# Séries entières

## I - Définition d'une série entière

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ z & \mapsto & a_n z^n \end{array}, \ n \in \mathbb{N}.$$

• Pour $z$ donné, la série numérique de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, n'est pas nécessairement convergente. En cas de convergence, on peut poser

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad (*).$$

**Un polynôme est une série entière d'un type particulier** : les polynômes sont les séries entières associées aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui s'annulent à partir d'un certain rang. La notion de série entière est une généralisation de la notion de polynôme.

• La somme d'une série entière peut parfois s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Par exemple, pour tout réel $x$, la série numérique de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

ou encore, pour tout nombre complexe $z$ de module strictement inférieur à $1$, la série numérique de terme général $z^n$ converge et on sait que

$$\forall z \in D(0,1),\ \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

($D(0,1)$ désignant le disque ouvert de centre $0$ et de rayon $1$). Mais, il ne faut pas croire que chaque fois que l'on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut exprimer la somme à l'aide des fonctions usuelles. Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{(n!)^2}$, la fonction

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n!)^2}$$

et définie sur $\mathbb{C}$ tout entier mais on peut démontrer que la fonction $f$ ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles. On vient ainsi d'obtenir une nouvelle fonction.

• La somme $(*)$ est ambiguë quand $z = 0$ et doit être comprise ainsi :

$$f(0) = a_0 + 0 + 0 + \ldots = a_0.$$

Ainsi, **la valeur d'une série entière en $0$ est son « coefficient constant »**. La somme d'une série entière est toujours définie en $0$ et il arrive que cette somme ne soit définie qu'en $0$. C'est par exemple le cas de la série entière associée à la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ car pour $z \in \mathbb{C}^*$, la série numérique de terme général $n!z^n$ est grossièrement divergente d'après un théorème de croissances comparées.

**Exercice 1.** Pour chacune des séries entières suivantes, exprimer $a_n$ en fonction de $n$.

**1)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ **2)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ **3)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ **4)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(2n)!}$ **5)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{(n^2)}$.

**Solution 1.**

**1)** $a_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n}$.

**2)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$.

**3)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ou bien $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \dfrac{1}{(2p)!}$ et $a_{2p+1} = 0$.

**4)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(2n/3)!} \text{ si } n \in 3\mathbb{N} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ ou bien $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{3p} = \dfrac{1}{(2p)!}$ et $a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0$.

**5)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est un carré parfait} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $(a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0 \ldots)$.

---

# II -Rayon de convergence d'une série entière

Dans ce paragraphe, nous allons analyser le domaine de définition de la somme d'une série entière.

## *1) Le lemme d'Abel*

**Théorème 1 (lemme d'Abel).** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Alors, pour tout nombre complexe $z$ de module strictement inférieur à $|z_0|$, la série numérique de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument.

**Démonstration.** Par hypothèse, il existe un réel positif $M$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leqslant M$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ (puisque $z_0 \neq 0$, $|z_0| > 0$). Alors, pour tout entier naturel $n$,

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \times \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leqslant M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n.$$

Par hypothèse, $\dfrac{|z|}{|z_0|} \in [0, 1[$ et donc la série géométrique de terme général $M\left(\dfrac{|z|}{|z_0|}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. On en déduit que la série numérique de terme général $|a_n z^n|$, $n \in \mathbb{N}$, converge ou encore que la série numérique de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, est absolument convergente.

---

## *2) Définition du rayon de convergence*

Définition 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose

$$R_a = \sup\left\{r \in [0, +\infty[/\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\}.$$

$R_a$ existe dans $[0, +\infty]$ et est unique. $R_a$ s'appelle le **rayon de convergence** de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Commentaire.** Dans la définition précédente, on affirme que $R_a$ existe. Cela est dû au fait que $\left\{r \in [0, +\infty[/\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\}$ n'est pas vide car contient $0$.

**Exemples.** Dans ce qui suit, on pose $E_a = \left\{r \in [0, +\infty[/\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = 1$. Alors, $E_a = [0, 1]$ et donc $R_a = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = n^2$. Alors, $E_a = [0, 1[$ (d'après un théorème de croissances comparées) et donc $R_a = 1$.
- Posons $a_0 = 0$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. Alors, $E_a = [0, 1]$ et donc $R_a = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Alors, $E_a = [0, 2]$ et donc $R_a = 2$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = 2^n$. Alors, $E_a = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et donc $R_a = \dfrac{1}{2}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = n!$. Alors, $E_a = \{0\}$ et donc $R_a = 0$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Alors, $E = [0, +\infty[$ et donc $R_a = +\infty$. ❑

### 3) Calculs de rayons

**Théorème 2 (caractérisation du rayon de convergence).** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Si $R_a = 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et en particulier, la série de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.
- Si $R_a = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et en particulier, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ et donc la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- Si $R_a \in ]0, +\infty[$, alors
  - pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$, la série de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et en particulier, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ et donc la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
  - pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R_a$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et en particulier, la série de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.

**Commentaire.** Au vu des différentes situations, les implications ci-dessus (si $R_a$ ..., alors ...) sont des équivalences. On a obtenu une caractérisation de chaque situation.

**Démonstration.**

**1er cas.** Supposons $R_a = 0$. Par définition de $R_a$, si $z$ est un nombre complexe tel que $|z| > 0$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (car sinon $R_a \geqslant |z| > 0$) et en particulier, la série de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.

**2ème cas.** Supposons que $R_a = +\infty$. Soit $z$ est un nombre complexe.
$|z|$ n'est pas un majorant de $\left\{r \in [0, +\infty[/\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\}$. Donc, il existe $r_0 > |z|$ tel que la suite $(a_n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. D'après le lemme d'ABEL, la série de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument.

**3ème cas.** Supposons que $R_a \in ]0, +\infty[$. Soit $z$ un nombre complexe.
- si $|z| > R_a$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée par définition de $R_a$ et en particulier, la série de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.
- si $|z| < R_a$, alors, par définition de $R_a$, il existe $r_0 \in ]|z|, R_a[$ tel que la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. D'après le lemme d'ABEL, la série de terme général $a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et en particulier la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

---

Dans ce qui suit, pour $R \geqslant 0$, on note $D(0, R)$ le disque ouvert de centre $0$ et de rayon $R$ c'est-à-dire $\{z \in \mathbb{C}/\ |z| < R\}$ (quand $R = 0$, $D(0, R)$ est vide) et on note $D_f(0, R)$ le disque fermé de centre $0$ et de rayon $R$ c'est-à-dire $\{z \in \mathbb{C}/\ |z| \leqslant R\}$. Le théorème suivant résulte immédiatement du théorème 2.

**Théorème 3.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $R_a \in [0, +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Le domaine de définition $\Delta_f$ de la fonction $f$ vérifie

$$]-R_a, R_a[\ \subset \Delta_f \subset [-R_a, R_a].$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Le domaine de définition $\Delta_f$ de la fonction $f$ vérifie

$$D(0, R_a) \subset \Delta_f \subset D_f(0, R_a).$$

**Commentaire.** Ainsi, dans le cas d'une variable réelle $x$, le domaine de définition de la série entière est l'un des quatre ensembles $]-R_a, R_a[$, $]-R_a, R_a]$, $[-R_a, R_a[$ ou $[-R_a, R_a]$. Si $R_a = +\infty$, le domaine est $]-\infty, +\infty[$ et si $R_a = 0$, le domaine de définition est $\{0\}$.

DÉFINITION 3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $R_a \in ]0, +\infty[$.

