Familles sommables

I - Ensembles dénombrables

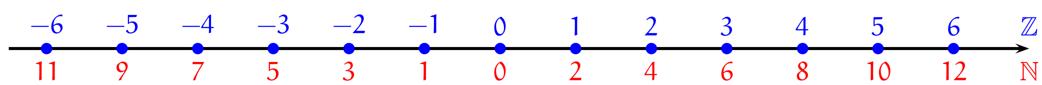
1) Définition

Définition 1. Soit E un ensemble. E est **dénombrable** si et seulement si il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

Commentaire 1. Les éléments d'un ensemble dénombrable peuvent être « égrenés » les uns après les autres : le premier, le deuxième, le troisième ... Dit autrement, un ensemble dénombrable E peut être décrit comme l'ensemble des valeurs d'une suite : $E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. ❏

Commentaire 2. Si φ est une bijection de E sur $\mathbb{N}$, alors φ^{-1} est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E et si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E, alors φ^{-1} est une bijection de E sur $\mathbb{N}$. Donc, on a aussi : E est dénombrable si et seulement si il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$. ❏

Exemple 1. Soit $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right. \end{array}$ est une bijection.



En effet, φ est bien une application.
Soit alors $\begin{array}{cccc} \psi : & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 2n \text{ si } n \geqslant 0 \\ -(2n+1) \text{ si } n < 0 \end{array}\right. \end{array}$. ψ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\psi(\varphi(n)) = \left\{\begin{array}{l} 2\varphi(n) \text{ si } \varphi(n) \geqslant 0 \\ -(2\varphi(n)+1) \text{ si } \varphi(n) < 0 \end{array}\right.$. De plus, $\varphi(n) \geqslant 0 \Leftrightarrow n$ est pair et donc

$$\psi(\varphi(n)) = \left\{\begin{array}{l} 2 \times \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\left(2\left(-\dfrac{n+1}{2}\right)+1\right) \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right. = n.$$

De même, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(\psi(n)) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2n}{2} \text{ si } n \geqslant 0 \\ -\dfrac{-(2n+1)+1}{2} \text{ si } n < 0 \end{array}\right. = n.$$

Donc, $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. On sait alors que φ est une bijection et que $\psi = \varphi^{-1}$. Puisqu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} \text{ est dénombrable.}$$

❏

Exemple 2. Soit $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{N} & \rightarrow & 2\mathbb{N} \\ & n & \mapsto & 2n \end{array}$. φ est une bijection de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sur l'ensemble $2\mathbb{N}$ des entiers pairs. Donc,

$$2\mathbb{N} \text{ est dénombrable.}$$

❏

Théorème 1. Si E est un ensemble dénombrable et si F est un ensemble en bijection avec E, alors F est dénombrable.

Démonstration. Soit f une bijection de E sur $\mathbb{N}$ et soit g une bijection de F sur E. Alors, $g \circ f$ est une bijection de F sur $\mathbb{N}$ et donc F est dénombrable.

2) Divers types d'ensembles dénombrables

On a vu précédemment que $2\mathbb{N}$ est dénombrable. Plus généralement :

Théorème 2. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration. Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Construisons une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur A.

• A est en particulier une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc, A admet un plus petit élément que l'on note $\varphi(0)$. Puisque A est infinie, $A \setminus [\![0, \varphi(0)]\!]$ est encore infinie et en particulier n'est pas vide. Donc, $A \setminus [\![0, \varphi(0)]\!]$ admet donc un plus petit élément que l'on note $\varphi(1)$. Par construction, $\varphi(1) > \varphi(0)$. De plus, $A \cap]\!]\varphi(0), \varphi(1)]\!] = \{\varphi(1)\}$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons avoir construit $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ tels que $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $A \cap]\!]\varphi(k-1), \varphi(k)]\!] = \{\varphi(k)\}$.
Puisque A est infinie, $A \setminus [\![0, \varphi(n)]\!]$ est encore infinie et en particulier, $A \setminus [\![0, \varphi(n)]\!]$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. $A \setminus [\![0, \varphi(n)]\!]$ admet un plus petit élément que l'on note $\varphi(n+1)$. Par construction, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $A \cap]\!]\varphi(n), \varphi(n+1)]\!] = \{\varphi(n+1)\}$.

On vient de construire par récurrence une application φ de $\mathbb{N}$ dans A, strictement croissante et donc injective.

