

# Espaces préhilbertiens réels

## I - Produit scalaire

### 1) Définition d'un produit scalaire

DÉFINITION 1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit  $\varphi$  une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ .

$\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$  si et seulement si  $\varphi$  est une forme **bilinéaire, symétrique, définie, positive** sur  $E$  c'est-à-dire

**Bilinéarité :**  $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \varphi(x_1, y) + \lambda_2 \varphi(x_2, y)$  (linéarité par rapport à la 1ère variable) et

$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \varphi(x, y_1) + \lambda_2 \varphi(x, y_2)$  (linéarité par rapport à la 2ème variable).

**Symétrie :**  $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ .

**Positivité :**  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$ .

**Définition :**  $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

**Notation.** Si  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ ,  $\varphi(x, y)$  peut se noter  $x \cdot y$ . C'est cette notation qui est adoptée quand on fait de la géométrie en dimension 2 ou 3 avec le produit scalaire usuel. Quand  $E$  est un espace de suites, de polynômes, de fonctions ..., la notation avec un point devient trop ambiguë ( $u \cdot v, P \cdot Q, f \cdot g$ ). On préférera alors la notation  $(x|y)$  ou  $\langle x, y \rangle$ . La notation  $\langle, \rangle$  peut s'avérer pénible si on est amené à écrire des inégalités :  $\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle x, x \rangle > 0$ .

**Commentaire 1.** Dans la pratique, pour vérifier que  $\varphi$  est un produit scalaire, on commence par vérifier la symétrie puis on vérifie la linéarité par rapport à la première variable. La linéarité par rapport à la deuxième variable s'en déduit par symétrie

$$\varphi(x, \lambda_1 x y_1 + \lambda_2 y_2) = \varphi(\lambda_1 x y_1 + \lambda_2 y_2, x) = \lambda_1 \varphi(y_1, x) + \lambda_2 \varphi(y_2, x) = \lambda_1 \varphi(x, y_1) + \lambda_2 \varphi(x, y_2).$$

**Commentaire 2.** La positivité et la définition peuvent se traiter ensemble :

$$\varphi \text{ est définie, positive} \Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) > 0.$$

**Exercice 1.** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour  $(P, Q) \in E^2$ , on pose  $(P|Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

Montrer que  $(|)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**Solution 1.** • Soit  $(P, Q) \in E^2$ . La fonction  $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est continue sur  $] -1, 1[$ . De plus, la fonction  $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$  est continue en 1 (resp. la fonction  $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}$  est continue en  $-1$ ) et en particulier bornée au voisinage de 1 (resp.  $-1$ ). Par suite,  $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}} \underset{t \rightarrow 1, t < 1}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$  (resp.  $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}} \times \frac{1}{\sqrt{1+t}} \underset{t \rightarrow -1, t > -1}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ ). On en déduit que la fonction  $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est intégrable sur  $] -1, 1[$  et donc que  $(P|Q)$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

• Soit  $(P, Q) \in E^2$ .  $(Q|P) = \int_{-1}^1 \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = (P|Q)$ . Donc,  $(|)$  est une forme symétrique.

• Soient  $(P_1, P_2, Q) \in E^3$  et  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 | Q) &= \int_{-1}^1 \frac{(\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t)) Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^1 \frac{P_1(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \lambda_2 \int_{-1}^1 \frac{P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \lambda_1 (P_1 | Q) + \lambda_2 (P_2 | Q). \end{aligned}$$

Donc,  $(|)$  est une forme linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

- Soit  $P \in E$ .  $(P|P) = \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0$  par positivité de l'intégrale. Donc,  $(|)$  est une forme positive.
- Soit  $P \in E$ .

$$\begin{aligned} (P|P) = 0 &\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in ]-1, 1[, \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow \forall t \in ]-1, 1[, P(t) = 0 \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).} \end{aligned}$$

Donc,  $(|)$  est une forme définie.

En résumé,  $(|)$  est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur  $E$  et donc  $(|)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**Commentaire.** Dans l'exercice précédent, on peut traiter la positivité et la définition ensembles mais il faut être méticuleux : soit  $P \in E \setminus \{0\}$ .  $P$  admet donc un nombre fini de racines. Puisque  $] - 1, 1[$  est infini, la fonction  $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est continue, positive et non nulle sur  $] - 1, 1[$ . On en déduit que

$$(P|P) = \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt > 0.$$

**DÉFINITION 2.** Un **espace préhilbertien réel** est un couple  $(E, \varphi)$  où  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  un produit scalaire sur  $E$ .

Si de plus,  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $(E, \varphi)$  est un **espace euclidien**.

**Commentaire.** Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux produits scalaires différents sur un même espace  $E$ , les espaces préhilbertiens  $(E, \varphi)$  et  $(E, \psi)$  sont différents ou encore, quand on change de produit scalaire, on change d'espace préhilbertiens.

## 2) Espaces préhilbertiens de référence

- Soit  $E = \mathbb{R}^n$ . Le produit scalaire canonique sur  $E$  est défini par

$$\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

- Soit  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Le produit scalaire canonique sur  $E$  est défini par

$$\text{Pour tout } X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ et tout } Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X|Y = {}^tX \times Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

- Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le produit scalaire canonique sur  $E$  est défini par

$$\text{Pour tout } A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ et tout } B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A|B = \text{Tr}({}^tA \times B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

- Soit  $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ . Un produit scalaire sur  $E$  est défini par

$$\forall (f, g) \in E^2, f|g = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

- Posons  $\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty \right\}$ .  $\ell^2(\mathbb{R})$  est l'ensemble des suites réelles de carré sommable.

Vérifions tout d'abord que  $\ell^2(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ .

- La suite nulle est dans  $\ell^2(\mathbb{R})$ .

