

# Intégrales à paramètres

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux fonctions de la forme  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  où  $f$  est une fonction de deux variables et par exemple apprendre à dériver de telles fonctions. Il ne faut pas confondre avec une autre situation analysée en math sup voire en terminale, les fonctions du type  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  où  $f$  est une fonction d'une seule variable (qui est, quand  $f$  est continue une primitive de  $f$ ).

Un problème se pose : nous allons le moment venu **dériver** la fonction de deux variables  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  **par rapport à la variable**  $x$ , ce qui n'a pas encore été étudié dans le cours de mathématiques (mais le sera dans le chapitre « fonctions de plusieurs variables »). La théorie est délicate mais la pratique ne l'est pas. Dériver par rapport à la variable  $x$  la fonction  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  consiste à fixer la variable  $t$  et à dériver la fonction  $g : x \mapsto f(x, t)$ . Plus précisément, pour obtenir cette dérivée partielle en  $(x_0, t_0)$ , on fixe  $t$  égal à  $t_0$  et on calcule :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, t_0) - f(x_0, t_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

En refaisant ensuite varier  $(x_0, t_0)$ , le résultat obtenu contient les variables  $x$  et  $t$  et définit ainsi une fonction de deux variables appelée dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$  et notée  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Ainsi, pour tout  $(x, t)$ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = g'(x).$$

Par exemple, si pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,  $f(x, t) = t^x e^{-t}$ , alors pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t)t^x e^{-t}$  et  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = xt^{x-1} e^{-t} - t^x e^{-t} = (x - t)t^{x-1} e^{-t}$ .

On prendra garde au fait que dans la notation  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ , la lettre  $x$ , utilisée deux fois, ne désigne pas la même chose. Dans  $\partial x$ , elle indique la variable par rapport à laquelle on a dérivé et dans  $(x, t)$ , elle précise en quel point on a évalué. Si on évalue en  $(x_0, t_0)$ , on obtient  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0)$  et non pas  $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, t_0)$ .

## I - Continuité des intégrales à paramètres

### **Théorème 1.** (continuité des intégrales à paramètres)

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles non vides de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose que

- pour chaque  $x$  de  $J$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- pour chaque  $t$  de  $I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $J$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$ , définie, continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que, pour chaque  $(x, t) \in J \times I$ ,  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$  (hypothèse de domination).

Alors, la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $J$ .

**Démonstration.** Soit  $x \in J$ . La fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  et son module est majoré sur  $I$  par la fonction  $\varphi$  qui est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ . Donc, la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ . On en déduit l'existence de  $F(x)$ .

La fonction  $F$  est donc définie sur  $J$ . Soit  $a \in J$ . Montrons que  $F$  est continue en  $a$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $J$ , convergente, de limite  $a$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in J$ , posons  $g_n(t) = f(x_n, t)$ .

- chaque fonction  $g_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est continue par morceaux sur  $I$ ;
- puisque pour chaque  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $J$  et que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ , on en déduit que pour chaque  $t \in I$ , la suite numérique  $(g_n(t))$  converge vers  $f(a, t)$  ou encore la suite de fonctions  $(g_n)$  converge simplement sur  $I$  vers la fonction  $t \mapsto f(a, t)$ . De plus, la fonction  $t \mapsto f(a, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in I$ ,  $|g_n(t)| = |f(x_n, t)| \leq \varphi(t)$  où  $\varphi$  est une fonction continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .

D'après le théorème de convergence dominée, la suite  $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}} = \left( \int_1^{\infty} g_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et a pour limite

$$\int_1^{\infty} f(a, t) dt = F(a).$$

On a montré que pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $J$ , convergente, de limite  $a$ , la suite  $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge (et a pour limite  $F(a)$ ). On sait alors que la fonction  $F$  est continue en  $a$ .

On a finalement montré que la fonction  $F$  est continue sur  $J$ .

---

**Exercice 1.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ .

- 1) Montrer que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Montrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution 1.**

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et est négligeable devant  $\frac{1}{t^2}$  en  $+\infty$  d'après un théorème de croissances comparées. Donc, la fonction  $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On en déduit l'existence de  $F(x)$ .

On a montré que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

2) Pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ , posons  $f(x, t) = \sin(xt)e^{-t^2}$  de sorte que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ .

- pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ ;
- pour chaque  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ;
- pour chaque  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ ,  $|f(x, t)| = |\sin(xt)|e^{-t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$ . De plus, la fonction  $\varphi$  est continue par morceaux puis intégrable sur  $[0, +\infty[$  car négligeable en  $+\infty$  devant  $\frac{1}{t^2}$  d'après un théorème de croissances comparées.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

---

**Exercice 2.** Pour  $x \geq 1$ , on pose  $F(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t} dt$ .

- 1) Vérifier que  $F$  est bien définie sur  $[1, +\infty[$ .
- 2) Montrer que  $F$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

**Solution 2.**

1) Soit  $x \in [1, +\infty[$ . La fonction  $t \mapsto \sqrt{x + \cos t}$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  (car pour tout réel  $t \in [0, \pi]$ ,  $x + \cos t \geq 1 + \cos t \geq 0$ ). Donc, la fonction  $t \mapsto \sqrt{x + \cos t}$  est intégrable sur  $[0, \pi]$ . On en déduit l'existence de  $F(x)$ .

On a montré que  $F$  est bien définie sur  $[1, +\infty[$ .

2) Soit  $A > 1$ . Pour  $(x, t) \in [1, A] \times [0, \pi]$ , posons  $f(x, t) = \sqrt{x + \cos t}$  de sorte que pour tout  $x \in [1, A]$ ,  $F(x) = \int_0^{\pi} f(x, t) dt$ .

- pour chaque  $x \in [1, A]$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, \pi]$ ;
- pour chaque  $t \in [0, \pi]$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $[1, A]$ ;
- pour chaque  $(x, t) \in [1, A] \times [0, \pi]$ ,  $|f(x, t)| = \sqrt{x + \cos t} \leq \sqrt{A + \cos t} = \varphi(t)$ . De plus, la fonction  $\varphi$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  et donc intégrable sur  $[0, \pi]$ .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $F$  est continue sur  $[1, A]$ . Ceci étant vrai pour tout  $A > 1$ , on a montré que  $F$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

Le théorème 1 dit que  $\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) dt$  quand  $a$  est dans le domaine et en cas de continuité en  $a$ . Ce théorème se généralise au cas où  $a$  est adhérent au domaine,  $a$  réel ou infini :

**Théorème 2.** (passage à la limite sous le signe somme)

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles non vides de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $a$ , réel ou infini, adhérent à  $J$ . On suppose que

- pour chaque  $x$  de  $J$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- pour chaque  $t$  de  $I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  a une limite  $\ell(t)$  quand  $x$  tend vers  $a$  et de plus la fonction  $\ell$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- il existe une fonction  $\varphi$ , définie, continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que, pour chaque  $(x, t) \in J \times I$ ,  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$  (hypothèse de domination).

Alors, la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  a une limite en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \ell(t) dt = \int_I \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) dt$ .

**Démonstration.**

• Si  $a$  est réel, pour  $(x, t) \in (J \cup \{a\}) \times I$ , posons  $g(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & \text{si } x \in J \\ \ell(t) & \text{si } x = a \end{cases}$ . La fonction  $g$  vérifie les hypothèses du théorème 1 sur  $(J \cup \{a\}) \times I$  (les inégalités  $|f(a, t)| \leq \varphi(t)$  étant obtenues par passage à la limite quand  $x$  tend vers  $a$ ).

Donc la fonction  $G : x \mapsto \int_I g(x, t) dt$  est continue sur  $J \cup \{a\}$  et en particulier en  $a$ . Ceci montre que  $\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I g(a, t) dt = \int_I \ell(t) dt$ .

• Si par exemple  $a = +\infty$ , on applique le résultat précédent à la fonction  $(x, t) \mapsto f\left(\frac{1}{x}, t\right)$  en 0 à droite.

**Exercice 3.** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt$ .

**Solution 3.** Soit  $x > 0$ . La fonction  $t \mapsto e^{-x^2 t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et négligeable en  $+\infty$  devant  $\frac{1}{t^2}$ . Donc, la fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .

Pour  $(x, t) \in [1, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , posons  $f(x, t) = e^{-x^2 t^2}$  de sorte que pour tout  $x \geq 1$ ,  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ .

- pour chaque  $x$  de  $[1, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$  ;
- pour chaque  $t$  de  $[0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  a une limite  $\ell(t) = 0$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et de plus la fonction  $\ell$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$  ;
- pour tout  $x \geq 1$ ,  $|f(x, t)| = e^{-x^2 t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$  où de plus la fonction  $\varphi$  est continue par morceaux et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

On en déduit que la fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt$  a une limite en  $+\infty$  et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2 t^2} dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

## II - Dérivation des intégrales à paramètres

**Théorème 3.** (théorème de dérivation sous le signe somme ou théorème de LEIBNIZ)

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles non vides de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose que

pour chaque  $x$  de  $J$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .

On suppose de plus que  $f$  est pourvue sur  $J \times I$  d'une dérivée partielle par rapport à sa première variable  $x$  vérifiant ;

- pour chaque  $x$  de  $J$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- pour chaque  $t$  de  $I$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $J$  ;
- il existe une fonction  $\varphi_1$ , définie, continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que, pour chaque  $(x, t) \in J \times I$ ,  
 $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_1(t)$  (hypothèse de domination).

Alors, la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $J$  et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme :

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

**Démonstration.** Puisque pour chaque  $x$  de  $J$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ , la fonction  $F$  est définie sur  $J$ .

$$\text{Pour } (x, t) \in J \times I, \text{ posons } g(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{de sorte que pour } x \neq a, \\ \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \int_I g(x, t) dt.$$

- Pour chaque  $x$  dans  $J$ , la fonction  $t \mapsto g(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  ( $y$  compris pour  $x = a$ ).
- Pour chaque  $t$  dans  $I$ , la fonction  $x \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $J$  ( $y$  compris en  $x = a$  car par définition de  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, t)$ ,  
 $\frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x}(a, t)$ ).
- Soit  $(x, t) \in (J \setminus \{a\}) \times I$ . D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|g(x, t)| = \left| \frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a} \right| \leq \text{Sup} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(u, t) \right|, u \in J \right\} \leq \varphi_1(t),$$

ce qui reste vrai quand  $x = a$  et  $t \in I$ .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $G : x \mapsto \int_I g(x, t) dt$  est continue sur  $J$  et en particulier en  $a$ . On en déduit que le taux  $\frac{F(x) - F(a)}{x - a}$  a une limite quand  $x$  tend vers  $a$  et donc que  $F$  est dérivable en  $a$ . De plus,

$$F'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \int_I g(x, t) dt = \int_I g(a, t) dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) dt.$$

Ainsi,  $F$  est dérivable sur  $J$  et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Enfin, toujours d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $F' : x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$  est continue sur  $J$  et donc  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $J$ .

**Exercice 4.** (un calcul de l'intégrale de GAUSS :  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ )

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$  et  $G(x) = \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ .

- 1) Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser  $F'$ .
- 2) Montrer que  $G$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser  $G'$ .
- 3) Montrer que la fonction  $F + G$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .
- 4) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .
- 5) En déduire  $I$ .

**Solution 4.**

1) Soit  $A > 0$ . Soit  $f : [-A, A] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 $(x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$

- Pour chaque  $x$  de  $[-A, A]$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et est donc intégrable sur ce segment.
- La fonction  $f$  admet sur  $[-A, A] \times [0, 1]$  une dérivée partielle par rapport à sa première variable  $x$  définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times [0, 1], \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

De plus,

- pour chaque  $x \in [-A, A]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur le segment  $[0, 1]$ ,
- pour chaque  $t \in [0, 1]$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ ,
- pour chaque  $(x, t) \in [-A, A] \times [0, 1]$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2A = \varphi(t)$ , la fonction  $\varphi$  étant continue et donc intégrable sur le segment  $[0, 1]$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[-A, A]$  et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout  $A > 0$ ,  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt.$$

2) La fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la fonction  $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Il en est de même de la fonction  $G$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

3) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . En posant  $u = xt$ , on obtient

$$F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} x dt = -e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -G'(x),$$

cette égalité restant vraie quand  $x = 0$  par continuité des fonctions  $F'$  et  $G'$  sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi,  $(F + G)' = 0$  et donc  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}.$$

4) Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|F(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+0^2)}}{1+0^2} dt = e^{-x^2},$$

et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$ , on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

5) Pour  $x > 0$ , on a  $\int_0^x e^{-t^2} dt \geq 0$  et donc d'après la question 3),

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{G(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - F(x)}.$$

La question 4) permet alors d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  et donc que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Exercice 5.** Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx) dt$ .

