Intégration sur un intervalle quelconque

I - Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

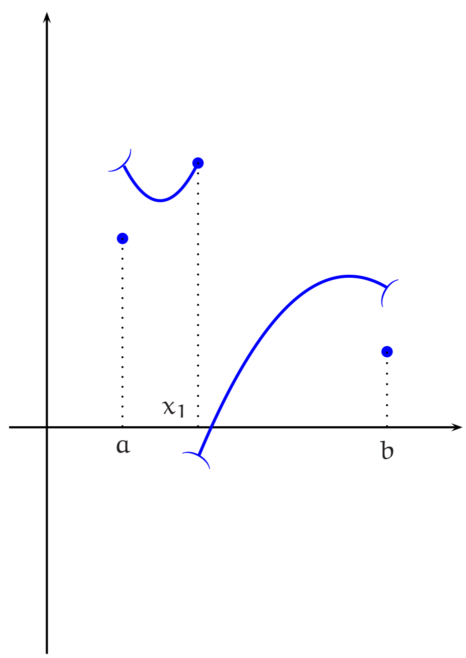
Rappelons la définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un segment de $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que f est **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}^*$, telle que

1) $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{/]x_k, x_{k+1}[}$ est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$;
2) $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{/]x_k, x_{k+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$.

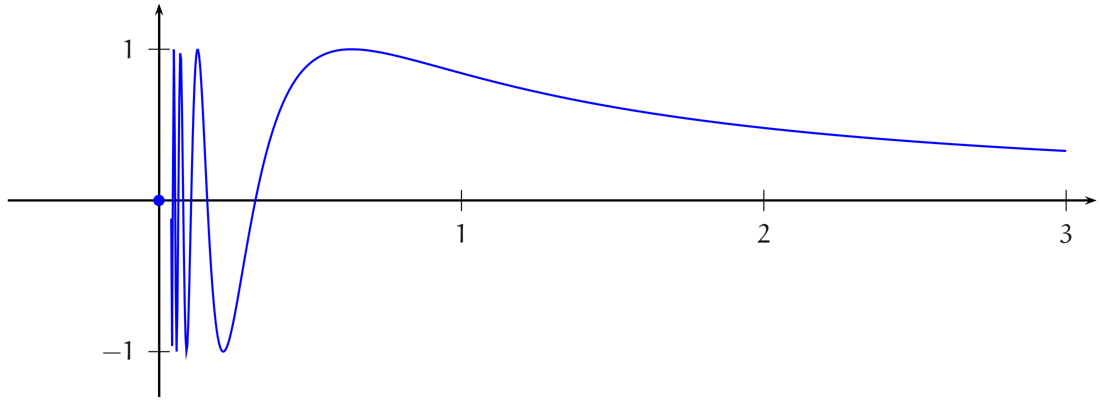
Commentaire 1. Dans la définition ci-dessus, la subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas unique. Par exemple, on peut découper l'intervalle $[x_0, x_1]$ en $\left[x_0, \dfrac{x_0 + x_1}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{x_0 + x_1}{2}, x_1\right]$ et on obtient une nouvelle subdivision de $[a, b]$ vérifiant aussi les propriétés 1) et 2). Toute subdivision vérifiant les propriétés 1) et 2) est appelée **subdivision associée** à la fonction continue par morceaux f.

Commentaire 2. Dans la définition précédente, chaque restriction se prolonge en une fonction continue sur un segment mais pas f. f est déjà définie en x_k et n'a pas à être prolongée. La définition signifie que la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ a une limite réelle (ou complexe) en x_k à droite et en x_{k+1} à gauche.

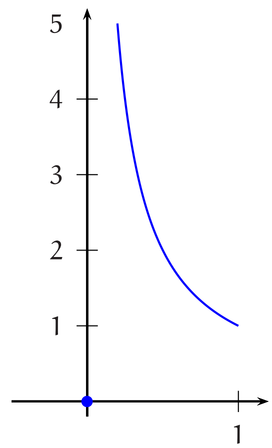


Commentaire 3. La seule condition : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{/]x_k, x_{k+1}[}$ est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$, ne suffit pas à faire d'une fonction une fonction continue par morceaux. Il faut encore que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{/]x_k, x_{k+1}[}$ ait une limite réelle (ou complexe) en x_k à droite et x_{k+1} à gauche.