- Soit  $(u, v) \in (\ell^2(\mathbb{R}))^2$  et soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Puisque  $(|u| - |v|)^2 \geq 0$ , on a  $|uv| \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ . On en déduit que

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\lambda u + \mu v)^2 = \lambda^2 u^2 + 2\lambda\mu uv + \mu^2 v^2 \\
&\leq \lambda^2 u^2 + 2|\lambda||\mu||uv| + \mu^2 v^2 \\
&\leq \lambda^2 u^2 + |\lambda||\mu| (u^2 + v^2) + \mu^2 v^2 = (\lambda^2 + |\lambda||\mu|) u^2 + (|\lambda||\mu| + \mu^2) v^2.
\end{aligned}$$

La série de terme général  $(\lambda^2 + |\lambda||\mu|) u_n^2 + (|\lambda||\mu| + \mu^2) v_n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est convergente et donc la série de terme général  $(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est convergente ou encore  $\lambda u + \mu v \in \ell^2(\mathbb{R})$ .

On a montré que  $\ell^2(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ . Pour  $(u, v) \in (\ell^2(\mathbb{R}))^2$ , on pose alors

$$u|v = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

Vérifions que  $(| \cdot |)$  est un produit scalaire sur  $\ell^2(\mathbb{R})$ .

- Pour  $(u, v) \in (\ell^2(\mathbb{R}))^2$ ,  $|uv| \leq \frac{1}{2} (u^2 + v^2)$ . Ceci montre que la série de terme général  $u_n v_n$  est absolument convergente et donc convergente. On en déduit que  $u|v$  existe dans  $\mathbb{R}$ .
- La symétrie et la bilinéarité de  $(| \cdot |)$  sont claires.
- Soit  $u \in \ell^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Alors, tous les  $u_n^2$  sont positifs ou nuls et l'un des  $u_n^2$  est strictement positif. On en déduit que

$$u|u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 > 0.$$

Finalement,  $(| \cdot |)$  est un produit scalaire sur  $\ell^2(\mathbb{R})$  ou encore  $(\ell^2(\mathbb{R}), (| \cdot |))$  est un espace préhilbertien réel.

- Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Posons  $L_c^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f \in C^0(I, \mathbb{R}) / \int_I f^2(x) dx < +\infty \right\}$ .  $L_c^2(\mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions réelles, continues sur  $I$  et de carré intégrable sur  $I$ .

Vérifions tout d'abord que  $L_c^2(I, \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $(C^0(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ . Déjà,  $L_c^2(I, \mathbb{R}) \subset C^0(I, \mathbb{R})$ . Ensuite,

- la fonction nulle est dans  $L_c^2(I, \mathbb{R})$ .
- Soit  $(f, g) \in (L_c^2(I, \mathbb{R}))^2$  et soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda\mu fg + \mu^2 g^2 \\
&\leq \lambda^2 f^2 + 2|\lambda||\mu||fg| + \mu^2 g^2 \\
&\leq \lambda^2 f^2 + |\lambda||\mu| (f^2 + g^2) + \mu^2 g^2 = (\lambda^2 + |\lambda||\mu|) f^2 + (|\lambda||\mu| + \mu^2) g^2.
\end{aligned}$$

La fonction  $(\lambda^2 + |\lambda||\mu|) f^2 + (|\lambda||\mu| + \mu^2) g^2$  est intégrable sur  $I$  et donc la fonction  $(\lambda f + \mu g)^2$  est intégrable sur  $I$  ou encore  $\lambda f + \mu g \in L_c^2(I, \mathbb{R})$ .

On a montré que  $L_c^2(I, \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $(C^0(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ . Pour  $(f, g) \in (L_c^2(I, \mathbb{R}))^2$ , on pose alors

$$f|g = \int_I f(x)g(x) dx.$$

Vérifions que  $(| \cdot |)$  est un produit scalaire sur  $L_c^2(I, \mathbb{R})$ .

- Pour  $(f, g) \in (L_c^2(I, \mathbb{R}))^2$ ,  $|fg| \leq \frac{1}{2} (f^2 + g^2)$ . Ceci montre que la fonction  $fg$  est intégrable sur  $I$ . On en déduit que  $f|g$  existe dans  $\mathbb{R}$ .
- La symétrie et la bilinéarité de  $(| \cdot |)$  sont claires.
- Soit  $f \in L_c^2(I, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Alors, la fonction  $f^2$  est continue, positive et non nulle sur  $I$ . On en déduit que

$$f|f = \int_I f^2(x) dx > 0.$$

Finalement,  $(| \cdot |)$  est un produit scalaire sur  $L_c^2(I, \mathbb{R})$  ou encore  $(L_c^2(I, \mathbb{R}), (| \cdot |))$  est un espace préhilbertien réel.

### 3) Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

**Théorème 1.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}.$$

De plus,  $|(x|y)| = \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$  si et seulement si la famille  $(x, y)$  est liée (cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

**Démonstration.** Soit  $(x, y) \in E^2$ . Si  $x = 0$ , l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ est vérifiée et de plus, il s'agit d'un cas d'égalité.

