

Suites et séries d'intégrales

Plan du chapitre

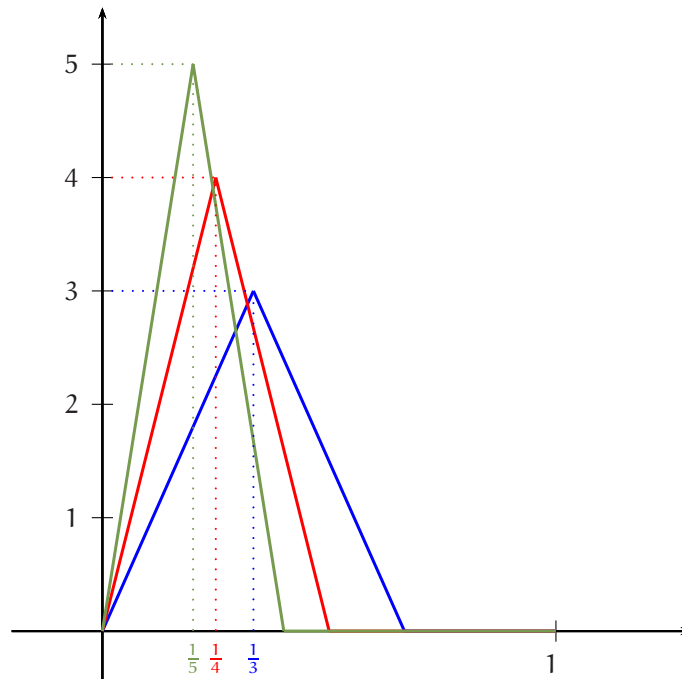
I - Suites d'intégrales	page 3
II - Séries d'intégrales	page 5

Nous allons fournir dans ce chapitre un certain nombre de théorèmes dont la conclusion est à chaque fois

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n(x) \, dx \right) = \int_I \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) \, dx.$$

Commençons par rappeler que cette égalité n'a rien d'automatique et peut être fausse. Le contre-exemple usuel de cours

est le suivant : pour $n \geq 2$ et $x \in [0, 1]$, posons $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ -n^2 \left(x - \frac{2}{n}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases} .$



Pour tout entier naturel non nul n , $\int_0^1 f_n(x) \, dx$ est l'aire d'un triangle de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur n . Donc, pour tout entier

naturel non nul n , $\int_0^1 f_n(x) \, dx = 1$ et la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) \, dx \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Mais, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ car pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$ puis

$f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et si $x_0 \in]0, 1]$, pour $n \geq \frac{2}{x_0}$, $f_n(x_0) = 0$ et de nouveau $f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc, $\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) \, dx = 0$.

Ainsi, ici, nous sommes dans la situation où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n(x) \, dx \right) \neq \int_I \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) \, dx.$$

I - Suites d'intégrales

Commençons par rappeler un théorème énoncé et démontré dans le chapitre « Suites et séries de fonctions ».

Théorème 1.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur un **segment** $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f .

Alors,

- la fonction f est continue sur $[a, b]$;
- la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b f(x) dx$ ou encore, plus explicitement
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Commentaire. On rappelle aussi que ce théorème s'avère être de portée assez réduite car des exemples comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n dx = 0 \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0 \text{ échappent à ce théorème.}$$

• Pour $x \in [0, 1]$, posons $f_n(x) = x^n$. Pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[\end{cases} = f(x)$ et puisque la fonction f n'est pas continue sur $[0, 1]$ alors que chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}$, l'est, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f mais ne converge pas uniformément vers la fonction f sur ce segment. On ne peut donc pas appliquer le théorème 1. Par contre, la limite de la suite d'intégrales se calcule directement.