La fonction $x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \in]0, 3] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est définie sur $[0, 3]$, continue sur $]0, 3]$ mais n'est pas continue par morceaux sur $[0, 3]$ car $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.



La fonction $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est définie sur $[0,1]$, continue sur $]0,1]$ mais n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ car $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.



Rappelons ensuite la définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

DÉFINITION 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est continue par morceaux sur I si et seulement si f est continue par morceaux sur tout segment de I.

Commentaire. Une fonction continue par morceaux sur un segment a nécessairement un nombre fini de points de discontinuité mais ce n'est pas le cas d'une fonction continues par morceaux sur un intervalle quelconque. Par exemple, la fonction $x \mapsto E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$ car continue par morceaux sur tout segment contenu dans $]0,1]$.

Pourtant, cette fonction admet une infinité de points de discontinuités, tous les $x_p = \dfrac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

De même, une fonction réelle continue par morceaux sur un intervalle ouvert peut avoir une limite infinie ou pas de limite aux bornes de cet intervalle. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$ car continue par morceaux (et même continue) sur tout segment contenu dans $]0,1]$.

Théorème 1. Notons $\mathscr{C}_{p.m}([a,b],\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{C}_{p.m}(I,\mathbb{K})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ (resp. sur I) à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$\mathscr{C}_{p.m}([a,b],\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{C}_{p.m}(I,\mathbb{K})$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Montrons que $\mathscr{C}_{p.m}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{K}^{[a,b]},+,.\right)$.

• 0 est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

• Soient $(f,g) \in \mathscr{C}_{p.m}([a,b],\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Soient $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ et $y_0 < y_1 < \ldots < y_p = b$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, deux subdivisions de $[a,b]$ associées à f et g respectivement. L'ensemble $\{x_0,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_p\}$ est constitué d'au plus $(n+1)+(p+1) = n+p+2$ nombres (en éliminant les doublons). On classe ces nombres en une liste strictement croissante $a = z_0 < z_1 \ldots < z_q = b$ où $1 \leqslant q \leqslant n+p+2$. Cette dernière subdivision est associée à la fois à f et à g de sorte que chaque fonction $(\lambda f + \mu g)_{/]z_k,z_{k+1}[}$ est continue sur $]z_k, z_{k+1}[$ et se prolonge en une fonction continue sur $[z_k, z_{k+1}]$. Donc, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur $[a, b]$. Ainsi, $\mathscr{C}_{p.m}([a, b], \mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.

On a montré que $\mathscr{C}_{p.m}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{K}^{[a,b]}, +, .\right)$.

Montrons que $\mathscr{C}_{p.m}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{K}^I, +, .\right)$.

• 0 est une fonction continue par morceaux sur I.

• Soient $(f, g) \in \mathscr{C}_{p.m}(I, \mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. D'après ce qui précède, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur tout segment contenu dans $[a, b]$. Donc, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur I.

On a montré que $\mathscr{C}_{p.m}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{K}^I, +, .\right)$.

Notons qu'une fonction continue sur $[a, b]$ (resp. I) est en particulier continue par morceaux sur $[a, b]$ (resp. I) et donc $C^0([a, b], \mathbb{K})$ (resp. $C^0(I, \mathbb{K})$) est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C}_{p.m}([a, b], \mathbb{K}), +, .)$ (resp. $(\mathscr{C}_{p.m}(I, \mathbb{K}), +, .)$).

II - Intégrales convergentes, intégrales divergentes

1) Définitions

Définition 3. Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a, b[$ où a est un réel et b est un réel ou $+\infty$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que **l'intégrale** de la fonction f sur $[a, b[$ **converge** en b si et seulement si la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(x)\,dx$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand X tend vers b. On dit que cette intégrale est divergente dans le cas contraire.