Soit alors $y \in A$. Si $y \in [\![0, \varphi(0)]\!]$, alors $y \in [\![0, \varphi(0)]\!] \cap A = \{\varphi(0)\}$ et donc $y = \varphi(0) \in \varphi(\mathbb{N})$.
Sinon, puisque la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(k-1) < y \leqslant \varphi(k)$. On en déduit que $y \in A \cap]\!]\varphi(k-1), \varphi(k)]\!] = \{\varphi(k)\}$ et donc que $y = \varphi(k) \in \varphi(\mathbb{N})$.

On a montré que $\varphi(\mathbb{N}) = A$ et donc que φ est surjective. Finalement, φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A ou encore A est dénombrable.

Une conséquence du théorème 1 est :

Théorème 3. Un ensemble non vide est fini ou dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Démonstration. Soit E un ensemble non vide fini ou dénombrable. Si E est fini, on sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$ (n est alors le cardinal de E). Si E est infini dénombrable, E est en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans tous les cas, E est en bijection avec une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Réciproquement, soit E est un ensemble non vide tel qu'il existe une bijection f de E sur une certaine partie non vide A de $\mathbb{N}$.
Si A est finie, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et g bijection de A sur $[\![1, n]\!]$ (où n est le cardinal de A). Mais alors, $g \circ f$ est une bijection de E sur $[\![1, n]\!]$ et donc E est fini (de cardinal n).
Si A est infinie, d'après le théorème 1, A est dénombrable et donc il existe une bijection g de A sur $\mathbb{N}$. Dans ce cas, $g \circ f$ est une bijection de E sur $\mathbb{N}$ et donc E est dénombrable.

Théorème 4. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Démonstration. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ (m, p) & \mapsto & 2^m(2p+1) \end{array}$. φ est une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$.
Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$. $\varphi(m, p) = 1 \Leftrightarrow 2^m(2p+1) = 1 \Leftrightarrow 2^m = 2p+1 = 1 \Leftrightarrow m = p = 0 \Leftrightarrow (m, p) = (0, 0)$. Donc, l'élément 1 de $\mathbb{N}^*$ a un et seul antécédent par φ à savoir $(0, 0)$.
Sinon, pour $n \geqslant 2$ donné, le théorème fondamental de l'arithmétique montre qu'il existe un et un seul couple (m, p) d'entiers naturels tel que $n = 2^m(2p+1)$ (n est de manière unique le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair) et que ce couple (m, p) n'est pas le couple $(0, 0)$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists!(m, p) \in \mathbb{N}^2/\ \varphi(m, p) = n.$$

φ est donc une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$. Puisque $\mathbb{N}^*$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ est dénombrable d'après le théorème 2 et finalement $\mathbb{N}^2$ est dénombrable d'après le théorème 1.

Commentaire. On peut citer une autre bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$ (voir exercices maths sup, planche n° 3, exercice n° 14) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2,\ f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y.$$

	0	1	2	3	4	5	...
0	[0] (0,0)	[1] (0,1)	[3] (0,2)	[6] (0,3)	[10] (0,4)	(0,5)	...
0	[2] (1,0)	[4] (1,1)	[7] (1,2)	[11] (1,3)	(1,4)	(1,5)	...
0	[5] (2,0)	[8] (2,1)	[12] (2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...
0	[9] (3,0)	[13] (3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...
0	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	...
0	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	...

❑

Théorème 5. Un produit cartésien (fini) d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration. • Commençons par vérifier le résultat pour un produit de deux ensembles dénombrables. Soient E_1 et E_2 deux ensembles dénombrables.
Il existe une bijection f_1 de E_1 sur $\mathbb{N}$ et une bijection f_2 de E_2 sur $\mathbb{N}$.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \to & \mathbb{N}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (f_1(a), f_2(b)) \end{array}$. Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, il existe un et un seul $(a,b) \in E_1 \times E_2$ tel que $(f_1(a), f_2(b)) = (n,m)$. Ceci montre que φ est une bijection de $E_1 \times E_2$ sur $\mathbb{N}^2$. Puisque $\mathbb{N}^2$ est dénombrable d'après le théorème 4, $E_1 \times E_2$ est dénombrable d'après le théorème 1.

• Soit $k \geqslant 2$. Supposons qu'un produit cartésien de k ensembles dénombrables soit dénombrable. Soient $E_1, \ldots, E_{k+1}$, $k+1$ ensembles dénombrables. Alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{k+1} E_i = \left(\prod_{i=1}^{k} E_i\right) \times E_{k+1}$ est dénombrable par hypothèse de récurrence et d'après le cas $k = 2$.