Supposons maintenant  $x \neq 0$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $P(\lambda) = (\lambda x - y)^2$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $P(\lambda) \geq 0$  et d'autre part

$$P(\lambda) = (x|x)\lambda^2 - 2(x|y)\lambda + (y|y).$$

Puisque le coefficient  $(x|x)$  de  $\lambda^2$  n'est pas nul,  $P$  est un trinôme du second degré de signe constant sur  $\mathbb{R}$ . Son discriminant réduit est donc négatif ou nul. On en déduit que

$$0 \geq \Delta' = (x|y)^2 - (x|x)(y|y),$$

puis que  $(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$  puis que  $\sqrt{(x|y)^2} \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$  et finalement que  $|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$  (\*). De plus,

$$\begin{aligned} (*) \text{ est une égalité} &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \Delta' = 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / P(\lambda_0) = 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / (\lambda_0 x - y)^2 = 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / y = \lambda_0 x) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \text{ est liée.} \end{aligned}$$

---

### 4) Norme hilbertienne

#### 4-a) Définition

**Théorème 2.** (Inégalité de MINKOWSKI)

Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel. Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\sqrt{(x+y)|(x+y)} \leq \sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)},$$

avec égalité si et seulement si  $x = 0$  ou  $(x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x)$ .

**Démonstration.** Soit  $(x, y) \in E^2$ .

$$\begin{aligned} (x+y)|(x+y) &= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \\ &\leq (x|x) + 2|(x|y)| + (y|y) \\ &\leq (x|x) + 2\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} + (y|y) = \left(\sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)}\right)^2 \quad (*), \end{aligned}$$

et donc  $\sqrt{(x+y)|(x+y)} \leq \sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)}$ . De plus, on a l'égalité si et seulement si chaque inégalité écrite est une égalité. La deuxième inégalité est une égalité si et seulement si  $(x = 0)$  ou  $(x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x)$  (cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ). La première inégalité est une égalité si et seulement si  $(x|y) = |(x|y)|$  ou encore si et seulement si  $(x|y) \geq 0$ . Donc,

$$\begin{aligned} (*) \text{ est une égalité} &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x \text{ et } (x|y) \geq 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x \text{ et } \lambda(x|x) \geq 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x \text{ et } \lambda \geq 0 \text{ (car } (x|x) > 0)) \\ &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x). \end{aligned}$$

**Théorème 3.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel. L'application  $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$  est une norme sur  $E$ .

**Démonstration.** • Par définition d'un produit scalaire,  $\forall x \in E, (x|x) \geq 0$ . Donc,  $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$  est bien une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

- $\forall x \in E, \sqrt{(x|x)} \geq 0$ .
- Pour  $x \in E, \sqrt{(x|x)} = 0 \Rightarrow (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .
- Pour  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}, \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x|x)} = |\lambda|\sqrt{(x|x)}$ .
- L'inégalité triangulaire est l'inégalité de MINKOWSKI.

On a montré que l'application  $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$  est une norme sur  $E$ .

**DÉFINITION 3.** Pour  $x \in E$ , on pose  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .  $\| \cdot \|$  est la **norme hilbertienne** sur  $E$  ou encore  $\| \cdot \|$  est la **norme associée au produit scalaire**  $( | )$ .

**Commentaire.** L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ s'écrit dorénavant :  $\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$ . En particulier,

$$\forall x \neq 0, \forall y \neq 0, -1 \leq \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|} \leq 1.$$

On décide alors de poser

$$\forall x \neq 0, \forall y \neq 0, \cos(x, y) = \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}.$$

#### 4-b) Carré scalaire

Le produit scalaire d'un vecteur  $x$  par lui-même est encore appelé le **carré scalaire** de  $x$ . On le note  $x^2$ . On a donc

$$\forall x \in E, x^2 = (x|x) = \|x\|^2.$$

La bilinéarité du produit scalaire fournit immédiatement les identités remarquables suivantes :

**Théorème 4.** Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

- $\|x + y\|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2(x|y) + y^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ .
- $\|x - y\|^2 = (x - y)^2 = x^2 - 2(x|y) + y^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$ .
- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$ .

#### 4-c) Théorème de PYTHAGORE

Le théorème 4 fournit immédiatement

**Théorème 5.** (Théorème de PYTHAGORE)

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow (x|y) = 0.$$

**Commentaire.** On peut noter que dorénavant, le théorème de PYTHAGORE est directement une équivalence contrairement à ce qui se passe au collège puis au lycée où on parle de théorème de PYTHAGORE et de réciproque du théorème de PYTHAGORE.  $\square$

Si on cherche à généraliser à plus de deux vecteurs le théorème précédent, on n'a plus une équivalence :

**Théorème 6.** Soient  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ )  $n$  vecteurs de  $E$ .

**Si** pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , on a  $(x_i|x_j) = 0$ , **alors**  $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$ .

**Démonstration.** Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  tel que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , on a  $(x_i|x_j) = 0$ . Alors, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \|x_1 + \dots + x_n\|^2 &= (x_1 + \dots + x_n)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i|x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i|x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2. \end{aligned}$$

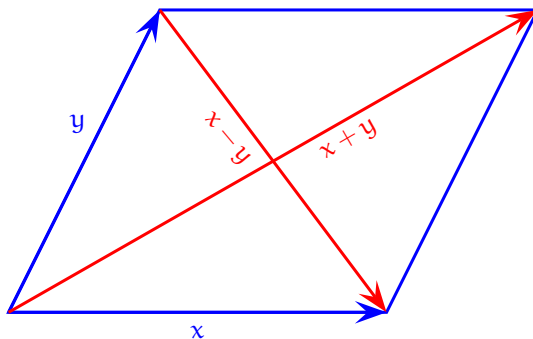
#### 4-d) Identité du parallélogramme

En additionnant les deux premières égalités du théorème 4, on obtient

**Théorème 7.** (Identité du parallélogramme)

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**Commentaire.** L'égalité ci-dessus doit être comprise sous la forme  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2$ . Cette identité signifie que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales de ce parallélogramme.



□

#### 4-e) Identités de polarisation

La norme hilbertienne est exprimée en fonction du produit scalaire ( | ) :

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

On fait maintenant le contraire à savoir on exprime le produit scalaire en fonction de la norme. A partir du théorème 4, on obtient

**Théorème 8.** (Identités de polarisation)

- $\forall x \in E, x^2 = (x|x) = \|x\|^2$ .
- $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ .

**Commentaire.** Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est

$$(x|y) = \|x\| \|y\| \cos(x, y).$$

Sa valeur est définie à partir de longueurs et d'angles. Le théorème précédent montre qu'un produit scalaire peut s'exprimer à partir de longueurs uniquement.

□

## II -Orthogonalité

### 1) Vecteurs orthogonaux

**DÉFINITION 4.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$ .  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** si et seulement si  $(x|y) = 0$ .

### 2) Orthogonal d'une partie de $E$

**DÉFINITION 5.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . L'orthogonal de  $A$ , noté  $A^\perp$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont orthogonaux à tous les éléments de  $A$  :

$$A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A, (x|y) = 0\}.$$

**Convention.**  $\emptyset^\perp = E$ .

**Notation.** Si  $x$  est un élément de  $E$ ,  $\{x\}^\perp$  se note plus simplement  $x^\perp$ .

**Théorème 9.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel.  
Pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Démonstration.** Si  $A = \emptyset$ , alors conventionnellement  $A^\perp = E$ . Dans ce cas,  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Supposons maintenant  $A \neq \emptyset$ .

- Pour tout  $y$  de  $A$ ,  $(0|y) = 0$  et donc  $0 \in A^\perp$ .
- Soient  $(x_1, x_2) \in (A^\perp)^2$  et  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ . Alors, pour tout  $y$  de  $A$ ,

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 | y) = \lambda_1 (x_1 | y) + \lambda_2 (x_2 | y) = 0 + 0 = 0,$$

et donc  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A^\perp$ .

Ceci montre que  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Théorème 10.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel.  $0^\perp = E$  et  $E^\perp = \{0\}$ .

**Démonstration.**

- Tout vecteur est orthogonal à  $0$  et donc  $0^\perp = E$ .
- Soit  $x \in E^\perp$ .  $x$  est orthogonal à tout vecteur de  $E$  et est en particulier orthogonal à lui-même. Par suite,  $(x|x) = 0$  puis  $x = 0$ . Ainsi,  $E^\perp \subset \{0\}$  puis  $E^\perp = \{0\}$  car  $E^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Théorème 11.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel.

- 1)  $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ ,  $(A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp)$ .
- 2)  $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ .

**Démonstration.** • Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  telles que  $A \subset B$ . Si  $A = \emptyset$ , alors  $A^\perp = E$  puis  $B^\perp \subset A^\perp$ .  
Si  $A \neq \emptyset$ , alors  $B \neq \emptyset$ . Soit  $x \in E$ .

$$x \in B^\perp \Rightarrow \forall y \in B, (x|y) = 0 \Rightarrow \forall y \in A, (x|y) = 0 \Rightarrow x \in A^\perp.$$

Ceci montre que  $B^\perp \subset A^\perp$ .

• Soit  $A$  une partie de  $E$ . Si  $A = \emptyset$ , alors  $\text{Vect}(A) = \{0\}$  puis  $A^\perp = E = (\text{Vect}(A))^\perp$ . Supposons maintenant  $A \neq \emptyset$ .  
Puisque  $A \subset \text{Vect}(A)$ , on a  $(\text{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$ .

Inversement, un élément de l'orthogonal à  $A$  est encore orthogonal à toute combinaison linéaire d'éléments de  $A$  par bilinéarité du produit scalaire et donc est dans l'orthogonal de  $\text{Vect}(A)$ . Ceci montre que  $(\text{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$  et finalement que  $(\text{Vect}(A))^\perp = A^\perp$ .

**Commentaire.** Le résultat précédent est très utilisé dans la pratique : pour qu'un vecteur soit orthogonal à un sous-espace vectoriel  $F$ , il faut et il suffit que ce vecteur soit orthogonal à une famille génératrice de  $F$ . Un cas particulier de ce résultat est utilisé en géométrie en dimension 3 au lycée : une droite affine  $D$  est perpendiculaire à un plan affine  $P$  si et seulement si  $D$  est orthogonale à deux droites sécantes du plan  $P$ .  $\square$

**Théorème 12.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel.

- 1) Pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ ,  $F \subset (F^\perp)^\perp$ .
- 2) Pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ ,  $F \cap F^\perp = \{0\}$ .

**Démonstration.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- Un vecteur de  $F$  est orthogonal à tout vecteur orthogonal à  $F$  et donc est dans  $(F^\perp)^\perp$ . Ceci montre que  $F \subset (F^\perp)^\perp$ .
- Soit  $x \in F \cap F^\perp$ . Alors  $(x|x) = 0$  puis  $x = 0$ . Ceci montre que  $F \cap F^\perp \subset \{0\}$  puis que  $F \cap F^\perp = \{0\}$  car  $F \cap F^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

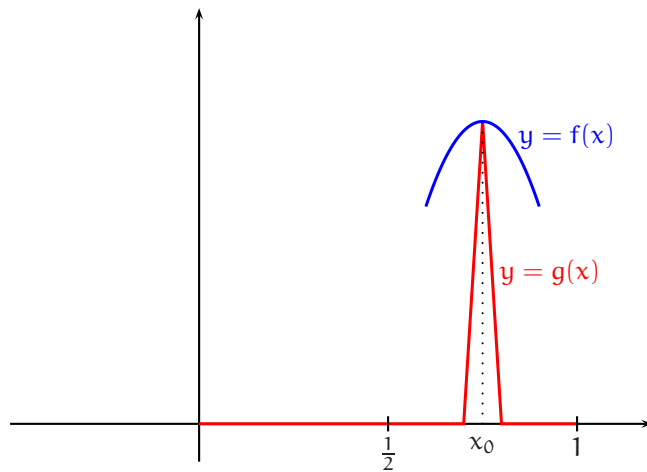
**Commentaire.** Le théorème précédent peut surprendre. On a toujours  $F \subset (F^\perp)^\perp$  mais on ne précise pas que  $F = (F^\perp)^\perp$ . De même, on a toujours  $F \cap F^\perp = \{0\}$  mais on ne précise pas que  $E = F \oplus F^\perp$ . Il est vrai que ces égalités sont exactes quand  $E$  est de dimension finie mais on va voir avec l'exemple qui suit qu'il est possible d'avoir  $F \subsetneq (F^\perp)^\perp$  et  $F + F^\perp \subsetneq E$  quand