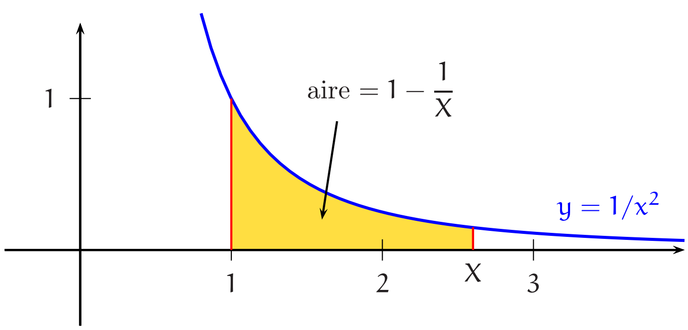
En cas de convergence, on écrit $\displaystyle\lim_{X\to b} \int_a^X f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

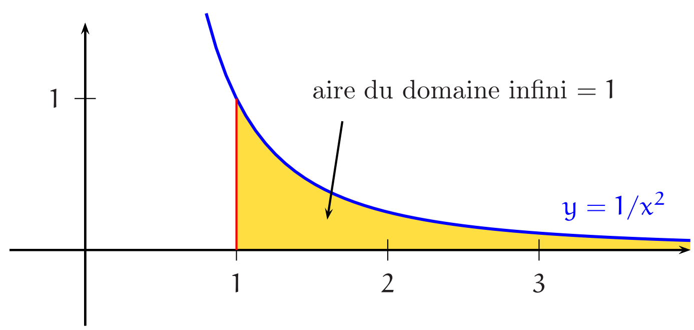
Exemple 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. Pour tout $X \geqslant 1$,

$$\int_1^X \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^X = 1 - \frac{1}{X}.$$

Quand X tend vers $+\infty$, cette dernière expression tend vers 1. Donc,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ est une intégrale convergente et } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$



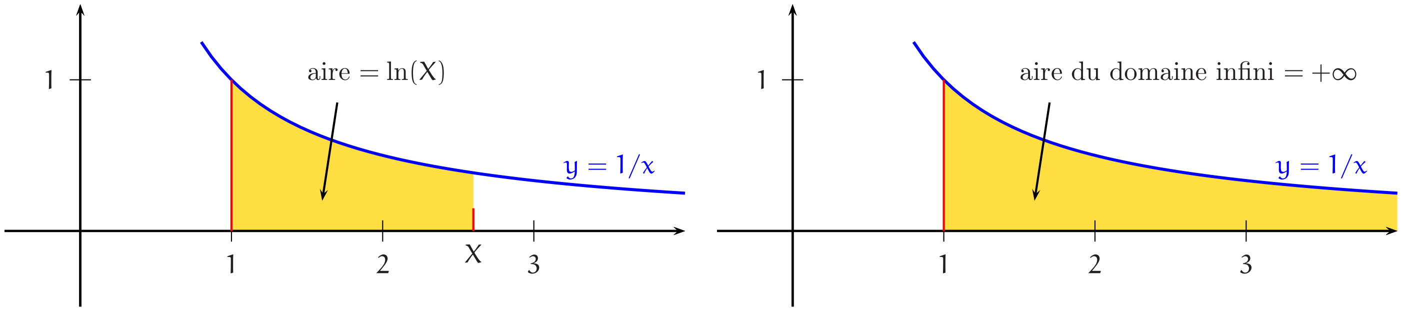


Exemple 2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. Pour tout $X \geqslant 1$,

$$\int_1^X \frac{dx}{x} = \ln(X).$$

Quand X tend vers $+\infty$, cette dernière expression tend vers $+\infty$. Donc,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \text{ est une intégrale divergente.}$$