On a montré par récurrence qu'un produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable.

L'exemple 2 du paragraphe 1) permet d'énoncer

Théorème 6. $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

et en cumulant les résultats des théorèmes 4, 5 et 6, on peut énoncer

Théorème 7. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^k$ est dénombrable.

Théorème 8. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dénombrables indexée par I puis $E = \displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i$. Pour chaque $i \in I$, il existe une bijection f_i de $\mathbb{N}$ sur E_i. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{N} & \to & E \\ (i,n) & \mapsto & f_i(n) \end{array}$. φ est une application surjective de $I \times \mathbb{N}$ sur E. D'autre part, I est dénombrable et donc $I \times \mathbb{N}$ est dénombrable d'après le théorème 5. Il existe donc une bijection ψ de $\mathbb{N}$ sur $I \times \mathbb{N}$. L'application $g = \psi \circ \phi$ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.

Montrons alors qu'à partir de l'application g, on peut construire une application bijective de E sur une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $y \in E$. $g^{-1}(y) = \{n \in \mathbb{N} / \ g(n) = y\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc, $g^{-1}(y)$ admet un plus petit élément que l'on note n_y. Considérons $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & n_y \end{array}$. f est une application de E dans $\mathbb{N}$. Soient alors y et y' deux éléments de E. Si $n_y = n_{y'}$, alors $y = g(n_y) = g(n_{y'}) = y'$. Donc, f est une application injective de E dans $\mathbb{N}$ ou encore f induit une bijection de E sur $A = f(E)$ qui est une partie de $\mathbb{N}$. On en déduit que E est fini ou dénombrable. Comme E contient au moins un ensemble dénombrable, E est infini et finalement E est dénombrable.

En adaptant un peu la démonstration précédente, on obtient le théorème suivant que nous admettrons :

Théorème 9. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

On en déduit en particulier que

Théorème 10. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $E_n = \left\{\frac{a}{b},\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ |a| \leqslant n,\ b \leqslant n\right\}$. On a $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ et chaque E_n est fini (de cardinal inférieur ou égal à $n(2n+1)$). Donc, $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable d'après le théorème précédent puis $\mathbb{Q}$ est dénombrable car $\mathbb{Q}$ est infini.

Plus généralement,

Théorème 11. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^k$ est dénombrable.

Citons enfin un premier exemple très important d'ensemble non dénombrable :

Théorème 12. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. Contentons nous de montrer que l'intervalle $[0,1[$ n'est pas dénombrable. Supposons le contraire par l'absurde. On peut donc trouver une bijection $n \mapsto x_n$ de $\mathbb{N}$ dans $[0,1[$ et en particulier $[0,1[$ est l'ensemble des valeurs d'une certaine suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$[0,1[= \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

On sait que chaque réel x_n de $[0,1[$ admet un développement décimal propre de la forme $x_n = 0, d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3}\ldots$ où les $d_{n,k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont les décimales de x_n et donc des éléments de $[\![0,9]\!]$ et les $d_{n,k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas toutes égales à 9 à partir d'un certain rang. On va maintenant construire un réel de $[0,1[$ qui ne peut être l'un des x_n selon le principe de la diagonale de Cantor :

$$\begin{array}{lcllllllll}
x_0 & = & 0\,, & \color{red}{d_{0,1}} & d_{0,2} & d_{0,3} & d_{0,4} & d_{0,5} & \ldots \\
x_1 & = & 0\,, & d_{1,1} & \color{red}{d_{1,2}} & d_{1,3} & d_{1,4} & d_{1,5} & \ldots \\
x_2 & = & 0\,, & d_{2,1} & d_{2,2} & \color{red}{d_{2,3}} & d_{2,4} & d_{2,5} & \ldots \\
x_3 & = & 0\,, & d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & \color{red}{d_{3,4}} & d_{3,5} & \ldots \\
x_4 & = & 0\,, & d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & \color{red}{d_{4,5}} & \ldots \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