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

• Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(x) = \sin^n x$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} = f(x)$. De nouveau, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f mais ne converge pas uniformément vers la fonction f sur ce segment. On ne peut toujours pas appliquer le théorème 1. Montrer directement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0$ est un peu plus délicat :

Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2-a} \sin^n x dx + \int_{\pi/2-a}^{\pi/2} \sin^n x dx \leq \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - a\right) + a \times 1 \leq \frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - a\right) + a.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $a = \text{Min} \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{4} \right\}$ de sorte que $\frac{\pi}{2} - a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $a \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \leq \frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $0 < \sin \left(\frac{\pi}{2} - a\right) < 1$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 0$ et donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $\frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq n_0$, on a alors $0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \leq \varepsilon \right)$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0$. \square

Le théorème 1 utilise la convergence **uniforme** sur un **segment**. Si on n'est plus sur un segment (par exemple, pour $I_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^n}} dt$ où l'intervalle d'intégration est $[0, 1[$ ou bien, pour $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ où l'intervalle d'intégration est $[0, +\infty[$) ou si on n'a plus la convergence uniforme, le théorème 1 ne sert plus à rien. On dispose alors du théorème suivant, appelé « théorème de convergence dominée », et qui est admis dans le cadre du programme officiel de maths spé.

Théorème 2. (théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose que

- la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f ;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination) ;

Alors,

- chaque fonction f_n est intégrable sur I ;
- la suite numérique $\left(\int_I f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;
- la fonction f est intégrable sur I ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n(x) dx \right) = \int_I f(x) dx$ ou encore, plus explicitement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n(x) dx \right) = \int_I \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Commentaire. Le théorème précédent est valable sur un intervalle quelconque, intervalle qui a donc le droit d'être un segment ou pas. Dans ce théorème, on doit d'abord noter que l'hypothèse de convergence uniforme a disparu. Une conséquence est que, bien que les fonctions f_n soient supposées continues sur l'intervalle I , la fonction limite f n'a plus aucune raison d'être continue par morceaux sur I . On doit donc vérifier que f est continue par morceaux sur I ce qui suppose la plupart du temps que l'on connaît explicitement la fonction f .

L'hypothèse de convergence uniforme est remplacée par une autre hypothèse, l'« hypothèse de domination ». Il s'agit de fournir une fonction φ (continue par morceaux et intégrable sur I) majorant toutes les fonctions f_n . Ceci signifie que l'on doit majorer chaque $|f_n(x)|$ par une expression **dépendante de x et indépendante de n** et qui soit une fonction de x intégrable sur I . \square

Exemple 1. Revenons aux intégrales de WALLIS : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(x) = \sin^n x$.

Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers

la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ où de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Enfin, pour tout entier naturel n et tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(x)| \leq 1 = \varphi(x)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \int_0^{\pi/2} f(x) dx = 0.$$

Exemple 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, +\infty[$, posons $f_n(t) = \frac{1}{(t^2 + 1)^n}$ de sorte

que $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $[0, +\infty[$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ où de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Enfin, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car positive et équivalente à $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. \square

Exercice 1. (un calcul de l'intégrale de GAUSS : $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$)

Dans cet exercice, on suppose acquis un résultat classique sur les intégrales de WALLIS : si $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, alors

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

1) Justifier l'existence de I.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n[\\ 0 & \text{si } x \in [n, +\infty[\end{cases}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, +\infty[$, $f_n(x) \leq e^{-x}$.

3) En déduire que $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) dx$.

4) A l'aide du résultat sur les intégrales de WALLIS, en déduire la valeur de I.

Solution 1.

1) La fonction $g : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{x^2}$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ puis que I existe.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $x \in [0, +\infty[$.

• si $x \in [n, +\infty[$, $f_n(x) = 0 \leq e^{-x}$.

• si $x \in [0, n[$, alors $\frac{x}{n} \in [0, 1[$. On sait que pour $t \in [0, 1[$, $\ln(1-t) \leq -t$ (inégalité de convexité) et donc

$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$ puis $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -x$ et enfin, $f_n(x) = e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \leq e^{-x}$ par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} .

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) \leq e^{-x}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, posons $g_n(x) = f_n(x^2) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}[\\ 0 & \text{si } x \in [\sqrt{n}, +\infty[\end{cases}$.

