétrique,

s est symétrique si et seulement si p est symétrique.

D'après le théorème 8, s est symétrique si et seulement si $G = F^\perp$ ce qui équivaut au fait que s est une symétrie orthogonale.

Théorème 12. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. Soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E puis $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

f est une symétrie orthogonale si et seulement si $A^2 = I_n$ et ${}^tA = A$.

Démonstration. Comme pour le théorème 9, f est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$ et f est une symétrie si et seulement si $A^2 = I_n$.

III - Réduction des automorphismes orthogonaux.

Comme pour les endomorphismes symétriques, l'établissement du résultat principal (théorème 15) est préparé par l'établissement de deux résultats préliminaires (théorèmes 13 et 14).

Théorème 13. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension non nulle. Soit $f \in O(E)$. Toute valeur propre éventuelle de f appartient à $\{-1, 1\}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de f. Il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Puisque $f \in O(E)$,

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,$$

et donc $|\lambda| = 1$ car $\|x\| \neq 0$. Par suite, $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Commentaire. L'exemple de la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$ montre qu'il est possible qu'un automorphisme orthogonal n'admette pas de valeur propre. ❑

Théorème 14. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension non nulle. Soit $f \in O(E)$. f admet au moins une droite stable ou un plan stable.

Démonstration. Si χ_f admet au moins une racine réelle λ, alors λ est valeur propre de f. Soit x un vecteur propre associé. $D = \text{Vect}(x)$ est une droite vectorielle stable par f.

Sinon, χ_f n'a pas de racine réelle ce qui impose $\dim(E) \geqslant 2$. Dans ce cas, la décomposition de χ_f en produit de facteurs irréductibles s'écrit

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{k} \left(X^2 + a_i X + b_i\right)^{\alpha_i}$$

où les a_i et les b_i réels tels que $a_i^2 - 4b_i < 0$. L'un au moins des endomorphismes $f^2 + a_i f + b_i \text{Id}_E$ a un noyau non réduit à $\{0\}$. En effet, dans le cas contraire, chaque $f^2 + a_i f + b_i \text{Id}_E$ est un automorphisme de E puis $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(f^2 + a_i f + b_i \text{Id}_E\right)_i^{\alpha} = \chi_f(f)$ est un automorphisme de E ce qui contredit l'égalité $\chi_f(f) = 0$.

Soit donc $i \in [\![1, k]\!]$ tel que $\text{Ker}\left(f^2 + a_i f + b_i \text{Id}_E\right) \neq \{0\}$. Soit x un vecteur non nul de ce noyau puis $P = \text{Vect}(x, f(x))$. $f(x)$ n'est pas colinéaire à x car f n'a pas de valeur propre. Donc, P est un plan vectoriel. De plus,

$$f(P) = \text{Vect}\left(f(x), f^2(x)\right) = \text{Vect}\left(f(x), -b_i x - a_i f(x)\right) \subset \text{Vect}(x, f(x)) = P.$$

Donc, P est un plan stable par f.

Commentaire. Le résultat précédent est valable pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. ❑

Théorème 15. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension non nulle. Soit $f \in O(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f. De plus, f induit un automorphisme orthogonal de F et un automorphisme orthogonal de $F^\perp$.

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On a donc $f(F) \subset F$ puis $f(F) = F$ par égalité des dimensions de F et $f(F)$ (f étant un automorphisme) puis $f^{-1}(F) = F$ (en prenant l'image des deux membres par f^{-1}).

Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$. Soit $z = f^{-1}(y)$ de sorte que $z \in F$ et $y = f(z)$. Alors,

$$(f(x)|y) = (f(x)|f(z)) = (x|z) = 0.$$

Ainsi, $f(x)$ est orthogonal à tout élément de F et donc $f(x) \in F^{\perp}$. On a montré que $F^{\perp}$ est stable par f.

Enfin, f induit un endomorphisme de F (resp. $F^{\perp}$) qui conserve la norme et donc f induit un automorphisme orthogonal de F (resp. $F^{\perp}$).

Théorème 16. (Réduction des automorphismes orthogonaux)

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est un automorphisme orthogonal si et seulement si il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale par blocs du type

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & R(\theta_k) & & \\ & 0 & & I_p & \\ & & & & -I_q \end{pmatrix} \quad (*)$$

où pour $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Démonstration. Une matrice du type $(*)$ est orthogonale car ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. Donc, si la matrice d'un certain endomorphisme f dans une certaine base orthonormée d'un espace euclidien est du type $(*)$, alors f est un automorphisme orthogonal.