L'intervalle $]-R_a, R_a[$ s'appelle l'**intervalle ouvert de convergence** de la série entière (de variable réelle) associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

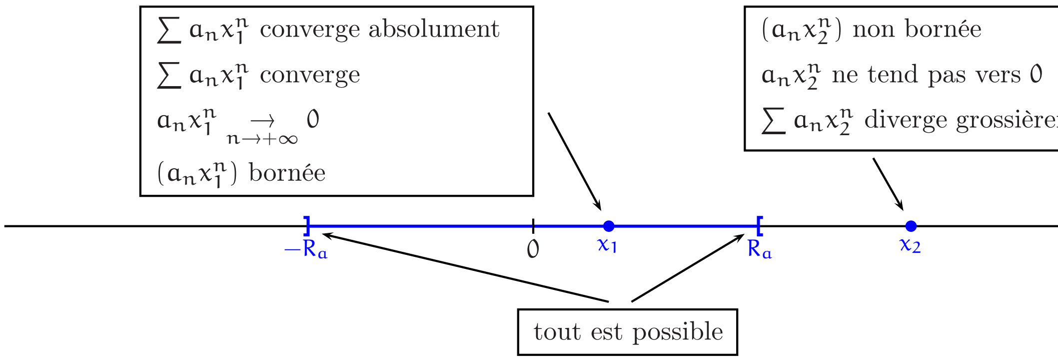
Le disque $D(0, R_a) = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| < R_a\}$ s'appelle le **disque ouvert de convergence** de la série entière (de variable complexe) associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Commentaire.** On est sûr que la série de terme général $a_n x^n$ converge quand $x \in ]-R_a, R_a[$ et diverge quand $|x| > R_a$. Quand $|x| = R_a$, on ne peut énoncer aucune règle générale. Tout est possible. Par exemple,

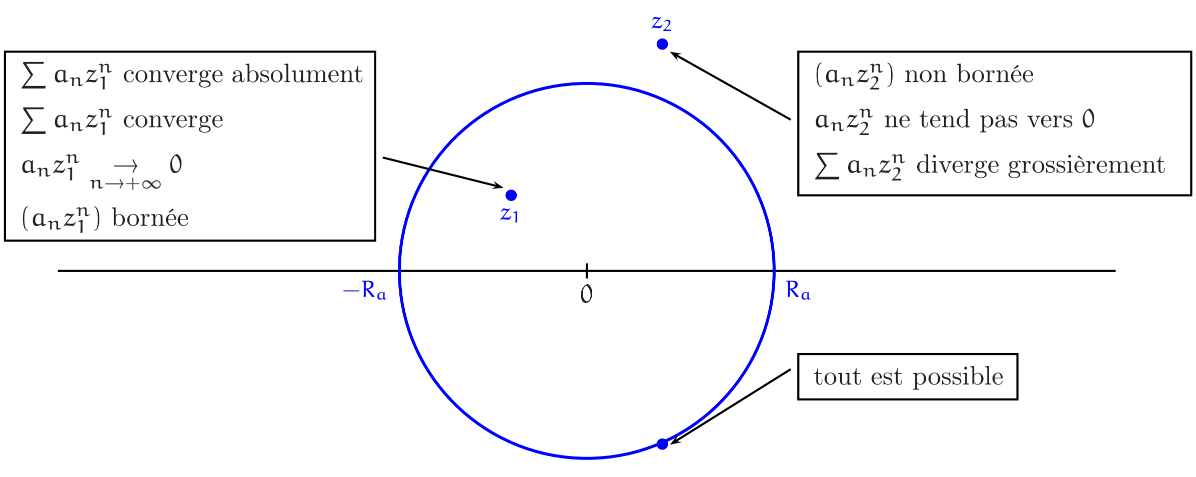
si $a_n = 1$, alors $R_a = 1$ et $\Delta_f = ]-1,1[$,
si $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ et $a_0 = 0$, alors $R_a = 1$ et $\Delta_f = [-1,1[$,
si $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \geqslant 1$ et $a_0 = 0$, alors $R_a = 1$ et $\Delta_f = ]-1,1]$,
si $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$ et $a_0 = 0$, alors $R_a = 1$ et $\Delta_f = [-1,1]$.

On a des résultats analogues pour les séries entières de variable complexe. Quand $|z| = R_a$, tout est possible de sorte que le cercle de centre $0$ et de rayon $R_a$ est quelques fois appelé **cercle d'incertitude**.

Résumons maintenant les résultats précédents sur un graphique :




et si la variable est complexe, cela donne




**Exercice 2.** Déterminer $R_a$ dans les cas suivants :

**1)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$.

**2)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ si $n$ est une puissance de $2$ et $0$ sinon.

**3)** $a_0 = a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $a_n = 1$ si $n$ est premier et $0$ sinon.

**Solution 2.**

**1)** La suite $\left(\dfrac{1^n}{2n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $R_a \geqslant 1$. La série de terme général $\dfrac{1^n}{2n+3}$ diverge et donc $R_a \leqslant 1$. Finalement, $R_a = 1$.

**2)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n 1^n \leqslant 1$ et donc la suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On en déduit que $R_a \geqslant 1$. Mais $a_n 1^n$ ne tend pas vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et donc $R_a \leqslant 1$. Finalement, $R_a = 1$. On note que pour $x \in ]-1,1[$,

$$f(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{(2^n)}.$$

**3)** La suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $R_a \geqslant 1$. Mais $a_n 1^n$ ne tend pas vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$ (car il existe une infinité de nombres premiers) et donc $R_a \leqslant 1$. Finalement, $R_a = 1$. On note que pour $x \in ]-1,1[$,

$$f(x) = x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{p_n}.$$

---

Avec cet exercice, on peut dégager les premières méthodes de calculs de rayons :

Si pour un certain nombre complexe non nul $z$, on a
ou bien $(a_n z^n)$ non bornée,
ou bien $a_n z^n$ ne tend pas vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$,
ou bien $\sum a_n z^n$ est semi-convergente (c'est-à-dire convergente sans être absolument convergente)
alors, $R_a \leqslant |z|$.

Si pour un certain nombre complexe non nul $z$, on a
ou bien $\sum a_n z^n$ est convergente
ou bien $a_n z^n$ tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$,
ou bien $(a_n z^n)$ bornée,
alors, $R_a \geqslant |z|$.

Par exemple, puisque $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente mais non absolument convergente, le rayon de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ est $1$ car supérieur ou égal à $1$ et inférieur ou égal à $1$.

**Théorème 4.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{C}^*$. Alors, $R_{ka} = R_a$.

**Démonstration.** Puisque $k \neq 0$, $\left\{r \in [0,+\infty[/\ (ka_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\} = \left\{r \in [0,+\infty[/\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\}$ et en particulier, $R_{ka} = R_a$ ($R_{ka}$ désignant le rayon associé à la suite $ka = (ka_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

---

**Théorème 5 (comparaisons de rayons).** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si pour tout $n$ à partir d'un certain rang, on a $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

**Démonstration.** • Supposons que pour tout $n$ à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $n$ à partir d'un certain rang, $|a_n z^n| \leqslant |b_n z^n|$ et donc $\left\{r \in [0,+\infty[/\ (b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\} \subset \left\{r \in [0,+\infty[/\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\}$. En particulier, $R_a$ est un majorant de $\left\{r \in [0,+\infty[/\ (b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\}$ et, puisque $R_b$ est le plus petit des majorants de cet ensemble, $R_a \geqslant R_b$.

• Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n)$, il existe $M > 0$ tel que pour $n$ à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant M|b_n|$. D'après ce qui précède et le théorème 4, $R_a \geqslant R_{Mb} = R_b$.

• Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, alors $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n)$ et donc $R_a \geqslant R_b$.

• Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n)$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{=} O(a_n)$. On en déduit que $R_a \geqslant R_b$ et $R_a \leqslant R_b$ puis $R_a = R_b$.

---

**Exercice 3.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

**1)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)x^n$ **2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^n}$ **3)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ où $a_n=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

**Solution 3.**

**1)** Posons $a_0=0$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $a_n=e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$$\begin{aligned}a_n&=e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\&\underset{n\to+\infty}{=}e-e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}e\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e}{2n}.\end{aligned}$$

Posons $b_0=0$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n=\dfrac{e}{2n}$. On a $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}b_n$ et $R_b=1$. Donc $R_a=1$.

**2)** Posons $a_0=0$ et pour $n\geqslant 1$, $a_n=\dfrac{1}{n^n}$. Posons encore pour $n\in\mathbb{N}$, $b_n=\dfrac{1}{n!}$.
On a $a_n\underset{n\to+\infty}{=}o(b_n)$ (d'après un théorème de croissances comparées) $R_b=+\infty$. Donc, $R_a=+\infty$.

**3)** Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout réel $t$ de $[0,1]$ $(1-t)^2\geqslant 0$ et donc $\dfrac{1+t^2}{2}\geqslant t\geqslant 0$ puis $\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n\geqslant t^n$. D'autre part, pour $t\in[0,1]$, $0\leqslant\dfrac{1+t^2}{2}\leqslant\dfrac{1+1}{2}=1$. Par suite, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$b_n=\frac{1}{n+1}=\int_0^1 t^n\,dt\leqslant a_n=\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt\leqslant\int_0^1 1\,dt=1=c_n.$$

On en déduit que $1=R_c\leqslant R_a\leqslant R_b=1$ et donc $R_a=1$.

---

**Théorème 6 (règle de d'Alembert).** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain et que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $\ell\in[0,+\infty]$.

Alors $R_a=\dfrac{1}{\ell}$ (avec la convention $\dfrac{1}{0}=+\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty}=0$).