**Solution 5.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx) dt$ .

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\operatorname{ch}(2tx) = \frac{e^{2tx} + e^{-2tx}}{2} \leq e^{2t|x|}$$

et donc

$$\left| t^2 e^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx) \right| \leq t^2 e^{-t^2 + 2t|x|} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1),$$

d'après un théorème de croissances comparées. Ainsi, la fonction  $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx)$  est négligeable devant  $\frac{1}{t^2}$  en  $+\infty$  et est donc intégrable sur un voisinage de  $+\infty$ . Finalement, la fonction  $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On en déduit que la fonction  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . De plus, il est clair que  $F$  est paire.

2) Soit  $A > 0$ . Soit  $f : [-A, A] \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de sorte que pour tout  $x \in [-A, A]$ ,  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ .  
 $(x, t) \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx)$

- On sait déjà que pour tout  $x \in [-A, A]$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
- La fonction  $f$  admet sur  $[-A, A] \times [0, +\infty[$  une dérivée partielle par rapport à sa première variable  $x$  définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times [0, +\infty[, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx).$$

De plus,

- pour chaque  $x$  de  $[-A, A]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ ;
- pour chaque  $t$  de  $[0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $[-A, A]$ ;
- pour chaque  $(x, t)$  de  $[-A, A] \times [0, +\infty[$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2t|x|) \leq 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2At) = \varphi_1(t)$  où de plus, la fonction  $\varphi_1$  est continue par morceaux et intégrable sur  $[0, +\infty[$  car négligeable en  $+\infty$  devant  $\frac{1}{t^2}$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[-A, A]$  et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout  $A > 0$ , on a montré que la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2tx) dt.$$

3) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $A > 0$ . Les deux fonctions  $t \mapsto -e^{-t^2}$  et  $t \mapsto \text{sh}(2tx)$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $[0, A]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^A 2te^{-t^2} \text{sh}(2tx) dt = \left[ -e^{-t^2} \text{sh}(2tx) \right]_0^A + 2x \int_0^A e^{-t^2} \text{ch}(2tx) dt = -e^{-A^2} \text{sh}(2Ax) + 2x \int_0^A e^{-t^2} \text{ch}(2tx) dt.$$

Quand  $A$  tend vers  $+\infty$ ,  $-e^{-A^2} \text{sh}(2Ax) = \frac{1}{2} \left( e^{-A^2+2Ax} - e^{-A^2-2Ax} \right)$  tend vers 0. Quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \text{ch}(2tx) dt = 2xF(x).$$

4)

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2xF(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} F'(x) - 2xe^{-x^2} F(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \left( e^{-x^2} F \right)'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} F(x) = e^0 F(0) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \text{ch}(2tx) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}.$$

Si on redérive  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (qui est une fonction de deux variables) par rapport à sa première variable  $x$ , on obtient une fonction notée  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et si on recommence, on obtient plus généralement  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \dots$

Par récurrence, on en déduit du théorème 3, le théorème plus général suivant :

**Théorème 4.** (théorème de dérivation sous le signe somme généralisé)

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles non vides de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose que

pour chaque  $x$  de  $J$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .

On suppose de plus que  $f$  est pourvue sur  $J \times I$  de dérivées partielles successives par rapport à sa première variable  $x$  jusqu'à l'ordre  $n \geq 1$  (resp. à tout ordre) vérifiant ;

- pour chaque  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , (resp.  $k \in \mathbb{N}^*$ ) et chaque  $x$  de  $J$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- pour chaque  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , (resp.  $k \in \mathbb{N}^*$ ) et chaque  $t$  de  $I$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue sur  $I$  ;
- pour chaque  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , (resp.  $k \in \mathbb{N}^*$ ), il existe une fonction  $\varphi_k$ , définie, continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que, pour chaque  $(x, t) \in J \times I$ ,  $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$  (hypothèses de domination).