On considère $x = 0, c_1c_2c_3\ldots$ où c_1, c_2, c_3 sont des chiffres éléments de $[\![0,8]\!]$ tels que $c_1 \neq \color{red}{d_{0,1}}$, $c_2 \neq \color{red}{d_{1,2}}$, $c_3 \neq \color{red}{d_{2,3}}$ ... Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \neq d_{n-1,n}$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \neq x_n$ par unicité d'un développement décimal propre. L'hypothèse de dénombrabilité faite sur $[0,1[$ est donc absurde et on a montré que $[0,1[$ n'est pas dénombrable et donc que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Commentaire. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des ensembles infinis. Il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ mais il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ (il existe néanmoins une injection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ à savoir $n \mapsto n$). Dit autrement, « l'infini de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand que l'infini de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ ». Les mathématiciens ont décidé de noter $\aleph_0$ (aleph 0 où aleph est la première lettre de l'alphabet hébreu) le cardinal de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\aleph_1$ le cardinal de $\mathbb{R}$. On a donc

$$\aleph_0 < \aleph_1.$$

Cantor a mis en évidence le fait que chaque fois que l'on se donne un ensemble E (fini ou pas), on peut en construire un autre de cardinal strictement plus grand : si E est un ensemble alors $\text{card}(E) < \text{card}(\mathscr{P}(E))$ (on a bien sûr $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(\mathscr{P}(E))$ car on dispose d'une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$ à savoir l'injection $x \mapsto \{x\}$). La démonstration du fait qu'il n'existe pas de bijection de E sur $\mathscr{P}(E)$ ressemble à un tour de magie où l'on doit découvrir le truc et pourtant il n'y a aucun truc :

Soit f une application de E vers $\mathscr{P}(E)$. Soit $A = \{x \in E/\ x \notin f(x)\}$. Montrons que A est un élément de $\mathscr{P}(E)$ qui n'a pas d'antécédent par f. Dans le cas contraire, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = A$. Mais où est x_0 ? Si $x_0 \in A = \{x \in E/\ x \notin f(x)\}$, alors $x_0 \notin f(x_0) = A$ ce qui est une contradiction et si $x_0 \notin A = \{x \in E/\ x \notin f(x)\}$, alors $x_0 \in f(x_0) = A$ ce qui est une contradiction. Donc, x_0 n'existe pas ou encore A est un élément de $\mathscr{P}(E)$ qui n'a pas d'antécédent dans E par f.

On a montré qu'une application de E vers $\mathscr{P}(E)$ n'est jamais surjective. Notons que dans le cas où E est fini de cardinal n, ce qui précède montre (de manière assez sophistiquée) que $n < 2^n$. Ainsi, par exemple, $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ est un ensemble infini de cardinal strictement plus grand que $\aleph_1$ le cardinal de $\mathbb{R}$, cardinal que les mathématiciens ont appelé $\aleph_2$ et ainsi de suite.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 \ldots$$

❏

II - Familles dénombrables sommables

A - Familles réelles positives sommables

1) Définition

Définition 2. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si et seulement si $\text{Sup}\left\{\displaystyle\sum_{i\in J} u_i,\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\} < +\infty$.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite **non sommable** dans le cas contraire.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, la somme des éléments de cette famille ou encore, en plus condensé, la somme de cette famille est

$$S(u) = \sum_{i\in I} u_i = \text{Sup}\left\{\sum_{i\in J} u_i,\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\}.$$

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Dans le cas d'une suite de réels positifs, on peut tout de suite faire le lien avec la convergence d'une série. Les notions de suite sommable et de série convergente coïncident :

Théorème 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n converge et dans ce cas,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration.

• Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable. Posons $S(u) = \text{Sup}\left\{\displaystyle\sum_{k\in J} u_k,\ J\subset\mathbb{N},\ J \text{ fini}\right\}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $I_n = [\![0, n]\!]$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n est une partie finie de $\mathbb{N}$ et donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k\in I_n} u_k \leqslant S(u).$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Puisque la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, on sait que la série de terme général u_k, $k\in\mathbb{N}$, converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S(u).$$

• Supposons la la série de terme général u_n, $n\in\mathbb{N}$, converge. Soit J une partie finie non vide de $\mathbb{N}$. J admet donc un plus grand élément n. Puisque $J\subset [\![0, n]\!]$ et que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, on a

$$\sum_{k\in J} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Ainsi, $\left\{\displaystyle\sum_{k\in J} u_k,\ J\subset\mathbb{N},\ J \text{ fini}\right\}$ est une partie non vide et majorée (par $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$) de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\left\{\displaystyle\sum_{k\in J} u_k,\ J\subset\mathbb{N},\ J \text{ fini}\right\}$ admet une borne supérieure $S(u)$ dans $\mathbb{R}$ ou encore que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable. De plus

$$S(u) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

En résumé, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n converge et de plus, en cas de convergence, $S(u) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S(u)$ ou encore $S(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

2) *Propriétés des familles sommables de réels positifs*

Théorème 14. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexée par I telles que pour tout $i \in I$, $u_i \leqslant v_i$.