**Démonstration.** Soit $z$ un nombre complexe non nul. Pour $n$ à partir d'un certain rang,

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\times|z|.$$

Par hypothèse, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\underset{n\to+\infty}{\to}\ell$ et donc $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right|\underset{n\to+\infty}{\to}\ell|z|$ (si $\ell=+\infty$, $\ell|z|=+\infty$ car $|z|>0$).
D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, si $\ell|z|>1$, la série numérique de terme général $|a_nz^n|$ diverge grossièrement et si $\ell|z|<1$, la série numérique de terme général $|a_nz^n|$ converge absolument.

Ainsi,
- si $\ell\in]0,+\infty[$, la série numérique de terme général $|a_nz^n|$ converge absolument si $|z|<\dfrac{1}{\ell}$ et diverge grossièrement si $|z|>\dfrac{1}{\ell}$. Dans ce cas, $R_a=\dfrac{1}{\ell}$.
- si $\ell=0$, pour tout nombre complexe $z$, la série numérique de terme général $|a_nz^n|$ converge absolument. Dans ce cas, $R_a=+\infty=\dfrac{1}{\ell}$.
- si $\ell=+\infty$, pour tout nombre complexe non nul $z$, la série numérique de terme général $|a_nz^n|$ diverge grossièrement. Dans ce cas, $R_a=0=\dfrac{1}{\ell}$.

---

**Exercice 4.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

**1)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ **2)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$ **3)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\binom{2n}{n}}$.

**Solution 4.**

**1)** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$. Pour tout entier naturel $n$, $a_n \neq 0$ puis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}.$$

puis $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. D'après la règle de d'Alembert, $R_a = +\infty$.

**2)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n!} = 1 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \ldots$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0$. On ne peux pas utiliser la règle de d'Alembert pour les séries entières car quelque soit le rang considéré, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule au moins une fois au-delà de ce rang (une telle série entière est dite **lacunaire**). Par contre, on peut utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques. Soit $x$ un réel **non nul**.

$$\left|\frac{x^{3n+3}/(n+1)!}{x^{3n}/n!}\right| = \frac{|x|^3}{(n+1)}$$

puis $\left|\dfrac{x^{3n+3}/(n+1)!}{x^{3n}/(n+1)!}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \in [0,1[$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique de terme général $\dfrac{x^{3n}}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Ainsi, pour tout réel $x$, la série numérique de terme général $\dfrac{x^{3n}}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et donc $R_a = +\infty$.

La solution précédente est en fait très maladroite. Il est connu que, pour $x \in \mathbb{R}$ donné, la série numérique de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge. Donc, pour tout réel $x$, la série numérique de terme général $\dfrac{x^{3n}}{n!} = \dfrac{\left(x^3\right)^n}{n!}$ converge. On en déduit que $R_a = +\infty$. Il n'y a au bout du compte que peu de situations où la meilleure méthode consiste à utiliser la règle de d'Alembert.

**3)** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}}$. Pour tout entier naturel $n$, $a_n \neq 0$ puis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)}.$$

puis $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{4n} = \dfrac{1}{4}$. D'après la règle de d'Alembert, $R_a = 4$.

# III - Propriétés de la somme d'une série entière

## *1) Convergence normale*

**Théorème 7.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $R_a > 0$.

Pour tout réel $r$ tel que $0 < r < R_a$, la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$.

Pour tout réel $r$ tel que $0 < r < R_a$, la série de fonctions de terme général $f_n : z \mapsto a_n z^n$ converge normalement sur $D_f(0, r)$.

**Démonstration.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose $f_n(z) = a_n z^n$. Pour $z \in D(0, R_a)$, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Soit $r \in ]0, R_a[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $z \in D_f(0, r)$,

$$|f_n(z)| = |a_n| \times |z|^n \leqslant |a_n|\, r^n,$$

où $|a_n|\, r^n$ est le terme général d'une série numérique convergente puisque $r < R_a$. Donc, la série de fonctions de terme général $f_n$ converge normalement et en particulier uniformément sur $D_f(0, r)$.

La démonstration est analogue dans le cas d'une variable réelle.

---

**Commentaire.** Ainsi, une série entière d'une variable réelle (resp. d'une variable complexe) converge normalement et donc uniformément sur tout segment de centre $0$ contenu dans son intervalle ouvert de convergence (resp. tout disque fermé de centre $0$ contenu dans son disque ouvert de convergence). Mais attention, **une série entière peut ne pas converger uniformément sur son intervalle ouvert de convergence**.

On peut donner deux exemples à ce sujet. Considérons tout d'abord la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $R_a = 1$ et

$$\forall x \in ]-1, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Supposons par l'absurde que la série de fonctions de terme général $f_n\ :\ x \mapsto x^n$ converge uniformément sur $]-1, 1[$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Chaque fonction $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, a une limite réelle quand $x$ tend vers $-1$ par valeurs supérieures à savoir $\ell_n = (-1)^n$. Le théorème d'interversion des limites affirme alors que la série numérique de terme général $\ell_n$ converge ce qui n'est pas. Donc, la série de fonctions de terme général $f_n\ :\ x \mapsto x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Considérons ensuite la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $R_a = +\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Dans l'exercice n° 4 de la planche n° 7 « Suites et séries de fonctions », on montre que si une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f$ est un polynôme. Puisque l'exponentielle n'est pas une fonction polynôme, la convergence sur $\mathbb{R}$ n'est pas uniforme.

## *2) Continuité de la somme d'une série entière*

**Théorème 8.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $R_a > 0$.

Si pour $x \in ]-R_a, R_a[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $f$ est continue sur $]-R_a, R_a[$.

Si pour $z \in D\left(0, R_a\right)$, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, alors $f$ est continue sur $D\left(0, R_a\right)$.

**Démonstration.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose $f_n(z) = a_n z^n$. Pour $z \in D\left(0, R_a\right)$, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Soit $r \in ]0, R_a[$. Chaque fonction $f_n$ est continue sur $D_f(0, r)$ et la série de fonctions de terme général $f_n$ converge uniformément vers $f$ sur $D_f(0, r)$ d'après le théorème 7. Donc, $f$ est continue sur $D_f(0, r)$.

Pour tout $r \in ]0, R_a[$, $f$ est continue sur $D_f(0, r)$ et donc $f$ est continue sur $D\left(0, R_a\right)$.

La démonstration est analogue dans le cas d'une variable réelle.

---

**Commentaire.** Ainsi, **la somme d'une série entière est continue sur son intervalle ouvert de convergence** (respectivement, son disque ouvert de convergence). Mais attention, le théorème précédent ne dit rien de la continuité « au bord de l'intervalle ou du disque » si par exemple, la somme de la série est définie sur $[-R_a, R_a]$.

**Exercice 5.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

**1)** Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$.
**2)** Etudier la continuité de la fonction $f$.

**Solution 5.**

**1)** Notons $D$ le domaine de définition de la fonction $f$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{n^2} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$. Pour $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$. D'après la règle de d'Alembert, $R_a = 1$. On sait alors que

$$]-1, 1[ \subset D \subset [-1, 1].$$

De plus, les séries numériques de termes généraux respectifs $\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, convergent. Donc, $f$ est définie en $-1$ et en $1$. Finalement,

$$D = [-1, 1].$$

**2)** On sait que la somme d'une série entière est continue sur son intervalle ouvert de convergence et donc $f$ est continue sur $]-1, 1[$. Pour étudier la continuité de $f$ en $1$ ou en $-1$, nous n'avons plus de théorème sur les séries entières à disposition et nous allons donc utiliser un théorème issu du chapitre sur les « séries de fonctions » en général.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$, posons $f_n(x) = a_n x^n$. Donc $f_0 = 0$ puis $\|f_0\|_\infty = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

et donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$. On en déduit que la série de fonctions de terme général $f_n$ converge normalement et en particulier uniformément vers $f$ sur $[-1, 1]$. Puisque chaque fonction $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $[-1, 1]$, la fonction $f$ est continue sur $[-1, 1]$.

---

### *3) Dérivation des séries entières*

Dans ce paragraphe et le suivant, les théorèmes concernant la dérivation ou l'intégration des séries entières sont établis pour des séries entières de variable réelle car, en maths sup et en maths spé, on ne dérive pas et on n'intègre pas des fonctions d'une variable complexe.

On commence par deux lemmes :

**Théorème 9.** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = a_{n+1}$.

Alors, $R_a = R_b$.

**Démonstration.** Pour $r > 0$, la suite $(r^n a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(r^{n+1} a_{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = r\left(r^n b_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée si et seulement si la suite $(r^n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Donc, $R_b = R_a$.