E est de dimension infinie. Une représentation mentale d'une situation en dimension infinie par un dessin en dimension 3 peut donc être une représentation fautive.  $\square$

**Exemple.** Soit  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $(f, g) \in E^2$ , on pose  $(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$  (on sait que  $(|)$  est un produit scalaire sur E).

Soit  $H = \left\{ g \in E / \int_0^{1/2} g(x) dx = 0 \right\}$ . H est un sous-espace vectoriel de E (car H est le noyau de la forme linéaire  $g \mapsto \int_0^{1/2} g(x) dx$ ) et  $H \neq E$  car la fonction constante  $f : x \mapsto 1$  est un élément de E qui n'est pas dans H. On va montrer que  $H^\perp = \{0\}$  ce qui aura pour conséquence le fait que  $(H^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E \neq H$  et  $H + H^\perp = H + \{0\} = H \neq E$ .

Soit  $f \in H^\perp$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $x_0 \in ]\frac{1}{2}, 1[$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ . Quite à remplacer f par  $-f$ , on peut supposer que  $f(x_0) > 0$ . Par continuité de f en  $x_0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset ]\frac{1}{2}, 1[$  et  $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ,  $f(x) \geq 0$ . Soit alors g la fonction continue sur  $[0, 1]$ , nulle sur  $[0, x_0 - \alpha] \cup [x_0 + \alpha, 1]$ , affine sur  $[x_0 - \alpha, x_0]$  et sur  $[x_0, x_0 + \alpha]$  et prenant la même valeur que f en  $x_0$ .



g est en particulier nulle sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et en particulier,  $g \in H$ . On en déduit que  $\int_0^1 f(x)g(x) dx = 0$  puis que  $\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(x)g(x) dx = 0$ . Mais la fonction fg est continue, positive et non nulle sur  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  (car  $f(x_0)g(x_0) = (f(x_0))^2 > 0$ ) et donc  $\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(x)g(x) dx > 0$ . Ceci est une contradiction et donc  $f|_{]1/2, 1[} = 0$  puis  $f|_{[1/2, 1]} = 0$  par continuité de f en  $\frac{1}{2}$  et en 1.

Soit alors  $g = f - 2 \int_0^{1/2} f(x) dx$  a une intégrale nulle sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et donc est dans H. Puisque  $f \in H^\perp$ , on a  $\int_0^1 f(x)g(x) dx = 0$  puis  $\int_0^{1/2} f(x)g(x) dx = 0$  car f est nulle sur  $[\frac{1}{2}, 1]$  et donc  $\int_0^{1/2} f(t) \left( f(t) - 2 \int_0^{1/2} f(x) dx \right) dt = 0$  puis  $\left( \int_0^{1/2} f(x) dx \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} f^2(x) dx$ .

Cette dernière égalité s'écrit encore  $\left( \int_0^{1/2} 1 \times f(x) dx \right)^2 = \left( \int_0^{1/2} 1^2 dx \right) \left( \int_0^{1/2} f^2(x) dx \right)$ . On est en présence d'un cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. On en déduit que la famille  $(1, f)$  est liée puis que f est constante sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et donc nulle sur  $[0, \frac{1}{2}]$  puisque  $f(\frac{1}{2}) = 0$ .

Finalement, si  $f \in H^\perp$  alors  $f = 0$  et donc  $H^\perp = \{0\}$ .  $\square$

**Théorème 13.** Soit  $(E, (|))$  un espace préhilbertien réel.

- 1) Pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E,  $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$ .
- 2) Pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E,  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ .



**Démonstration.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- $F \subset F + G$  et  $G \subset F + G$ . Donc  $(F + G)^\perp \subset F^\perp$  et  $(F + G)^\perp \subset G^\perp$  puis  $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ . Inversement, un élément  $x$  de  $F^\perp \cap G^\perp$  est orthogonal à tout élément de  $F$  et de  $G$  et donc à toute somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ , par bilinéarité du produit scalaire. Ceci montre que  $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$  et finalement que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
- $F \cap G \subset F$  et  $F \cap G \subset G$ . Donc,  $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$  et  $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$  puis  $F^\perp \cup G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$  puis  $\text{Vect}(F^\perp \cup G^\perp) \subset (F \cap G)^\perp$  (car  $(F \cap G)^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ) et finalement  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ .

### 3) Familles orthogonales, familles orthonormales

#### 3-a) Définitions

**DÉFINITION 6.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $I$  un ensemble non vide d'indices. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$  indexée par  $I$ .

- La famille  $(e_i)_{i \in I}$  est **orthogonale** si et seulement si  $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow (e_i | e_j) = 0$ .
- La famille  $(e_i)_{i \in I}$  est **orthonormale** si et seulement si  $\forall (i, j) \in I^2, (e_i | e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j}$ .