On montre la réciproque de ce résultat par récurrence sur $n = \dim(E) \geqslant 1$. On note E_n un espace euclidien de dimension n.

• $O(E_1) = \{-Id_{E_1}, Id_{E_1}\}$. Le résultat est donc vrai quand $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat acquis pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Soit $f \in O(E_{n+1})$.

1er cas. Si f admet une valeur propre λ, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$. Il existe un vecteur propre unitaire e_1 associé à cette valeur propre. D'après le théorème 15, puisque $D = \text{Vect}(e_1)$ est stable par f, $D^{\perp}$ est stable par f et la restriction de f à $D^{\perp}$ induit un automorphisme orthogonal de D. Puisque $\dim\left(D^{\perp}\right) = n$, l'hypothèse de récurrence nous fournit une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e_2, \ldots, e_{n+1})$ de $D^{\perp}$ dans laquelle la matrice de cette restriction est du type $(*)$. Quite à réordonner les vecteurs de la base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$, on obtient une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est du type $(*)$.

2ème cas. Si f n'admet pas de valeur propre, f admet au moins un plan stable P. f induit un automorphisme orthogonal $\widetilde{f}$ de P qui n'a pas de valeur propre (car le polynôme caractéristique de $\widetilde{f}$ divise le polynôme caractéristique de f). Les automorphismes orthogonaux d'un plan euclidien sont les rotations et les réflexions. Puisque qu'une réflexion admet une valeur propre, $\widetilde{f}$ est une rotation. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de P. La matrice de $\widetilde{f}$ dans (e_1, e_2) est $R(\theta)$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Si $n = 1$ de sorte que $n + 1 = 2$, le résultat est établi. Sinon, $n + 1 \geqslant 3$.
D'après le théorème 15, $P^{\perp}$ est stable par f et la restriction de f à $P^{\perp}$ induit un automorphisme orthogonal de $P^{\perp}$. Puisque $\dim\left(P^{\perp}\right) = n - 1$, l'hypothèse de récurrence nous fournit une base orthonormée $(e_3, \ldots, e_{n+1})$ de $P^{\perp}$ dans laquelle la matrice de l'automorphisme orthogonal induit par f est du type $(*)$. Mais alors $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est du type $(*)$.

Le résultat est démontré par récurrence.

A l'aide du théorème précédent, on peut maintenant décrire les automorphismes orthogonaux positifs d'un espace euclidien de dimension 3. Un automorphisme orthogonal f de E_3 a une matrice du type $(*)$ (voir théorème 16) dans une certaine base orthonormée. Avec les notations du théorème 16, $\det(f) = (-1)^q$. Par suite, $f \in SO(E_3) \Leftrightarrow q$ est pair. Deux types de matrices de format 3 correspondent à cette situation :

• $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et en particulier $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (quand $q = 0$)

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (quand $q = 2$).

Mais si la matrice de f dans une certaine base orthonormée (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (e_2, e_3, e_1) est une autre base orthonormée dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) & 0 \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, dans tous les cas, si f est un automorphisme orthogonal positif de E_3, il existe une base orthonormée de E_3 dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Réciproquement, cette dernière matrice est orthogonale positive et donc si la matrice de f dans une certaine base orthonormée est de ce type, f est un automorphisme orthogonal positif de E_3. On peut donc énoncer

Théorème 17. (Automorphismes orthogonaux positifs d'un espace euclidien de dimension 3)

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension 3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est un automorphisme orthogonal positif si et seulement si il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Soit f de matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une certaine base orthonormée (e_1, e_2, e_3) où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Si on oriente $P = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ de telle sorte que (e_1, e_2) soit une base orthonormée directe de P, la restriction de f à $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ « est » la rotation d'angle θ. D'autre part, f laisse invariant tout vecteur de $P^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(e_3)$. Pour cette raison, on dit alors que f est une **rotation** autour de e_3 et même la rotation d'angle θ autour de e_3. On a démontré que

tout automorphisme orthogonal positif d'un espace euclidien de dimension 3, distinct de l'identité, est une rotation.