---

**Théorème 10.** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = n a_n$.

Alors, $R_a = R_b$.

**Démonstration.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| = n|a_n| \geqslant |a_n|$ et donc $R_b \leqslant R_a$. Donc, si $R_a = 0$, alors $R_b = 0 = R_a$.

Supposons dorénavant $R_a > 0$. Soit $r < R_a$ puis $r' \in ]r, R_a[$. La série de terme général $a_n r'^n$, $n \in \mathbb{N}$ converge puis, d'après un théorème de croissances comparées et puisque $\frac{r}{r'} \in ]-1, 1[$.

$$b_n r^n = a_n r'^n \times n\left(\frac{r}{r'}\right)^n \underset{n \to +\infty}{=} a_n r'^n o(1) \underset{n \to +\infty}{=} o\left(a_n r'^n\right).$$

Ainsi, pour tout $r \in [0, R_a[$, la série de terme général $b_n r^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. On en déduit que $R_b \geqslant R_a$ puis que $R_b = R_a$.

**Théorème 11.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $R_a > 0$.

Pour $x \in ]-R_a, R_a[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $f$ est de classe $C^1$ sur $]-R_a, R_a[$ et la dérivée de $f$ s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\forall x \in ]-R_a, R_a[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

De plus, la série entière associée à la suite $((n+1)a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ a même rayon que la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Démonstration.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in ]-R_a, R_a[$, posons $f_n(x) = a_n x^n$ et pour $x \in ]-R_a, R_a[$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Soit $r \in ]-R_a, R_a[$.

Chaque fonction $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, est de classe $C^1$ sur $[-r, r]$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-r, r]$, $f'_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ n a_n x^{n-1} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$.
D'après les deux théorèmes précédents, la série entière de terme général $f'_n$ a encore pour rayon $R_a$ et donc, la série de fonctions de terme général $f'_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur $[-r, r]$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction $f$ sur $[-r, r]$,
- chaque fonction $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, est de classe $C^1$ sur $[-r, r]$,
- la série de fonctions de terme général $f'_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers la fonction $f$ sur $[-r, r]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $[-r, r]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout réel $r \in ]0, R_a[$, $f$ est de classe $C^1$ sur $]-R_a, R_a[$ et pour tout $x$ de $]-R_a, R_a[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

---

Puisque la série entière dérivée a même rayon de convergence, on peut redériver et par une récurrence immédiate, on obtient :

**Théorème 12.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $R_a > 0$.

Pour $x \in ]-R_a, R_a[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-R_a, R_a[$ et les dérivées successives de $f$ s'obtiennent par dérivation terme à terme :

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in ]-R_a, R_a[,\ f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) a_{n+p} x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.\end{aligned}$$

De plus, les séries dérivées ont même rayon que la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Commentaire.** Les formules utilisant des factorielles restent valables quand $p = 0$.

**Théorème 13.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $R_a > 0$.

Pour $x \in ]-R_a, R_a[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ et donc aussi } \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

**Démonstration.** D'après le théorème 12, $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-R_a, R_a[$ et pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in ]-R_a, R_a[$,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n = p!a_p + \frac{(p+1)!}{1!} a_{p+1} x + \frac{(p+2)!}{2!} a_{p+2} x^2 + \ldots$$

puis $p^{(p)}(0) = p!a_p + 0 = p!a_p$.

---

**Théorème 14 (unicité des coefficients d'une série entière).** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $R_a > 0$ et $R_b > 0$.

Pour $x \in ]-R_a, R_a[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et pour $x \in ]-R_b, R_b[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Alors,

$$\forall x \in ]-\text{Min}\{R_a, R_b\}, \text{Min}\{R_a, R_b\}[,\ f(x) = g(x) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n.$$

**Démonstration.** D'après le théorème 12, $f$ et $g$ sont de classe $C^\infty$ sur $]-\text{Min}\{R_a, R_b\}, \text{Min}\{R_a, R_b\}[$. Supposons que pour tout $x$ de $]-\text{Min}\{R_a, R_b\}, \text{Min}\{R_a, R_b\}[$, $f(x) = g(x)$. Alors, d'après le théorème 12, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n.$$

Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = b_n$, alors $R_a = R_b$ et pour tout $x$ de $]-\text{Min}\{R_a, R_b\}, \text{Min}\{R_a, R_b\}[$, $f(x) = g(x)$.

---

Le théorème précédent permet d'**identifier les coefficients**.

**Théorème 15.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $R_a > 0$.

Pour $x \in ]-R_a, R_a[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors,

$f$ est paire $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$ et $f$ est impaire $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$.

**Démonstration.** Pour $x \in ]-R_a, R_a[$, $f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$. Par suite,

$$\begin{aligned}
f \text{ est paire} &\Leftrightarrow \forall x \in ]-R_a, R_a[,\ f(-x) = f(x) \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n a_n = a_n \text{ (par unicité des coefficients d'une série entière)} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (1 - (-1)^n)\, a_n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \times a_{2n} = 0 \text{ et } 2a_{2n+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f \text{ est paire} &\Leftrightarrow \forall x \in ]-R_a, R_a[,\ f(-x) = -f(x) \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n a_n = -a_n \text{ (par unicité des coefficients d'une série entière)} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (1 + (-1)^n)\, a_n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 2a_{2n} = 0 \text{ et } 0 \times a_{2n+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0.
\end{aligned}$$

---

**Commentaire.** On sait que toute fonction définie sur un intervalle ouvert centré en 0 est somme de manière unique d'une fonction paire et d'une fonction impaire (appelées respectivement partie paire et partie impaire de $f$). Si pour $x \in ]-R_a, R_a[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, la partie paire de $f$ est la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et la partie impaire de $f$ est la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$.

### *4) Intégration des séries entières*

**Théorème 16.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $R_a > 0$.

Pour $x \in ]-R_a, R_a[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors,

f admet des primitives sur $]-R_a, R_a[$. De plus, si F est une primitive de f sur $]-R_a, R_a[$, alors pour tout x de $]-R_a, R_a[$,

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

De plus, la série entière obtenue a pour rayon $R_a$.

**Démonstration.** f est continue sur $]-R_a, R_a[$ et donc f admet des primitives sur $]-R_a, R_a[$. Soit F une telle primitive.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = \begin{cases} F(0) \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{a_{n-1}}{n} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$. D'après les théorèmes 9 et 10, $R_a = R_b$ (pour $n \geqslant 1$, $a_{n-1} = nb_n$).

Pour $x \in ]-R_a, R_a[$, posons $g(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. La fonction g est définie et dérivable sur $]-R_a, R_a[$ et pour $x \in ]-R_a, R_a[$,

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x).$$

Donc, g est une primitive de f sur $]-R_a, R_a[$ et de plus, $g(0) = F(0)$. On en déduit que $g = F$.

---

**Exemple 1.** On sait que pour tout $x \in ]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. En remplaçant x par $-x$, on obtient

$$\forall x \in ]-1, 1[,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Pour $x \in ]-1, 1[$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ puis notons F la primitive de f sur $]-1, 1[$ qui s'annule en 0 : pour tout x de $]-1, 1[$, $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$. Par intégration, on obtient pour $x \in ]-1, 1[$

$$\ln(1+x) = F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

On a montré que

$$\forall x \in ]-1, 1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

**Exemple 2.** On sait que pour tout $x \in ]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Pour $x \in ]-1, 1[$, $-x^2 \in ]-1, 1[$ et

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Pour $x \in ]-1, 1[$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ puis notons F la primitive de f sur $]-1, 1[$ qui s'annule en 0 : pour tout x de $]-1, 1[$, $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}(x)$. Par intégration, on obtient pour $x \in ]-1, 1[$

$$\text{Arctan}(x) = F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On a montré que

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \mathrm{Arctan}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

## 5) *Opérations sur les séries entières*

### *a) Somme de deux séries entières*

**Théorème 17.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $R_a>0$ et $R_b>0$.

Alors, $R_{a+b}\geqslant \mathrm{Min}\{R_a,R_b\}$. De plus, si $R_a\neq R_b$, alors $R_{a+b}=\mathrm{Min}\{R_a,R_b\}$.