**Exemple.** On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire usuel : pour  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  et  $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Pour ce produit scalaire, la base canonique  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est orthonormée car pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$(e_i | e_j) = \sum_{k=1}^n \delta_{k,i} \delta_{k,j} = \delta_{i,j}.$$

C'est pour cette raison que le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$  s'appelle aussi le **produit scalaire canonique** sur  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

#### 3-b) Propriétés

**Théorème 14.** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien réel.

- Une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.
- Une famille orthonormale est libre.

**Démonstration.** Il suffit de prouver le résultat pour une famille finie.

- Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille orthogonale de vecteurs tous nuls. Soit  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0 &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left( e_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) = 0 \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \lambda_j (e_i | e_j) = 0 \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i (e_i | e_i) = 0 \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0 \text{ (car } e_i \neq 0). \end{aligned}$$

On a montré que la famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est libre.

- Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille orthonormale.  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est en particulier une famille orthogonale de vecteurs tous nuls et donc  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre.

#### 3-c) Orthonormalisation de SCHMIDT

En maths sup, on décrit le procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT dans le cas d'une famille finie. On généralise maintenant le procédé à une famille infinie (dénombrable).

**Théorème 15.** Soit  $(E, ( \cdot | \cdot ))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille libre.

Il existe une famille orthonormale  $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une seule telle que

- $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Vect}(\mathbf{e}_k)_{0 \leq k \leq n} = \text{Vect}(\mathbf{u}_k)_{0 \leq k \leq n}$  ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathbf{e}_n | \mathbf{u}_n) > 0$ .

**Démonstration.**

On montre l'unicité de la famille  $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence sur  $n$ .

- Il existe nécessairement  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbf{e}_0 = \lambda \mathbf{u}_0$ .  $\|\mathbf{e}_0\| = 1$  impose  $|\lambda| \|\mathbf{u}_0\| = 1$  et donc nécessairement  $\lambda = \pm \frac{1}{\|\mathbf{u}_0\|}$ .

Enfin,  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{u}_0) = \lambda (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)$  et donc nécessairement  $\lambda = \frac{(\mathbf{e}_0, \mathbf{u}_0)}{(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)} \geq 0$ . Ainsi, nécessairement  $\mathbf{e}_0 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_0\|} \mathbf{u}_0$  ce qui montre l'unicité de  $\mathbf{u}_0$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons avoir démontré l'unicité de  $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n$ .

Nécessairement,  $\mathbf{e}_{n+1} \in \text{Vect}(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}) = \text{Vect}(\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{u}_{n+1})$  et donc, il existe des réels  $\lambda, \mu_0, \dots, \mu_n$

tels que  $\mathbf{e}_{n+1} = \lambda \mathbf{u}_{n+1} + \sum_{k=0}^n \mu_k \mathbf{e}_k$ . Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Nécessairement

$$0 = (\mathbf{e}_{n+1} | \mathbf{e}_k) = \lambda (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_k) + \sum_{l=0}^n \mu_l (\mathbf{e}_l | \mathbf{e}_k) = \lambda (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_k) + \mu_k$$

et donc nécessairement  $\mathbf{e}_{n+1} = \lambda \mathbf{e}'_{n+1}$  où  $\mathbf{e}'_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \sum_{k=0}^n (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$ . Ensuite,  $\|\mathbf{e}_{n+1}\| = 1$  impose

$$\mathbf{e}_{n+1} = \pm \frac{1}{\|\mathbf{e}'_{n+1}\|} \mathbf{e}'_{n+1}. \text{ Enfin,}$$

$$0 < (\mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) = \left( \mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{e}'_{n+1} + \sum_{k=0}^n (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \right) = (\mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{e}'_{n+1}) = \lambda (\mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{e}_{n+1}) = \lambda$$

$$\text{impose } \mathbf{e}_{n+1} = \frac{1}{\|\mathbf{e}'_{n+1}\|} \mathbf{e}'_{n+1}.$$

L'unicité de la famille  $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est démontrée par récurrence.

On montre l'existence de la famille  $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence sur  $n$

- La famille  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est libre donc  $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$ . On peut poser  $\mathbf{e}_0 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_0\|} \mathbf{u}_0$ . La famille  $(\mathbf{e}_0)$  est orthonormale. Le vecteur  $\mathbf{e}_0$  est un vecteur non nul de la droite  $\text{Vect}(\mathbf{u}_0)$  et donc  $\text{Vect}(\mathbf{e}_0) = \text{Vect}(\mathbf{u}_0)$ . Enfin,

$$(\mathbf{u}_0 | \mathbf{e}_0) = \frac{1}{\|\mathbf{u}_0\|} (\mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_0) = \|\mathbf{u}_0\| > 0.$$

- Soit  $n \geq 0$ . Supposons qu'il existe une famille orthonormale  $(\mathbf{e}_k)_{0 \leq k \leq n}$  telle que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Vect}(\mathbf{e}_i)_{0 \leq i \leq k} = \text{Vect}(\mathbf{u}_i)_{0 \leq i \leq k}$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (\mathbf{e}_k | \mathbf{u}_k) > 0$ .

Soit  $\mathbf{e}'_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \sum_{k=0}^n (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$ . Puisque  $\mathbf{u}_{n+1} \notin \text{Vect}(\mathbf{u}_k)_{0 \leq k \leq n} = \text{Vect}(\mathbf{e}_k)_{0 \leq k \leq n}$ , le vecteur  $\mathbf{e}'_{n+1}$  n'est pas nul.