Si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors la famille $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Démonstration. Supposons la famille $(u_i)_{i\in I}$ sommable. Alors, pour toute partie finie J de I,

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in J} v_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

Donc, $\left\{\displaystyle\sum_{i\in J} u_i,\ J \text{ fini},\ J\subset I\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par $\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$. On en déduit que $\text{Sup}\left\{\displaystyle\sum_{i\in J} u_i,\ J \text{ fini},\ J\subset I\right\}$ existe dans $\mathbb{R}$ et que ce sup est inférieur ou égal à $\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ ou encore la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$.

Par contraposition, si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors la famille $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Théorème 15. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexée par I.

Si les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors pour tous réels positifs λ et μ, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration. Supposons les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sommables. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^+$.

Pour toute partie finie J de I, $\displaystyle\sum_{i\in J} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in J} u_i + \mu \sum_{i\in J} v_i \leqslant \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$. Donc, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et $S(\lambda u + \mu v) \leqslant \lambda S(u) + \mu S(v)$.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_1 de I et une partie finie J_2 de I telles que $\displaystyle\sum_{i\in J_1} u_i \geqslant S(u) - \frac{\varepsilon}{2\lambda+1}$ et $\displaystyle\sum_{i\in J_2} v_i \geqslant S(v) - \frac{\varepsilon}{2\mu+1}$. Soit $J = J_1 \cup J_2$. J est une partie finie de I et

$$\begin{aligned} S(\lambda u + \mu v) &\geqslant \sum_{i\in J} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in J} u_i + \mu \sum_{i\in J} v_i \geqslant \lambda \sum_{i\in J_1} u_i + \mu \sum_{i\in J_2} v_i \geqslant \lambda S(u) - \frac{\lambda\varepsilon}{2\lambda+1} + \mu S(v) - \frac{\mu\varepsilon}{2\mu+1} \\ &\geqslant \lambda S(u) + \mu S(v) - \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\varepsilon}{2\lambda+1} - \frac{\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\varepsilon}{2\mu+1} = S(u) + S(v) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\lambda S(u) + \mu S(v) - \varepsilon \leqslant S(\lambda u + \mu v) \leqslant \lambda S(u) + \mu S(v)$ et donc $S(\lambda u + \mu v) = \lambda S(u) + \mu S(v)$.

La démonstration du théorème suivant est hors programme.

Théorème 16. (Théorème de sommation par paquets)

Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs indexée par I.

Soient J une partie non vide de $\mathbb{N}$ puis $(I_n)_{n\in J}$ une partition de I indexée par J. Alors,
- pour chaque $n \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;
- la famille $\left(\displaystyle\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in J}$ est sommable et de plus

$$\sum_{n\in J}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

B - Familles complexes sommables

1) Définition

DÉFINITION 3. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par I.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si et seulement si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable ou encore la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\text{Sup}\left\{\sum_{i\in J}|u_i|,\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\} < +\infty$.

Exemple. Pour $n\in\mathbb{Z}$, posons $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n^2+1}$ où θ est un réel donné. Pour tout n de $\mathbb{Z}$, $|u_n| = \dfrac{1}{n^2+1}$ avec $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2+1} = 1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1} < +\infty$. Donc, la famille $\left(\dfrac{e^{in\theta}}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. ❑

On fait de nouveau le lien entre sommabilité et convergence d'une série dans le cas particulier où $I=\mathbb{N}$. Le théorème 13 fournit immédiatement

Théorème 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n est absolument convergente.

2) Somme d'une famille sommable de réels

Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par I. Pour $i\in I$, on pose

$$u_i^+ = \text{Max}\,(u_i,0) = \frac{|u_i|+u_i}{2} \quad \text{et} \quad u_i^- = -\text{Min}\,(u_i,0) = \text{Max}\,(-u_i,0) = \frac{|u_i|-u_i}{2}.$$

Pour tout $i\in I$, u_i^+ et u_i^- sont des réels positifs tels que

$$u_i^+ + u_i^- = |u_i| \quad \text{et} \quad u_i^+ - u_i^- = u_i.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 18. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par I.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables.