Enfin, pour $z\in D\left(0,\mathrm{Min}\{R_a,R_b\}\right)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n+b_n\right)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n.$$

**Démonstration.** Puisque $R_a>0$ et $R_b>0$, $\mathrm{Min}\{R_a,R_b\}>0$.
Soit $z\in D\left(0,\mathrm{Min}\{R_a,R_b\}\right)$. Alors, les séries numériques de termes généraux respectifs $a_nz^n$ et $b_nz^n$ convergent. On en déduit que la série numérique de terme général $\left(a_n+b_n\right)z^n$ converge (somme de deux séries numériques convergentes) et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n+b_n\right)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n.$$

Ceci montre déjà que $R_{a+b}\geqslant \mathrm{Min}\{R_a,R_b\}$.

Si de plus $R_a\neq R_b$, on peut supposer sans perte de généralité que $R_a<R_b$ et donc que $\mathrm{Min}\{R_a,R_b\}=R_a$. Si $z$ est un nombre complexe tel que $|z|\in\ ]R_a,R_b[$, on sait que la série numérique de terme général $a_nz^n$ diverge et que la série numérique de terme général $b_nz^n$ converge. On en déduit que la série numérique de terme général $\left(a_n+b_n\right)z^n$ diverge (dans le cas contraire, la série numérique de terme général $a_nz^n=\left(a_n+b_n\right)z^n-b_nz^n$ convergerait, ce qui n'est pas). On en déduit que $R_{a+b}\leqslant R_a=\mathrm{Min}\{R_a,R_b\}$ et finalement que $R_{a+b}=\mathrm{Min}\{R_a,R_b\}$.

---

**Commentaire.** On ne peut pas améliorer l'inégalité $R_{a+b}\geqslant \mathrm{Min}\{R_a,R_b\}$. Par exemple, si pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=1$ et $b_n=-1$, alors $R_a=R_b=1$ et $R_{a+b}=+\infty$.

### *b) Multiplication par un scalaire*

**Théorème 18.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$.

Alors, $R_{\lambda a}\geqslant R_a$. Plus précisément, $R_{\lambda a}=\left\{\begin{array}{l}R_a \text{ si } \lambda\neq 0\\ +\infty \text{ si } \lambda=0\end{array}\right.$.

Enfin, si $R_a>0$, alors pour pour $z\in D\left(0,R_a\right)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda a_nx^n=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$

**Démonstration.** Si $\lambda\neq 0$, $R_{\lambda a}=R_a$ d'après le théorème 4 et si $\lambda=0$, alors $\lambda a=0$ puis $R_{\lambda a}=+\infty$. Si de plus, $R_a>0$, pour $z\in D\left(0,R_a\right)$,, la série numérique de terme général $a_nz^n$ converge. On sait alors que, pour $z\in D\left(0,R_a\right)$, la série numérique de terme général $\lambda a_nz^n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda a_nz^n=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n.$$

---

Notons qu'en cumulant les théorèmes 17 et 18, on obtient

$$R_{\lambda a+\mu b}\geqslant \mathrm{Min}\{R_a,R_b\}.$$

*c) Produit (de Cauchy) de deux séries entières*

**Théorème 19.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $R_a > 0$ et $R_b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors, $R_c \geqslant \mathrm{Min}\{R_a, R_b\}$. De plus, pour $z \in D(0, \mathrm{Min}\{R_a, R_b\})$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

**Démonstration.** Soit $z \in D(0, \mathrm{Min}\{R_a, R_b\})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = a_n z^n$, $v_n = b_n z^n$ et

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = c_n z^n.$$

Puisque $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, on sait que les séries de terme généraux $u_n$ et $v_n$ sont absolument convergentes. On en déduit que la série de terme général $w_n$ converge (produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes) et que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

Ainsi, pour tout $z \in D(0, \mathrm{Min}\{R_a, R_b\})$, la série numérique de terme général $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ converge et donc $R_c \geqslant \mathrm{Min}\{R_a, R_b\}$. De plus, si $z \in D(0, \mathrm{Min}\{R_a, R_b\})$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

---

**Exercice 6.** Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$ puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$ pour $x \in ]-R, R[$.

**Solution 6.** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$. Pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 1$ et donc $R_a \leqslant 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \leqslant n$ et donc $R_a \leqslant 1$. Finalement, $R_a = 1$.

Pour $x \in ]-1, 1[$, posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = 1$ et $c_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{n} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$. Alors, $a_0 = b_0 c_0$ puis pour $n \geqslant 1$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

On sait que $R_b \geqslant 1$ et que pour $x \in ]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x} = g(x)$. On sait aussi que $R_c = 1$ et que pour $x \in ]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) = h(x)$ (exemple 1 page 12).

La série entière de somme $f$ est le produit de Cauchy des séries entières de sommes respectives $g$ et $h$ et donc, pour $x \in ]-1, 1[$,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)=g(x)h(x)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

# IV - Exponentielle d'un nombre complexe

## *1) Développement en série entière de l'exponentielle réelle et du cosinus et sinus réels*

**Théorème 20.**

Pour tout nombre réel $x$, les séries numériques de termes généraux respectifs $\dfrac{x^n}{n!}$, $(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos(x)\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin(x).$$

**Démonstration.** Les fonctions exponentielle, cosinus et sinus sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}$ donné, la formule de Taylor-Laplace à l'ordre $n$ fournit

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\ dt.$$

puis

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|=\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\ dt\right|.$$

Si $x\geqslant 0$, $\left|\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\ dt\right|=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\ dt\leqslant e^x\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt=\frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}=\frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}$.

Si $x\leqslant 0$, $\left|\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\ dt\right|=\displaystyle\int_x^0\frac{(t-x)^n}{n!}e^t\ dt\leqslant\int_x^0\frac{(t-x)^n}{n!}\ dt=\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant\frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}$.

Ainsi, pour tout réel $x$ et tout entier naturel $n$,

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

Cette dernière expression tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

• Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}$ donné, la formule de Taylor-Laplace à l'ordre $2n$ fournit

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(\cos)^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}(\cos)^{(2n+1)}(t)\ dt=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}-(-1)^n\int_0^x\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\sin(t)\ dt.$$

puis

$$\left|\cos(x)-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Cette dernière expression tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la série de terme général $(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos(x)$.

• Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}$ donné, la formule de Taylor-Laplace à l'ordre $2n+1$ fournit

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(\sin)^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}(\sin)^{(2n+2)}(t)\ dt=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}-(-1)^n\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(t)\ dt.$$

puis

$$\left|\sin(x)-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Cette dernière expression tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la série de terme général $(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin(x)$.

---

## *2) Définition et propriétés de l'exponentielle complexe*

**Théorème 21.** Pour tout nombre complexe $z$, la série numérique de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument.

**Démonstration.** D'après le théorème 20, si $a_n=\dfrac{1}{n!}$, alors $R_a=+\infty$ ce qui démontre le théorème 21. On peut constater directement que pour tout nombre complexe $z$ et tout entier naturel $n$,

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right|=\frac{|z|^n}{n!},$$

et utiliser le théorème 20.

---

DÉFINITION 4. Pour tout nombre complexe $z$, on pose

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

$\exp(z)$ est l'exponentielle du nombre complexe $z$.

**Théorème 22.** Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$,

$$\exp(z+z')=\exp(z)\times\exp(z').$$

**Démonstration.** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Les séries numériques de termes généraux respectifs $\dfrac{z^n}{n!}$ et $\dfrac{z'^n}{n!}$ sont absolument convergentes. Le produit de CAUCHY de ces deux séries converge et a pour somme $\exp(z)\times\exp(z')$. Le terme général de ce produit de CAUCHY est

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^kz'^{n-k}=\frac{(z+z')^n}{n!}.$$

On a montré que

$$\exp(z)\times\exp(z')=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z'^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+z')^n}{n!}=\exp\left(z+z'\right).$$

---

**Théorème 23.**

**1)** $\exp(0)=1$
**2)** Pour tout nombre complexe $z$, $\exp(z)\neq 0$ et

$$\frac{1}{\exp(z)}=\exp(-z).$$

**Démonstration.** $\exp(0)=1+0+0+\ldots=1$ puis pour $z\in\mathbb{C}$,

$$\exp(z)\times\exp(-z)=\exp(z-z)=\exp(0)=1.$$

Donc, $\exp(z)\neq 0$ et $\dfrac{1}{\exp(z)}=\exp(-z)$.

On fait maintenant le lien avec la définition de l'exponentielle d'un nombre complexe donnée en Maths sup. On rappelle que si $x$ et $y$ sont deux réels puis $z = x + iy$, on avait posé $e^z = e^x e^{iy}$.

**Théorème 24.**

**1)** Pour tout réel $x$, $\exp(x) = e^x$.
**2)** Pour tout réel $y$, $\exp(iy) = e^{iy}$.
**2)** Pour tous réels $x$ et $y$, $\exp(x + iy) = e^x e^{iy}$.