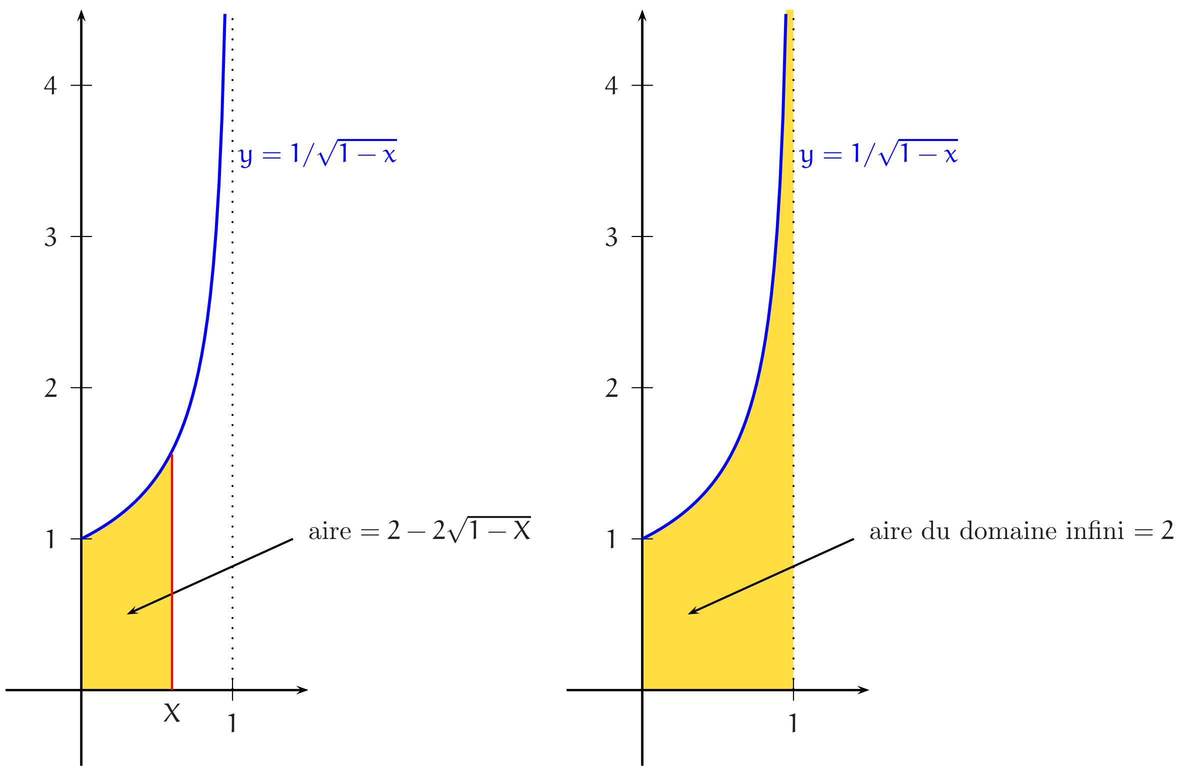


Exemple 3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue par morceaux sur $[0, 1[$. Pour tout $X \in [0, 1[$,

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^X = 2 - 2\sqrt{1-X}.$$

Quand X tend vers $+\infty$, cette dernière expression tend vers 2. Donc,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \text{ est une intégrale convergente et } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$$



L'ecriture $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ peut choquer. Dans cette écriture, il faut comprendre que x ne prend jamais la valeur 1 (de même que $\dfrac{1}{x^2}$ ne prenait pas la valeur $+\infty$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$) en se rappelant que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\substack{X \to 1 \\ X < 1}} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. Notons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ pourrait aussi s'écrire $\displaystyle\int_{[0,1[} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Définition 4. Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle de la forme $]a, b]$ où a est un réel ou $-\infty$ et b est un réel et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que **l'intégrale** de la fonction f sur $]a, b]$ **converge** en a si et seulement si la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_X^b f(x)\, dx$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand X tend vers a. On dit que cette intégrale est divergente dans le cas contraire.

En cas de convergence, on écrit $\displaystyle\lim_{X \to a} \int_X^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.