Démonstration. Si les familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables, alors la famille $(|u_i|)_{i\in I} = \left(u_i^+ + u_i^-\right)_{i\in I}$ est sommable d'après le théorème 15. Par définition, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Inversement, si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, par définition la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable. Puisque pour tout $i\in I$, $0\leqslant u_i^+\leqslant |u_i|$ et $0\leqslant u_i^-\leqslant |u_i|$, le théorème 14 permet d'affirmer que les familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables.

DÉFINITION 4. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels indexée par I.

La **somme** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est le réel

$$S(u) = \sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

3) Somme d'une famille sommable de complexes

Théorème 19. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille de complexes indexée par I.

La famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(\text{Re}\,(u_k))_{k\in I}$ et $(\text{Im}\,(u_k))_{k\in I}$ sont sommables.

Démonstration.

Supposons que les familles $(\text{Re}\,(u_k))_{k\in I}$ et $(\text{Im}\,(u_k))_{k\in I}$ sont sommables, alors la famille $(|\text{Re}\,(u_k)|+|\text{Im}\,(u_k)|)_{k\in I}$ est sommable d'après le théorème 15. Puisque pour tout $k\in I$, $0\leqslant |u_k|\leqslant |\text{Re}\,(u_k)|+|\text{Im}\,(u_k)|$, le théorème 14 permet d'affirmer que la famille $(|u_k|)_{k\in I}$ est sommable. Il en est de même de la famille $(u_k)_{k\in I}$.

Si la famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable, alors la famille $(|u_k|)_{k\in I}$ est sommable. Puisque pour tout $k\in I$, $|\text{Re}\,(u_k)|\leqslant |u_k|$ et $|\text{Im}\,(u_k)|\leqslant |u_k|$, le théorème 14 permet d'affirmer que les familles $(\text{Re}\,(u_k))_{k\in I}$ et $(\text{Im}\,(u_k))_{k\in I}$ sont sommables.

On peut alors adopter la définition suivante :

Définition 5. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille sommable de complexes indexée par I.

La **somme** de la famille $(u_k)_{k\in I}$ est le réel

$$S(u) = \sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}\,(u_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}\,(u_k) = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}\,(u_k)^+ - \sum_{k\in I} \mathrm{Re}\,(u_k)^- + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}\,(u_k)^+ - i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}\,(u_k)^-.$$

Dans le cas particulier des suites de complexes, on a immédiatement

Théorème 20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n est absolument convergente et dans ce cas,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

4) Propriétés des familles sommables de complexes

Théorème 21. (Linéarité)

Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de complexes indexée par I.

Si les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors pour tous complexes λ et μ, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration. Pour tout $i \in I$, $|\lambda u_i + \mu v_i| \leqslant |\lambda|\,|u_i| + |\mu|\,|v_i|$ et donc la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable. Pour toute partie finie J de I,

$$\begin{aligned}|S(\lambda u+\mu v) - (\lambda S(u) + \mu S(v))| &\leqslant \left|S(\lambda u+\mu v) - \sum_{i\in J}(\lambda u_i + \mu v_i)\right| + \left|\sum_{i\in J}(\lambda u_i + \mu v_i) - (\lambda S(u) + \mu S(v))\right| \\ &\leqslant \left|S(\lambda u+\mu v) - \sum_{i\in J}(\lambda u_i + \mu v_i)\right| + |\lambda|\left|S(u) - \sum_{i\in J} u_i\right| + |\mu|\left|S(v) - \sum_{i\in J} v_i\right|\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il résulte de la définition de la somme d'une famille sommable que l'on peut choisir J telle que $\left|S(\lambda u+\mu v) - \sum_{i\in J}(\lambda u_i + \mu v_i)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $\left|S(u) - \sum_{i\in J} u_i\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4|\lambda|+1}$ et $\left|S(v) - \sum_{i\in J} v_i\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4|\mu|+1}$. On a alors

$$|S(\lambda u+\mu v) - (\lambda S(u) + \mu S(v))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|\lambda|\varepsilon}{4|\lambda|+1} + \frac{|\mu|\varepsilon}{4|\mu|+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\left|S(\lambda u+\mu v) - \sum_{i\in J}(\lambda u_i + \mu v_i)\right| \leqslant \varepsilon$ et donc $S(\lambda u+\mu v) = \lambda S(u) + \mu S(v)$.