**Démonstration.** **1)** C'est le théorème 20.

**2)** Soit $y$ un réel.

$$\begin{aligned}\exp(iy) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \text{ (par définition)}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2p+1}}{(2p+1)!} \text{ (somme de deux séries convergentes)}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}\\ &= \cos(y) + i\sin(y) \text{ (d'après le théorème 20)}\\ &= e^{iy}.\end{aligned}$$

**3)** Soient $x$ et $y$ deux réels.

$$\exp(x + iy) = \exp(x) \times \exp(iy) = e^x e^{iy}.$$

Ainsi, dorénavant, on pourra écrire $e^z = \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

**Théorème 25.** Pour tout nombre complexe $z$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) = \mathrm{Im}(z)$ $[2\pi]$.

**Démonstration.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels. On sait que $e^z \neq 0$ et que $e^z = e^x e^{iy}$ avec $e^x > 0$. Donc, $|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) = y = \mathrm{Im}(z)$ $[2\pi]$.

On s'intéresse maintenant à la subjectivité et à l'injectivité de l'exponentielle complexe. On sait déjà que l'application $\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & e^z \end{array}$ n'est pas surjective car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.

**Théorème 26.** Soit $Z$ un nombre complexe non nul. Pour tout nombre complexe $z$,

$$e^z = Z \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ z = \ln(|Z|) + i(\arg(Z) + 2k\pi).$$

En particulier, la fonction $\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ & z & \mapsto & e^z \end{array}$ est surjective.

**Démonstration.** Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels.

$$\begin{aligned}e^z = Z &\Leftrightarrow e^x e^{iy} = |Z| e^{i\arg(Z)}\\ &\Leftrightarrow e^x = |Z| \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/\ y = \arg(Z) + 2k\pi \text{ (égalité de deux complexes non nuls sous forme trigonométrique)}\\ &\Leftrightarrow x = \ln(|Z|) \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/\ y = \arg(Z) + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ z = \ln(|Z|) + i(\arg(Z) + 2k\pi).\end{aligned}$$

**Théorème 27.** Pour tout nombre complexe $z$ et $z'$,

$$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z' \in z + 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ z' = z + 2ik\pi.$$

**Commentaire.** L'exponentielle complexe n'est donc pas injective. Par exemple, $e^0 = 1 = e^{2i\pi}$ avec $2i\pi \neq 0$.

**Démonstration.** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes. D'après le théorème précédent,

$$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow e^{z'-z} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ z' - z = 2ik\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ z' = z + 2ik\pi.$$

---

### *3) Sinus, cosinus, sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique d'un nombre complexe*

Définition 5. Pour tout nombre complexe $z$, on pose

- $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$,
- $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
- $\text{ch}(z) = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$,
- $\text{sh}(z) = \dfrac{e^{z} - e^{z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

On peut démontrer que les formules de trigonométrie usuelles continuent d'être vérifiées. Par exemple,

$$\begin{aligned}\cos^2(z) + \sin^2(z) &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{iz} + 2 + e^{-iz}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{iz} - 2 + e^{-iz}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) &= \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)\left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) - \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2e^{i(a+b)} + 2e^{-i(a+b)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}\right)\\ &= \cos(a+b).\end{aligned}$$

On peut aussi noter le lien entre les fonctions de la trigonométrie circulaire et les fonctions de la trigonométrie hyperbolique :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \cos(z) = \text{ch}(iz),\ \sin(z) = \frac{1}{i}\text{sh}(iz), \text{ch}(z) = \cos(iz),\ \text{sh}(z) = \frac{1}{i}\sin(iz).$$

**Exercice 7.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\sin(z) = 3$.

**Solution 7.** Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\sin(z) = 3 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 6i\\ &\Leftrightarrow e^{2iz} - 6ie^{iz} - 1 = 0 \text{ (car } e^{iz} \neq 0)\\ &\Leftrightarrow e^{iz} \text{ est solution de } Z^2 - 6iZ - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow e^{iz} \in \left\{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)i, \left(3 - 2\sqrt{2}\right)i\right\}\\ &\Leftrightarrow \left(\left|e^{iz}\right| = \left|\left(3 + 2\sqrt{2}\right)i\right| \text{ et } \arg\left(e^{iz}\right) = \arg\left(\left(3 + 2\sqrt{2}\right)i\right)\ [2\pi]\right) \text{ ou}\\ &\quad\left(\left|e^{iz}\right| = \left|\left(3 - 2\sqrt{2}\right)i\right| \text{ et } \arg\left(e^{iz}\right) = \arg\left(\left(3 - 2\sqrt{2}\right)i\right)\ [2\pi]\right).\end{aligned}$$

Par suite, en posant $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels,

$$
\begin{aligned}
\sin(z)=3 &\Leftrightarrow \left(e^{\mathrm{Re}(iz)}=3+2\sqrt{2} \text{ et } \mathrm{Im}(iz)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right) \text{ ou } \left(e^{\mathrm{Re}(iz)}=3-2\sqrt{2} \text{ et } \mathrm{Im}(iz)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right)\\
&\Leftrightarrow \left(e^{-y}=3+2\sqrt{2} \text{ et } x=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right) \text{ ou } \left(e^{-y}=3-2\sqrt{2} \text{ et } x=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right)\\
&\Leftrightarrow \left(y=-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) \text{ et } \exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \text{ ou } \left(y=-\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) \text{ et } \exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\\
&\Leftrightarrow \left(y=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) \text{ et } \exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \text{ ou } \left(y=-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) \text{ et } \exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\\
&\text{(car } \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)=1)\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ z=\frac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\ln\left(3+2\sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

# V - Fonctions développables en séries entières

Au fur et à mesure du chapitre, nous avons rencontré des fonctions usuelles qui étaient somme d'une série entière sur un certain intervalle de centre $0$. Par exemple, la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et coïncide sur $]-1,1[$ avec la fonction $g : \begin{array}{rcl} ]-1,1[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \end{array}$. C'est cette situation que nous allons étudier de manière générale.

## *1) Développements usuels*

**Théorème 28 (formulaire).**

- Pour tout réel $x$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- Pour tout réel $x$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- Pour tout réel $x$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- Pour tout réel $x$, $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- Pour tout réel $x$, $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- Pour tout réel $x \in ]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
- Pour tout réel $x \in ]-1,1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.
- Pour tout réel $x \in ]-1,1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.
- Pour tout réel $x \in ]-1,1[$, $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
- Pour tout réel $x \in ]-1,1[$, $\mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
- Pour tout réel $x \in ]-1,1[$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=p-1}^{+\infty} \binom{n}{p-1} x^{n-(p-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} x^n.$$
- Pour tout réel $x \in ]-1,1[$ et tout réel $\alpha$, $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

où $\dbinom{\alpha}{0} = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}^{n \text{ facteurs}}}{n!}$.

**Démonstration.** • Le premier bloc de formules a été établi dans le paragraphe précédent. Les formules donnant ch et sh peuvent aussi être établies en constatant que ch et sh sont les parties paire et impaire de l'exponentielle respectivement (voir théorème 15 et le commentaire qui suit). De même, cos et sin sont respectivement les parties paire et impaire de la fonction $x \mapsto e^{ix}$.

• Les égalités $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $\mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, valables pour tout $x \in ]-1,1[$ ont été analysées dans les exemples suivant le théorème 16.

• Montrons que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^p}=\displaystyle\sum_{n=p-1}^{+\infty}\binom{n}{p-1}x^{n-(p-1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}x^n$. On rappelle que pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. La fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ est $p-1$ fois dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x\in]-1,1[$,

$$f^{(p)}(x)=\frac{(-(-1))(-(-2))\ldots(-(-(p-1)))}{(1-x)^p}=\frac{(p-1)!}{(1-x)^p}.$$

D'après le théorème 12, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\frac{(p-1)!}{(1-x)^p}=\sum_{n=p-1}^{+\infty}\frac{n!}{(n-(p-1))!}x^{n-(p-1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+p-1)!}{n!}x^n,$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^p}&=\sum_{n=p-1}^{+\infty}\frac{n!}{(n-(p-1))!(p-1)!}x^{n-(p-1)}=\sum_{n=p-1}^{+\infty}\binom{n}{p-1}x^{n-(p-1)}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}x^n.\end{aligned}$$

• Montrons que $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$. La méthode utilisée ici (méthode de l'équation différentielle) est de portée générale et sera utilisée dans de nombreuses situations en pratique.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour $x\in]-1,1[$, posons $f(x)=(1+x)^\alpha$. $f$ est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ puis $(1+x)f'(x)-\alpha f(x)=0$.