On peut donc poser  $\mathbf{e}_{n+1} = \frac{1}{\|\mathbf{e}'_{n+1}\|} \mathbf{e}'_{n+1}$  de sorte que  $\mathbf{e}_{n+1}$  est unitaire. Pour  $0 \leq k \leq n$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_{n+1} | \mathbf{e}_k) &= \frac{1}{\|\mathbf{e}'_{n+1}\|} \left( (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_k) - \sum_{l=0}^n (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_l) (\mathbf{e}_k | \mathbf{e}_l) \right) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{e}'_{n+1}\|} \left( (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_k) - \sum_{l=0}^n (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_l) \delta_{k,l} \right) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{e}'_{n+1}\|} ((\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_k) - (\mathbf{u}_{n+1} | \mathbf{e}_k)) = 0. \end{aligned}$$

Donc, la famille  $(\mathbf{e}_k)_{0 \leq k \leq n+1}$  est orthonormale.

Par hypothèse de récurrence,  $\text{Vect}(\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}) = \text{Vect}(\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}'_{n+1}) = \text{Vect}(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{e}'_{n+1})$  et donc

$$\text{Vect}(e_0, \dots, e_n, e_{n+1}) = \text{Vect} \left( u_0, \dots, u_n, u_{n+1} - \underbrace{\sum_{k=0}^n (u_{n+1}|e_k) e_k}_{\in \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)} \right) = \text{Vect}(u_0, \dots, u_n, u_{n+1}).$$

Enfin,

$$(e_{n+1}, u_{n+1}) = \left( e_{n+1}, e'_{n+1} + \sum_{k=0}^n (u_{n+1}|e_k) e_k \right) = (e_{n+1}, e'_{n+1}) = (e_{n+1}, \|e'_{n+1}\| e_{n+1}) = \|e'_{n+1}\| > 0.$$

L'existence de la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est démontrée par récurrence.

**DÉFINITION 7.** La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'appelle l'**orthonormalisée** de la famille libre  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Le procédé permettant d'obtenir les vecteurs  $e_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de proche en proche est le **procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT**.

Le procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT est :

- $e_0 = \frac{1}{\|u_0\|} u_0$  ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} = \frac{1}{\|e'_{n+1}\|} e'_{n+1}$  où  $e'_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{k=0}^n (u_{n+1}|e_k) e_k$ .

**Commentaire.** On rappelle que le procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT permet d'établir en maths sup l'existence de bases orthonormées quand  $E$  est de dimension finie non nulle. Il suffit pour cela d'orthonormaliser une base de  $E$ .  $\square$

**Exercice 2.** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour  $(P, Q) \in E^2$ , on pose  $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .

Déterminer l'orthonormalisée de la famille  $(1, X, X^2)$ .

**Solution 2.** On pose  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et  $P_2 = X^2$  et on note  $(E_0, E_1, E_2)$  l'orthonormalisée de la famille libre  $(P_0, P_1, P_2)$ .

- $\|P_0\|^2 = \int_0^1 1 dt = 1$  et donc  $E_0 = \frac{1}{\|P_0\|} P_0 = 1$ .

- $(P_1|E_0) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$  puis  $P_1 - (P_1|E_0) E_0 = X - \frac{1}{2}$ . Ensuite

$$\|P_1 - (P_1|E_0) E_0\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

et donc  $E_1 = \frac{1}{1/2\sqrt{3}} \left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$ .

- $(P_2|E_0) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$  et  $(P_2|E_1) = \sqrt{3} \int_0^1 (2t^3 - t^2) dt = \sqrt{3} \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$  puis

$$P_2 - (P_2|E_0) E_0 - (P_2|E_1) E_1 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2X - 1) = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \|P_2 - (P_2|E_0) E_0 - (P_2|E_1) E_1\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{7t^2}{6} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right) dt \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{7}{18} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{36 - 90 + 70 - 30 + 5}{180} = \frac{1}{180} \end{aligned}$$

et donc  $E_2 = \frac{1}{1/6\sqrt{5}} \left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$ .

### III - Le théorème de la projection orthogonale

#### 1) Le théorème de la projection orthogonale

On a vu (page 7 et 8) qu'il est possible pour un sous-espace donné  $F$  de  $E$  que  $F^\perp$  ne soit pas un supplémentaire de  $F$ . On va voir que si de plus  $F$  est de dimension finie,  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires et donc la projection orthogonale sur  $F$  est bien définie.

**Théorème 16.** (Le théorème de la projection orthogonale)

Soit  $(E, ( \cdot | \cdot ))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n$ . Alors,

- $E = F \oplus F^\perp$ .
- Si  $n \geq 1$  et  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base orthonormée de  $F$  alors

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k$$

où  $p_F(x)$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ .

**Démonstration.** Soient  $x \in E$  et  $y \in F$ .

$$\begin{aligned} x - y \in F^\perp &\Leftrightarrow x - y \in (\text{Vect}(e_1, \dots, e_n))^\perp \Leftrightarrow x - y \in (e_1, \dots, e_n)^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x - y|e_k) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (y|e_k) = (x|e_k) \\ &\Leftrightarrow y = \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k \text{ (car } (e_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ est une base orthonormée de } F). \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall x \in E, \exists! y \in F / x - y \in F^\perp$  et donc  $E = F \oplus F^\perp$  et on a montré au passage que  $p_F(x) = \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k$ .

**Théorème 17.** (Distance à un sous-espace de dimension finie)

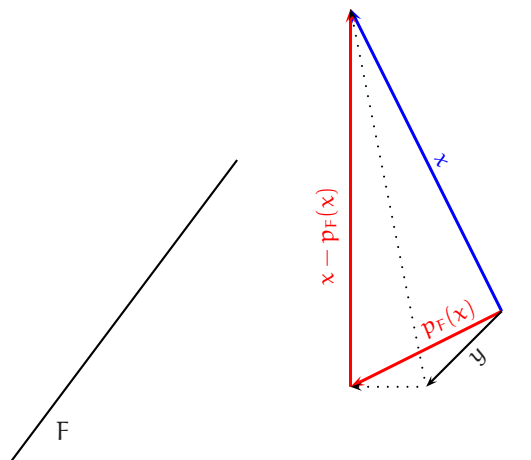
Soit  $(E, ( \cdot | \cdot ))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Soit  $x \in E$ .