Alors, la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $C^n$  (resp.  $C^\infty$ ) sur  $J$  et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ (resp. } k \in \mathbb{N}^*), \forall x \in J, F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

Nous mettrons en œuvre ce théorème dans le paragraphe suivant où on étudie la fonction  $\Gamma$  d'EULER.

### III - Définition et étude de la fonction $\Gamma$

#### 1) Définition.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . La fonction  $f : t \mapsto t^x e^{-t}$  est continue et positive sur  $]0, +\infty[$ .

**Etude en  $+\infty$ .** D'après un théorème de croissances comparées,  $t^2 \times t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  et donc  $t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . On en déduit que la fonction  $f$  est intégrable sur un voisinage de  $+\infty$ .

**Etude en 0.**  $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{x-1}$  et donc la fonction  $f$  est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si  $x - 1 > -1$  ce qui équivaut à  $x > 0$ .

Finalement,  $\Gamma(x)$  existe si et seulement si  $x > 0$ .

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

## 2) Relation fonctionnelle.

Soit  $x > 0$ . Soient  $a$  et  $A$  deux réels tels que  $0 < a < A$ . Les deux fonctions  $t \mapsto t^x$  et  $t \mapsto -e^{-t}$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $[a, A]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_a^A + x \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt = -A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$$

Puisque  $x > 0$  et donc  $x + 1 > 0$ , quand  $a$  tend vers 0 et  $A$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ .

$$\forall x > 0, \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

## 3) Quelques valeurs.

• En particulier, pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $\Gamma(n) = (n - 1)\Gamma(n - 1)$ . De plus,  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ . Par récurrence, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n - 1)!.$$

• Calculons aussi  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ . On pose  $u = \sqrt{t}$  et donc  $t = u^2$  et  $dt = 2u du$  et on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \text{ (intégrale de GAUSS).}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La relation fonctionnelle du 2) permet encore d'écrire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)$  et donc pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2n - 1}{2} \times \frac{2n - 3}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n) \times (2n - 1) \times \dots \times 3 \times 2}{2^n (2n) \times (2n - 2) \times \dots \times 2} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!},$$

ce qui reste vrai quand  $n = 0$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}.$$

## 4) Continuité.

Soient  $a$  et  $A$  deux réels tels que  $0 < a < A$ . Soit  $\Phi : [a, A] \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de sorte que pour tout  $x \in [a, A]$ ,

$$(x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(x, t) dt.$$

- Pour chaque  $x \in [a, A]$ , la fonction  $t \mapsto \Phi(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ ,
- pour chaque  $t \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto \Phi(x, t)$  est continue sur  $[a, A]$ ,
- Soit  $(x, t) \in [a, A] \times ]0, +\infty[$ . Si  $0 < t \leq 1$ , alors  $|t^{x-1} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t} \leq t^{a-1} e^{-t}$  et si  $t \geq 1$ ,  $|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{A-1} e^{-t}$ . On en déduit que



$$\forall(x, t) \in [a, A] \times ]0, +\infty[, |\Phi(x, t)| \leq \begin{cases} t^{\alpha-1} e^{-t} & \text{si } t < 1 \\ t^{\Lambda-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases} = \varphi_0(t).$$

D'après le 1), la fonction  $\varphi_0$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $\Gamma$  est continue sur  $[a, A]$ . Ceci étant vrai pour tous réels  $a$  et  $A$  tels que  $0 < a < A$ , on a montré que

La fonction  $\Gamma$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

## 5) Dérivation.

### 5-a) Dérivée première.

On reprend les notations de 4).

- Pour chaque  $x$  de  $[a, A]$ , la fonction  $t \mapsto \Phi(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .
- La fonction  $\Phi$  admet sur  $[a, A] \times ]0, +\infty[$  une dérivée partielle par rapport à sa première variable  $x$  définie par

$$\forall(x, t) \in [a, A] \times ]0, +\infty[, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = (\ln t) t^{x-1} e^{-t}.$$

De plus,

- pour chaque  $x$  de  $[a, A]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ ,
- pour chaque  $t \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $[a, A]$ ,
- pour chaque  $(x, t) \in [a, A] \times ]0, +\infty[$ ,  $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \begin{cases} |\ln t| t^{\alpha-1} e^{-t} & \text{si } t < 1 \\ |\ln t| t^{\Lambda-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases} = \varphi_1(t).$