Exemple 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$. Pour tout $X \in]0,1]$,

$$\int_X^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_X^1 = 2 - 2\sqrt{X}.$$

Quand X tend vers 0 par valeurs supérieures, cette dernière expression tend vers 2. Donc,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ est une intégrale convergente et } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Exemple 2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$. Pour tout $X \in]0,1]$,

$$\int_X^1 \frac{dx}{x} = -\ln(X).$$

Quand X tend vers 0 par valeurs supérieures, cette dernière expression tend vers $+\infty$. Donc,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ est une intégrale divergente.}$$

Définition 5. Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle de la forme $]a,b[$ où a est un réel ou $-\infty$ et b est un réel ou $+\infty$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que **l'intégrale** de la fonction f sur $]a,b[$ **converge** en a en b si et seulement il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ converge en a et l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ converge en b. On dit que cette intégrale est divergente dans le cas contraire.
En cas de convergence, on écrit $\displaystyle\lim_{X\to a}\int_X^c f(x)\,dx + \lim_{Y\to b}\int_c^Y f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ou de manière plus condensée,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{X\to a,\ X>a \\ Y\to b,\ Y<b}} \int_X^Y f(x)\,dx.$$

Commentaire. Le résultat précédent ne dépend pas du réel c. En effet, supposons qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)\,,dx$ soient des intégrales convergentes. Soit d un autre réel de $]a,b[$.
Pour tout réel X de $]a,b[$, d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_X^d f(x)\,dx = \int_X^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$. Ceci montre que $\displaystyle\int_a^d f(x)\,dx$ est une intégrale convergente en a et que $\displaystyle\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$. De même, $\displaystyle\int_d^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente en b et $\displaystyle\int_d^b f(x)\,dx = \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Enfin,

$$\int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$.
Pour tout réel X, $\displaystyle\int_X^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{Arctan}(X)$. Cette dernière expression a une limite réelle quand X tend vers $-\infty$ à savoir $\dfrac{\pi}{2}$. De même, Pour tout réel Y, $\displaystyle\int_0^Y \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan}(Y)$. Cette dernière expression a une limite réelle quand Y tend vers $+\infty$ à savoir $\dfrac{\pi}{2}$. Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ est une intégrale convergente en $-\infty$ et $+\infty$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \text{ est une intégrale convergente et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Exemple 2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$. Pour tout $(X,Y) \in]0,1[^2$,

$$\int_X^Y \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_X^Y \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \left[\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right]_X^Y = [\operatorname{Arcsin}(2x-1)]_X^Y$$
$$= \operatorname{Arcsin}(2Y-1) - \operatorname{Arcsin}(2X-1).$$

Quand X tend vers 0 et Y tend vers 1, cette dernière expression tend vers $\operatorname{Arcsin}(1) - \operatorname{Arcsin}(-1) = \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \text{ est une intégrale convergente et } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \pi.$$

Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est une intégrale convergente, on peut obtenir sa valeur en calculant $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X} f(x)\,dx$. Par exemple,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{X\to+\infty}(\operatorname{Arctan}(X) - \operatorname{Arctan}(-X)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Mais la seule existence de $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X} f(x)\,dx$ **ne suffit pas pour montrer la convergence** de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Par exemple,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{X\to+\infty} 0 = 0.$$

Pourtant, $\displaystyle\int_X^0 \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(X^2+1\right) \underset{X\to-\infty}{\to} -\infty$ et $\displaystyle\int_0^Y \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(Y^2+1\right) \underset{Y\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ est une intégrale divergente. On peut noter que pour tout $k > 0$,

$$\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{kX} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2X^2+1}{X^2+1}\right) = \ln(k),$$

et donc en ajustant la manière qu'ont les bornes de tendre vers $-\infty$ et $+\infty$, on peut trouver comme résultat n'importe quel réel donné à l'avance. Pour analyser la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$, il fallait analyser l'existence d'une limite réelle pour $\displaystyle\int_X^Y \frac{x}{x^2+1}\,dx$ quand X et Y tend vers respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ **indépendamment**.