La démonstration du théorème suivant est hors programme.

Théorème 22. (Théorème de sommation par paquets)

Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes indexée par I.

Soient J une partie non vide de $\mathbb{N}$ puis $(I_n)_{n\in J}$ une partition de I indexée par J. Alors,
- pour chaque $n \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;
- la famille $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in J}$ est sommable et de plus

$$\sum_{n\in J}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Dans le cas particulier d'une suite complexe sommable, le théorème 22 a pour conséquence le fait que si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, on peut permuter ou associer à volonté les termes de cette série. Ceci n'est pas du tout le cas si on n'a plus l'hypothèse d'absolue convergence. Analysons deux exemples.

Exemple 1. On sait que la série de terme général $(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, est divergente. Pourtant, la série de terme général $\left((-1)^{2p} + (-1)^{2p+1}\right) = 0$ est une série convergente, de somme 0. Dit autrement, $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ n'existe pas alors que $(1-1) + (1-1) + \ldots$ existe et vaut 0. On ne peut donc pas enlever les parenthèses ou encore, associer les termes d'une série est un problème (et n'en est plus un dans le cas d'une série absolument convergente). ❏

Exemple 2. On sait que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente sans être absolument convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ ou encore $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots = \ln(2)$.

Intéressons nous alors à la somme $1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \ldots$ ou encore étudions la convergence de la série de terme général u_n où $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{3p} = -\dfrac{1}{2p}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{3p+1} = \dfrac{1}{4p+1}$ et $u_{3p+2} = \dfrac{1}{4p+3}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Classiquement, $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{3p} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = H_{4p} - \frac{1}{2}H_{2p} - \frac{1}{2}H_p.$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_{3p} &\underset{p\to+\infty}{=} (\ln(4p) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln(2p) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln(p) + \gamma + o(1)) \\ &\underset{p\to+\infty}{=} \ln(4) - \frac{1}{2}\ln(2) + o(1) \underset{p\to+\infty}{=} \frac{3}{2}\ln(2) + o(1). \end{aligned}$$

D'autre part, $S_{3p+1} = S_{3p} + \dfrac{1}{4p+1} \underset{p\to+\infty}{=} \dfrac{3}{2}\ln(2) + o(1)$ et $S_{3p+1} = S_{3p+1} + \dfrac{1}{4p+3} \underset{p\to+\infty}{=} \dfrac{3}{2}\ln(2) + o(1)$. Ainsi, les trois suites $(S_{3p})_{p\in\mathbb{N}^*}$, $(S_{3p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{3p+2})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et par pour limite $\ln(2)$. Dit autrement,

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{3}{2}\ln(2) \neq \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

❏

Dans le cas d'une série absolument convergente, on peut permuter les termes à volonté ou encore

Théorème 23. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série de terme général u_n est absolument convergente.

Alors, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et de plus

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

5) Application de la sommabilité aux suites doubles

Théorème 24. Soit $(u_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite « à double entrée » de réels positifs.

La famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{m,n}$, $m \in \mathbb{N}$, converge et la série de terme général $v_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge. De plus, dans ce cas, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et la série de terme général $w_m = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$, $m \in \mathbb{N}$, converge et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right).$$

Démonstration. Supposons la suite $(u_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ sommable. $(\mathbb{N}\times\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$. D'après le théorème 16, page 6, (théorème de sommation par paquets) pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{m,n}$, $m \in \mathbb{N}$, converge et la série de terme général $v_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\{n\}} u_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right).$$

De même, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et la série de terme général $w_m = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in\{m\}\times\mathbb{N}} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right).$$

Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} < +\infty$ puis que $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) < +\infty$. Posons $S = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$.

Soit J une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Il existe $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $J \subset [\![0,m]\!]\times[\![0,n]\!]$. On a alors

$$\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = S.$$

Ainsi, pour toute partie finie J de $\mathbb{N}^2$, $\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant S$. On en déduit que la suite $(u_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Théorème 25. Soit $(u_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite « à double entrée » de complexes.

Si la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{m,n}$, $m \in \mathbb{N}$, converge et la série de terme général $v_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et de même, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et la série de terme général $w_m = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$, $m \in \mathbb{N}$, converge. De plus,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right).$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème de sommation par paquets (théorème 22, page 8).