Donc, $f$ est solution du problème de Cauchy : $\begin{cases}\forall x\in]-1,1[,\ (1+x)f'(x)-\alpha f(x)=0 \quad (E)\\ f(0)=1\end{cases}$ $(\mathscr{P})$. Puisque la fonction $x\mapsto-\dfrac{\alpha}{1+x}$ est continue sur $]-1,1[$, on sait que $f$ est l'unique solution du problème $(\mathscr{P})$.

Soit $\sum a_nx^n$ une série entière dont le rayon $R_a$ **est supposé à priori strictement positif**. Pour $x\in]-R_a,R_a[$, posons $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Sous l'hypothèse $R_a>0$, pour tout $x\in]-R_a,R_a[$,

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x)-\alpha g(x)&=(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(n-\alpha)a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n-\alpha)a_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}+(n-\alpha)a_n\right)x^n.\end{aligned}$$

Ensuite, toujours sous l'hypothèse $R_a>0$, par unicité des coefficients d'une série entière,

$$\begin{aligned}g(0)=1\text{ et }\forall x\in]-R_a,R_a[,\ (1+x)g'(x)-\alpha g(x)=0&\Leftrightarrow a_0=1\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1}+(n-\alpha)a_n=0\\&\Leftrightarrow a_0=1\text{ et }\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{\alpha-(n-1)}{n}a_{n-1}\\&\Leftrightarrow a_0=1\text{ et }\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{\alpha-(n-1)}{n}\times\frac{\alpha-(n-2)}{n-1}\times\ldots\times\frac{\alpha}{1}a_0\\&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\binom{\alpha}{n}.\end{aligned}$$

Déterminons alors $R_a$. Si $\alpha$ est un entier naturel, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang $\alpha+1$. Dans ce cas, $R_a = +\infty$. Notons que la formule $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}x^n$, valable pour tout réel $x$ (quand $\alpha$ est un entier naturel), est déjà connue en maths sup : c'est la formule du binôme de NEWTON.

On suppose dorénavant $\alpha \notin \mathbb{N}$. Dans ce cas, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et pour $n \geqslant \alpha+1$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-2))}\right|\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|\alpha-(n-1)|}{n+1} = \frac{n-\alpha-1}{n+1}.$$

Cette expression tend vers 1 quand $n$ tend vers $+\infty$ et d'après la règle de d'ALEMBERT, $R_a = 1$. En particulier, $R_a > 0$. Ceci valide tous les calculs précédentes sur $]-1,1[$ : $g$ est définie sur $]-1,1[$, dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in ]-1,1[$, $(1+x)g'(x)-\alpha g(x) = 0$. Puisque d'autre part, $g(0) = 1$, $g$ est solution du problème $(\mathscr{P})$. Par unicité d'une telle solution, $g = f$ et donc

$$\forall x \in ]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

---

**Commentaire.** Un certain nombre de fonctions usuelles semblent avoir été oubliées comme par exemple les fonctions $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \operatorname{th} x$ et la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.
En ce qui concerne les fonctions $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \operatorname{th} x$, on peut démontrer que ces fonctions sont sommes d'une série entière sur $]-1,1[$. Donner un développement explicite nécessite une certaine connaissance des nombres de BERNOULLI. Ces résultats peuvent faire l'objet d'un problème complet.
En ce qui concerne la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$, son développement fera l'objet d'un exercice ultérieurement.

**Exercice 8.** Calculer les sommes suivantes en précissant leur rayon de convergence :

**1)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{n!}$.

**2)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.

**Solution 8.**

**1)** Pour tout réel $x$, $\operatorname{ch}(x)+\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1+(-1)^n)\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$. En particulier, pour tout réel $x$, la série numérique de terme général $\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ converge et donc le rayon de convergence de la série entière proposée est $+\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x)+\cos(x)).$$

**2)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x \geqslant 0$, $\operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$. En particulier, le rayon de convergence de la série entière proposée est $+\infty$.

• Si $x < 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(-x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-x}\right)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = \left\{\begin{array}{l}\cos\left(\sqrt{-x}\right)\ \text{si } x<0\\ \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right)\ \text{si } x\geqslant 0\end{array}\right. .$$

---

## *2) Fonctions développables en série entière (en 0)*

DÉFINITION 6. Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ contenant $0$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que $f$ est **développable en série entière** (en $0$) si et seulement si il existe une suite de réels ou de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rayon $R_a > 0$ et un réel $r \in ]0, R_a]$ tel que

$$\forall x \in ]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Si pour tout $x$ d'un intervalle $I$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on dit que $f$ est développable en série entière sur $I$.

**Notation.** Quand une fonction $f$ est développable en série entière, on écrit : $f$ est DSE ou $f$ est DSE$(0)$ ou $f \in$ DSE$(0)$ ...

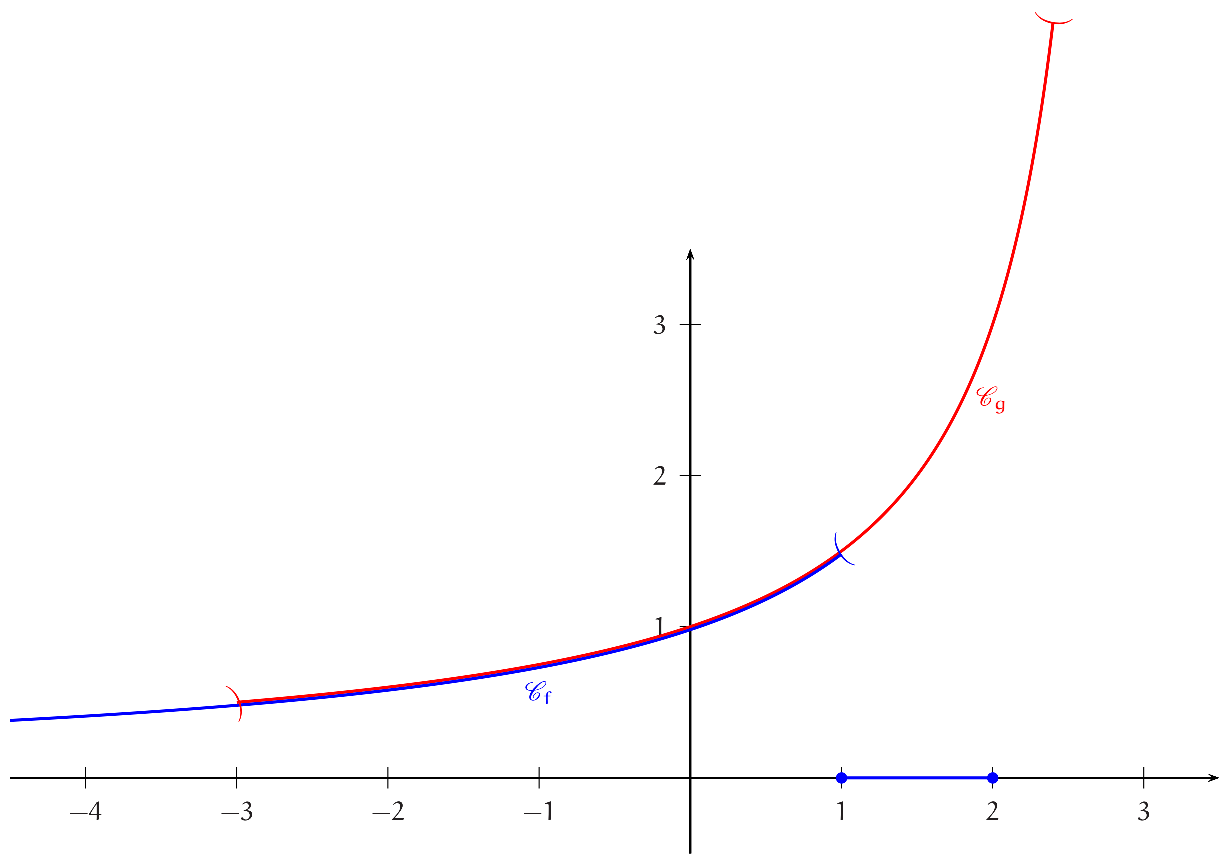
**Commentaire 1.** Une fonction développable en série entière en $0$ est donc une fonction qui, sur un certain intervalle ouvert de centre $0$, coïncide avec la somme d'une série entière. Il s'agit de bien comprendre que deux objets sont en cause : une fonction $f$ et la somme d'une série entière $g$. La fonction peut être définie sur un domaine non symétrique par rapport à $0$ et peut coïncider avec la somme de la série entière sur un intervalle non symétrique par rapport à $0$.