Commentaire. Toutes les définitions qui ont précédé peuvent s'appliquer au cas particulier où la fonction f est déjà continue par morceaux sur un **segment** $[a,b]$ (auquel cas f est en particulier continue sur $[a,b[$ ou $]a,b]$). Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on sait que la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(x)\,dx$ est définie et continue sur $[a,b]$. En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge en b. De même, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge en a.

Inversement, si f une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a,b[$ où b est réel et si f se prolonge par continuité en b, alors f est la restriction à $[a,b[$ d'une fonction continue sur $[a,b]$ et donc

Théorème 2. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a,b[$ où a est réel et b **est réel** (resp. $]a,b]$ où a et b sont réels).

Si f se prolonge par continuité en b (resp. en a), $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

On définit maintenant un vocabulaire permettant d'alléger les rédactions ultérieures pour des fonctions à valeurs réelles positives :

Définition 6. Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle de la forme I, **à valeurs réelles positives**.

On dit que f est **intégrable** sur I si et seulement si $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

Nous reviendrons plus en détail sur la notion de fonction intégrable dans la section III.

2) *Intégrales de référence*

On fournit maintenant un stock d'intégrales dont la convergence ou la divergence sera dorénavant acquise.

Théorème 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est une intégrale convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$ et si $\alpha \leqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$.

Démonstration. Soit $X \geqslant 1$.

• Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^X = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{X^{\alpha-1}}\right)$. Cette dernière expression tend vers le réel $\dfrac{1}{\alpha-1}$ quand X tend vers $+\infty$ (car $\alpha - 1 > 0$).

• Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^X = \frac{1}{1-\alpha}\left(X^{1-\alpha} - 1\right)$. Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ (car $1 - \alpha > 0$).

• Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x}\,dx = \ln X$. Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$.

Théorème 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est une intégrale convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$ et si $\alpha \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$.

Démonstration. Soit $X \in]0, 1]$.

• Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_X^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_X^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - X^{1-\alpha}\right)$. Cette dernière expression tend vers le réel $\dfrac{1}{1-\alpha}$ quand X tend vers 0 (car $1 - \alpha > 0$).

• Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_X^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_X^1 = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right)$. Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand X tend vers 0 (car $\alpha - 1 > 0$).

• Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_X^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln X$. Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand X tend vers 0.

Plus généralement, en adaptant la démonstration précédente, on obtient

Théorème 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient a et b des réels.
$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$ est une intégrale convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ est une intégrale convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

3) *Utilisation des relations de comparaison pour des fonctions réelles positives*

Théorème 6. Soit f une fonction continue par morceaux et à valeurs réelles **positives** sur $[a, b[$ où a est réel et b est réel ou $+\infty$.
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente si et seulement si la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(x)\,dx$ est majorée sur $[a, b[$.

Dans le cas où la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(x)\,dx$ n'est pas majorée sur $[a, b[$, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$.

Démonstration. Puisque la fonction f est continue par morceaux et positives sur $[a, b[$, on sait que la fonction $F : x \mapsto \int_a^X f(x)\,dx$ est croissante sur $[a, b[$. On sait alors que la fonction F a une limite réelle en b si et seulement si cette fonction est majorée sur $[a, b[$ et que dans le cas contraire, la fonction F tend vers $+\infty$ quand x tend vers b.

Théorème 6 bis. Soit f une fonction continue par morceaux et à valeurs réelles **positives** sur $]a, b]$ où a est réel ou $-\infty$ et b est réel.

$\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente si et seulement si la fonction $X \mapsto \int_X^b f(x)\,dx$ est majorée sur $]a, b]$.

Dans le cas où la fonction $X \mapsto \int_X^b f(x)\,dx$ n'est pas majorée sur $]a, b]$, on a $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$.

Démonstration. La fonction $X \mapsto \int_X^b f(x)\,dx$ est croissante sur $]a, b]$ et donc a une limite réelle en a si et seulement si elle est majorée sur $]a, b]$.