Vérifions alors l'intégrabilité de la fonction  $\varphi_1$  sur  $]0, +\infty[$ . Pour cela, pour  $\alpha > 0$  donné, vérifions l'intégrabilité de la fonction  $t \mapsto (\ln t) t^{\alpha-1} e^{-t}$  sur  $]0, +\infty[$ . Cette fonction est

- \* continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ ,
- \* négligeable en  $+\infty$  devant  $\frac{1}{t^2}$  d'après un théorème de croissances comparées,
- \* négligeable en 0 devant  $t^{-1+\frac{\alpha}{2}}$  avec  $-1 + \frac{\alpha}{2} > -1$  car  $t^{-1+\frac{\alpha}{2}} \times (\ln t) t^{\alpha-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{\alpha/2} (\ln t) \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$  d'après un théorème de croissances comparées.

On en déduit que la fonction  $t \mapsto (\ln t) t^{\alpha-1} e^{-t}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et il en est de même de la fonction  $\varphi_1$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction  $\Gamma$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, A]$  et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels  $a$  et  $A$  tels que  $0 < a < A$ , on a montré que

La fonction  $\Gamma$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt.$

### b) Dérivées successives.

- Pour chaque  $x$  de  $[a, A]$ , la fonction  $t \mapsto \Phi(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .
- La fonction  $\Phi$  admet sur  $[a, A] \times ]0, +\infty[$  des dérivées partielles à tout ordre par rapport à sa première variable  $x$  définies par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall(x, t) \in [a, A] \times ]0, +\infty[, \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

De plus, pour chaque  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

- pour chaque  $x$  de  $[a, A]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ ,
- pour chaque  $t \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t)$  est continue sur  $[a, A]$ ,
- pour chaque  $(x, t) \in [a, A] \times ]0, +\infty[$ ,  $\left| \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \begin{cases} |\ln t|^k t^{\alpha-1} e^{-t} & \text{si } t < 1 \\ |\ln t|^k t^{\Lambda-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases} = \varphi_k(t).$

Enfin, les fonctions  $\varphi_k, k \in \mathbb{N}^*$ , sont intégrables sur  $]0, +\infty[$  pour les mêmes raisons que la fonction  $\varphi_1$ .

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[a, A]$  et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels  $a$  et  $A$  tels que  $0 < a < A$ , on a montré que

La fonction  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$ .

**6) Convexité.**

D'après 5), la fonction  $\Gamma$  est deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall x > 0, \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0$  (intégrable d'une fonction continue positive et non nulle). Donc

La fonction  $\Gamma$  est strictement convexe sur  $]0, +\infty[$ .

**7) Variations.**

Puisque la fonction  $\Gamma''$  est strictement positive sur  $]0, +\infty[$ , la fonction  $\Gamma'$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . De plus,

- la fonction  $\Gamma$  est continue sur  $[1, 2]$ ,
- la fonction  $\Gamma$  est dérivable sur  $]1, 2[$ ,
- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ,

et le théorème de ROLLE permet d'affirmer qu'il existe  $x_0 \in ]1, 2[$  tel que  $\Gamma'(x_0) = 0$ . Puisque la fonction  $\Gamma'$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , la fonction  $\Gamma'$  est strictement négative sur  $]0, x_0[$  et strictement positive sur  $]x_0, +\infty[$ . On a montré que

$\exists x_0 \in ]1, 2[$  la fonction  $\Gamma$  est strictement décroissante sur  $]0, x_0[$  et strictement croissante sur  $]x_0, +\infty[$ .

**8) Etude en  $+\infty$ .**

Puisque la fonction  $\Gamma$  est croissante sur  $[2, +\infty[$ , pour  $x \geq 3, \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \geq (x-1)\Gamma(2) = x-1$  et on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$ .

De plus, pour  $x > 1, \frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x} \Gamma(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . On en déduit que la courbe représentative de la fonction  $\Gamma$  admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction  $(Oy)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$ .

**9) Etude en 0.**

Pour  $x > 0, x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \Gamma(1) = 1$  par continuité de la fonction  $\Gamma$  en 1. Donc

$\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$  et en particulier,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ .

**10) Graphe.**