• chaque fonction g_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

• soit $x \in [0, +\infty[$. Pour $n > x^2$, $g_n(x) = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}$ et donc

$$g_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n \left(-\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x^2 + o(1)}.$$

Donc, la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction g sur $[0, +\infty[$ et de plus, la fonction g est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

• Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$, $g_n(x) = f_n(x^2) \leq e^{-x^2} = \varphi(x)$ (d'après la question précédente) où $\varphi = g$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'après 1)).

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^{+\infty} g_n(x) dx\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$I = \int_0^{+\infty} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = \sqrt{n} \cos t$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t)^n (-\sqrt{n} \sin t) dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = \sqrt{n} W_{2n+1}.$$

Par suite,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On a montré que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

II - Séries d'intégrales

On rappelle aussi le théorème d'intégration terme à terme sur un segment qui n'est qu'une traduction du théorème 1 sur les suites de fonctions en terme de séries.

Théorème 3. (théorème d'intégration terme à terme sur un segment)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un **segment** $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f .

Alors,

- la fonction f est continue sur $[a, b]$;
- la série numérique de terme général $\int_a^b f_n(x) dx$ converge ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b f(x) dx$ ou encore, plus explicitement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Exercice 2.

1) Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x \cos t} dt$ en posant $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$.

Solution 2.

1) Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|x \cos t| \leq |x| < 1$ et en particulier, $1 - x \cos t \neq 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1 - x \cos t}$ est donc continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{1}{1 - x \cos t}$ est donc intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ de sorte que $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $dt = \frac{2du}{1+u^2}$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x \cos t} dt &= \int_0^1 \frac{1}{1-x \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2}{(1+x)u^2 + (1-x)} du \\ &= \frac{2}{1+x} \int_0^1 \frac{2}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right)^2} du = \frac{2}{1+x} \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{u}{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right). \end{aligned}$$

2) Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(t) = (x \cos t)^n$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|x \cos t| \leq |x| < 1$ et donc la série numérique de terme général $f_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (x \cos t)^n = \frac{1}{1 - x \cos t}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(t)| = |x|^n |\sin t|^n \leq |x|^n$ où $|x|^n$ est le terme général d'une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f .

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

- la fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
- la série numérique de terme général $\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = W_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x \cos t} dt = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right). \end{aligned}$$

Comme pour les suites de fonctions, si on n'est plus sur un segment, la convergence uniforme ne sert plus à rien. On dispose alors du théorème suivant, très utilisé dans la pratique. Ce théorème est admis dans le cadre du programme officiel de maths spé.

Théorème 4. (théorème d'intégration terme à terme)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose que

- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction f ;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(x)| dx < +\infty$;

Alors,

- la fonction f est intégrable sur I ;
- la série numérique de terme général $\int_I f_n(x) dx$ converge ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(x) dx \right) = \int_I f(x) dx$ ou encore, plus explicitement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(x) dx \right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Exercice 3.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

(Dans cet exercice, on supposera connu le résultat classique : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$).

Solution 3.

- Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$. f est continue sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$. Alors $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x(1 - e^{-x})} = x^2 e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, posons $f_n(x) = x^2 e^{-(n+1)x}$. Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $]0, +\infty[$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $t = (n+1)x$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n+1}\right)^2 e^{-t} \frac{dt}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{\Gamma(2)}{(n+1)^3} = \frac{2}{(n+1)^3}. \end{aligned}$$

Puisque $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^3} > 0$, la série de terme général I_n converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx &= \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Sinon, on dispose aussi du théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions. Dans la pratique, il est peu utilisé (contrairement au cas des suites de fonctions) et c'est le théorème 4 qui est l'outil principal dans la plupart des cas.

Théorème 5. (théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose que

- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction f ;
 - la fonction f est continue par morceaux sur I ;
 - il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^n f_k \right| \leq \varphi$
- (hypothèse de domination);

Alors,

- chaque fonction f_n est intégrable sur I ;
- la série numérique de terme général $\int_I f_n(x) dx, n \in \mathbb{N}$, converge;
- la fonction f est intégrable sur I ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$.