$\forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$  avec égalité si et seulement si  $y = p_F(x)$ .

**Démonstration.** Soient  $x \in E$  et  $y \in F$ . D'après le théorème de PYTHAGORE

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \left\| \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p_F(x) - y)}_{\in F} \right\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \\ &\geq \|x - p_F(x)\|^2 \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si  $y = p_F(x)$ .



Le travail précédent montre que pour  $x \in E$  donné

$$\text{Inf}\{\|x - y\|, y \in F\} = \text{Min}\{\|x - y\|, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|.$$

Donc,

**DÉFINITION 8.** Soient  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace préhilbertien puis  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Soit  $x \in E$ .

La **distance de  $x$  à  $F$**  est

$$d(x, F) = \text{Inf}\{\|x - y\|, y \in F\} = \text{Min}\{\|x - y\|, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|.$$

**Exercice 3.** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour  $(P, Q) \in E^2$ , on pose  $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .

Déterminer la distance de  $X^3$  à  $\mathbb{R}_1[X]$  (voir exercice n° 2, page 11).

**Solution 3.** Puisque  $\mathbb{R}_1[X]$  est un sous-espace de  $E$  de dimension finie,  $d(X^3, \mathbb{R}_1[X])$  existe.

D'après l'exercice n° 2, page 11, une base orthonormée de  $\mathbb{R}_1[X]$  est  $(E_0, E_1)$  où  $E_0 = 1$ ,  $E_1 = \sqrt{3}(2X - 1)$ . Le projeté orthogonal de  $X^3$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$  est

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^3) = (X^3|E_0) E_0 + (X^3|E_1) E_1$$

avec

- $(X^3|E_0) = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$
- $(X^3|E_1) = \sqrt{3} \int_0^1 (2t^4 - t^3) dt = \sqrt{3} \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{20}$

puis

$$\begin{aligned} p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^3) &= \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \sqrt{3}(2X - 1) = \frac{9X}{10} + \frac{1}{4} - \frac{9}{20} \\ &= \frac{9X}{10} - \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (d(X^3, \mathbb{R}_1[X]))^2 &= \left\| X^3 - \frac{9X}{10} + \frac{1}{5} \right\|^2 = \int_0^1 \left( t^3 - \frac{9t}{10} + \frac{1}{5} \right)^2 dt = \int_0^1 \left( t^6 - \frac{9t^5}{5} + \frac{2t^3}{5} + \frac{81t^2}{100} - \frac{9t}{25} + \frac{1}{25} \right) dt \\ &= \frac{1}{7} - \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{27}{100} - \frac{9}{50} + \frac{1}{25} = \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{9}{100} + \frac{1}{25} = \frac{100 - 140 + 63 + 28}{700} \\ &= \frac{51}{700}. \end{aligned}$$

$$d(X^3, \mathbb{R}_1[X]) = \frac{\sqrt{51}}{10\sqrt{7}}.$$

## 2) Familles totales

**Théorème 18.** (Inégalité de BESSEL)

Soit  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille orthonormale. Alors

$$\forall x \in E, \sum_{k=0}^n (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

**Démonstration.** Soient  $n \in \mathbb{N}$  puis  $F = \text{Vect}(e_k)_{0 \leq k \leq n}$ .  $F$  est un sous-espace de  $E$  de dimension finie et  $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base orthonormée de  $F$ . Soit alors  $x \in E$ .

$$\|p_F(x)\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^n (x|e_k) e_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n (x|e_k)^2.$$

Par suite, d'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|x\|^2 - \sum_{k=0}^n (x|e_k)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = (d(x, F))^2 \geq 0.$$

Une conséquence immédiate du théorème 18 est

**Théorème 19.** (Inégalité de BESSEL)

Soit  $(E, (|\cdot|))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille orthonormale. Soit  $x \in E$ . Alors, la famille  $((x|e_i))_{i \in I}$  est de carré sommable et

$$\sum_{i \in I} (x|e_i)^2 \leq \|x\|^2.$$

On va maintenant donner une situation concernant la famille  $(e_i)_{i \in I}$  où l'inégalité de BESSEL est en fait une égalité.

**DÉFINITION 9.** Soient  $(E, (|\cdot|))$  un espace préhilbertien puis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille orthonormale.

La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille totale si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}} / \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

**Commentaire.** La propriété précédente se réénoncera dans le cours de topologie en disant que  $\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ .  $\square$

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 20.** (Egalité de PARSEVAL)

Soit  $(E, (|\cdot|))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille totale. Soit  $x \in E$ .

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x|e_n)^2 = \|x\|^2.$$

**Démonstration.** Soit  $x \in E$ . On sait déjà que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $F_n = \text{Vect}(e_k)_{0 \leq k \leq n}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $y_0 \in \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}} / \|x - y_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ .  $y_0$  est une combinaison linéaire d'un nombre fini des  $e_k$  et donc, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $y_0 \in F_{n_0}$ . Mais alors,  $\forall n \geq n_0$ ,  $y_0 \in F_n$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \|x - y_0\|^2 \geq (d(x, F_n))^2 = \|x - p_{F_n}(x)\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|p_{F_n}(x)\|^2 \quad (\text{d'après le théorème de PYTHAGORE, } \|x\|^2 = \|p_{F_n}(x)\|^2 + \|x - p_{F_n}(x)\|^2) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n (x|e_k)^2. \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^n (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2$  et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x|e_n)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n (x|e_k)^2 \right) = \|x\|^2.$$