Considérons par exemple, la fonction $f$ définie sur $]-\infty, 2]$ par $f(x) = \dfrac{3}{3-x} = \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}$ si $x < 1$ et $f(x) = 0$ si $x \in [1, 2]$.

D'autre part, Pour $x \in ]-3, 3[$, posons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{3^n}$. Pour tout $x \in ]-3, 3[$, $g(x) = \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}$ et donc,

$$\forall x \in ]-3, 1[,\ f(x) = g(x).$$

Ainsi, $f$ est définie sur un domaine non centré en $0$, il existe des réels $x$ pour lesquels $f(x)$ existe et $g(x)$ n'existe pas et il existe des réels $x$ pour lesquels $g(x)$ existe et $f(x)$ n'existe pas et enfin $f$ et $g$ coïncident sur l'intervalle $]-3, 1[$ qui n'est pas centré en $0$. Mais, on peut trouver un intervalle ouvert non vide de centre $0$ sur lequel $f$ et $g$ sont définies et coïncident à savoir l'intervalle $]-1, 1[$. La fonction $f$ est donc développable en série entière en $0$ (sur $]-1, 1[$ et même sur $]-3, 1[$).




**Commentaire 2.** Dans la définition 6, on parle de « fonction développable en série entière en $0$ » car de manière générale, on peut définir la notion de « fonction développable en série entière en $x_0$ » mais ceci n'est pas au programme de maths spé.

### *3) Propriétés des fonctions développables en série entière*

*a) Caractère $C^\infty$ d'une fonction développable en série entière*

**Théorème 29.** Soit $f$ une fonction développable en série entière sur un intervalle ouvert $I$ contenant $0$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, $f$ est de classe $C^\infty$ sur $I$.

De plus,

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

**Démonstration.** Posons $I = ]\alpha, \beta[$ avec $\alpha < 0 < \beta$. Par hypothèse, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x$ de $I$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En particulier, pour tout $x$ de $I$, la série numérique de terme général $a_n x^n$ converge. On en déduit que $R_a \geqslant \text{Max}\{-\alpha, \beta\}$ puis que $I \subset ]-R_a, R_a[$. On sait que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie et de classe $C^\infty$ sur $]-R_a, R_a[$ (au moins). Puisque $f$ coïncide avec cette fonction sur $I$, $f$ est de classe $C^\infty$ sur $I$. Enfin, le théorème 13 fournit

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

---

Ainsi, une fonction développable en série entière sur $I$ est en particulier de classe $C^\infty$ sur $I$. La réciproque de ce résultat est fausse. On va construire un exemple de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais non développable en série entière.

**Exercice 9.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \left\{\begin{array}{l} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.$.

**1)** Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Préciser $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**2)** Montrer que $f$ n'est pas développable en série entière.

**Solution 9.**

**1)** • La fonction $g\ :\ x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $h\ :\ x \mapsto e^x$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $f = h \circ g$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fraction rationnelle $R_n$ telle que

$$\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = R_n(x) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\mathscr{P}_n).$$

- Le résultat est vrai quand $n = 0$ avec $R_0 = 1$.
-Soit $n \geqslant 0$. Supposons $(\mathscr{P}_n)$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= \left(R_n e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'(x) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= R_n'(x) e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2R_n(x)}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= R_{n+1}(x) e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

avec $R_{n+1} = R_n' + \frac{2}{X^3} R_n \in \mathbb{R}(X)$.

Le résultat est démontré par récurrence.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f$ est de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$.

- On sait déjà que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0 = f(0).$$

Donc, $f$ est continue en $0$ et finalement $f$ est de classe $C^0$ sur $\mathbb{R}$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons $f$ de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$. $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n+1)}(x) = R_{n+1}(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$. D'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f^{(n)}(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} R_{n+1}(x)e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{X \to -\infty} R_{n+1}\left(\pm 1/\sqrt{-X}\right)e^X = 0.$$

En résumé, $f$ est de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$, de classe $C^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f^{(n+1)}$ a une limite réelle quand $x$ tend vers $0$ à savoir $0$. D'après un théorème classique d'analyse, $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f$ est de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$ et donc $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f^{(n)}(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} R_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

**2)** Supposons par l'absurde que $f$ soit développable en série entière. Alors, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in ]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0.$$

Ceci est faux car pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$ et donc $f$ n'est pas développable en série entière.

---

DÉFINITION 7. Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty$ sur un voisinage de $0$.

La **série de TAYLOR** de $f$ est la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Un résultat immédiat est

**Théorème 30.** Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty$ sur un voisinage de $0$.

$f$ est développable en série entière si et seulement si sa série de TAYLOR a un rayon de convergence strictement positif et $f$ coïncide avec la somme de sa série de TAYLOR sur un certain intervalle ouvert non vide de centre $0$.

**Commentaire.** Dans l'exercice 8, la série de TAYLOR de $f$ a un rayon de convergence infini mais $f$ ne coïncide pas avec la somme de cette série sur un intervalle de la forme $]-r, r[$, $r > 0$, quelque soit le réel $r$.

***b) Développements en série entière et opérations***

**Théorème 31.** Soient $f$ et $g$ deux fonction définies sur un voisinage de $0$. Si $f$ et $g$ sont développables en série entière alors toute combinaison linéaire de $f$ et $g$ est développable en série entière.

**Démonstration.** Conséquence immédiate des théorèmes 17 et 18.

---

**Théorème 32.** Soient $f$ et $g$ deux fonction définies sur un voisinage de $0$. Si $f$ et $g$ sont développables en série entière alors $f \times g$ est développable en série entière.

**Démonstration.** Conséquence immédiate du théorème 19.

---

**Commentaire.** Aucun théorème n'est fourni pour un quotient de fonctions développables en série entière, un inverse une réciproque ou une composée de fonctions développables en série entière.

***c) Développements en série entière et dérivation ou intégration***

**Théorème 33.** Soit $f$ une fonction développable en série entière. Alors la dérivée de $f$ et toute primitive de $f$ sont développables en série entière.

**Démonstration.** Conséquence immédiate des théorèmes 11 et 16.

---

**Exercice 10.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et déterminer son développement.

**Solution 10.** Pour tout réel $u \in ]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} u^n.$$

Soit $x \in ]-1,1[$. Le réel $u = -x^2$ est dans $]-1,1[$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}.$$

Par suite, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ puis la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ en tant que primitive d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.

$(-1)^0 \dbinom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$ et pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}^{n \text{ facteurs}}}{n!} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+(n-1)\right)}{n!} = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}{2^n n!} \\
&= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2} = \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{\left((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2\right)^2} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^{2n}.$$

En tenant compte de $\text{Arcsin}(0) = 0$, on obtient par intégration

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

## *4) Développements en série entière des fractions rationnelles*

On décrit ici des techniques de développement sans énoncer de résultat général, non prévu par le programme officiel.

Donnons d'abord le développement d'un élément simple de première espèce de pôle complexe. Pour tout nombre complexe $z$ tel que $|z| < 1$, on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Donc, si $a$ est un nombre complexe **non nul** donné, pour tout nombre complexe $z$ tel que $|z| < |a|$,

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^n}.$$

**Exercice 11.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ est développable en série entière et déterminer son développement.

**Solution 11.** Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$,

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{}{x-1}.$$

Puis, pour $x \in ]-1, 1[$ de sorte que $|x| < 1$ et $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-3x+2} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in ]-1, 1[, \ \frac{1}{x^2-3x+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

---

Si la variable est réelle, on obtient un développement de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ en dérivant le développement de $\dfrac{1}{1-x}$ (voir le formulaire donner dans le théorème 28) : pour $x \in ]-1, 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

Si la variable est complexe, on peut obtenir le développement de $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ en effectuant un produit de CAUCHY : pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.\end{aligned}$$

**Exercice 12.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$ est développable en série entière et déterminer son développement.

**Solution 12.** Il existe trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$,

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-2}.$$

- $b = \lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2 f(x) = \dfrac{1}{1-2} = -1.$
- $c = \lim\limits_{x \to 2}(x-2)f(x) = \dfrac{1}{(2-1)^1} = 1.$
- $a + c = \lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 0$ et donc $a = -c = 1$.

Par suite, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$,

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Puis, pour $x \in ]-1, 1[$ de sorte que $|x| < 1$ et $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$,

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n+2+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n+2+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

---

**Commentaire.** On peut démontrer que toute fraction rationnelle n'admettant pas $0$ pour pôle est développable en série entière et que le rayon de la série obtenue est le minimum des modules des pôles de la fraction.