On peut aussi appliquer le théorème 6 à la fonction $x \mapsto f(a + b - x)$, continue par morceaux à valeurs réelles positives sur $[a, b[$.

Théorème 7. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et à valeurs réelles **positives** sur $[a, b[$ où a est réel et b est réel ou $+\infty$. On suppose que pour tout réel x de $[a, b[$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.

Si $\int_a^b g(x)\,dx$ est une intégrale convergente, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.
Si $\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale divergente, alors $\int_a^b g(x)\,dx$ est une intégrale divergente.

Démonstration. Supposons que $\int_a^b g(x)\,dx$ soit une intégrale convergente. Puisque la fonction $X \mapsto \int_a^X g(x)\,dx$ tend vers le réel $\int_a^b g(x)\,dx$ en croissant, on sait que

$$\forall X \in [a, b[, \int_a^X g(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Puisque $f \leqslant g$, par croissance de l'intégrale, on a $\forall X \in [a, b[$, $\int_a^X f(x)\,dx \leqslant \int_a^X g(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

La fonction $X \mapsto \int_a^X f(x)\,dx$ est donc majorée sur $[a, b[$ par le réel $\int_a^b g(x)\,dx$. D'après le théorème 5, $\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

On a montré que si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ converge. Par contraposition, si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, alors $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

Commentaire. Le théorème précédent est encore vrai quand on remplace l'intervalle $[a, b[$ par l'intervalle $]a, b]$.

Exemple. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^4 + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$. En particulier, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^4 + 1}$ est intégrable sur le segment $[0, 1]$.

D'autre part, pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{x^4 + 1} \leqslant \dfrac{1}{x^4}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $4 > 1$ et d'après le théorème 3. Donc, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^4 + 1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^4 + 1}$ est positive, les intégrales $\int_0^1 \dfrac{1}{x^4 + 1}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^4 + 1}\,dx$ sont des intégrales convergentes.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^4 + 1}\,dx$.

On peut calculer cette intégrale. La fraction rationnelle $R = \dfrac{1}{X^4+1}$ est sous forme irréductible. Ses pôles sont simples : ce sont les quatre racines 4-èmes de -1 dans $\mathbb{C}$. Puisque R est réelle et paire, sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$R = \frac{\lambda}{X - e^{i\pi/4}} + \frac{\overline{\lambda}}{X - e^{-i\pi/4}} - \frac{\lambda}{X + e^{i\pi/4}} - \frac{\overline{\lambda}}{X + e^{-i\pi/4}},$$

avec $\lambda = \dfrac{1}{4\left(e^{i\pi/4}\right)^3} = \dfrac{e^{i\pi/4}}{4\left(e^{i\pi/4}\right)^4} = -\dfrac{e^{i\pi/4}}{4}$. Donc,

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{4}\left(-\frac{e^{i\pi/4}}{X - e^{i\pi/4}} - \frac{e^{-i\pi/4}}{X - e^{-i\pi/4}} + \frac{e^{i\pi/4}}{X + e^{i\pi/4}} + \frac{e^{-i\pi/4}}{X + e^{-i\pi/4}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}X + 2}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} - \frac{\sqrt{2}X - 2}{X^2 - \sqrt{2}X + 1}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X + 2\sqrt{2}}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} - \frac{2X - 2\sqrt{2}}{X^2 - \sqrt{2}X + 1}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X + 2\sqrt{2}}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(X + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(X - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx &= \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1}{x^4+1}\,dx \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \lim_{X\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right) + 2\left(\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}x + 1\right) + \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}x - 1\right)\right)\right]_0^X \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((0-0) + 2\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$$

Commentaire. L'étape de calcul $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_0^X f(x)\,dx = \lim_{X\to+\infty} [F(x)]_0^X$ peut être allégée. On peut écrire plus simplement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{+\infty}$.

Théorème 8. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et à valeurs réelles positives sur $[a, b[$ où a est réel et b est réel ou $+\infty$. On suppose que $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$ ou $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$.

Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ est une intégrale convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.
Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale divergente, alors $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ est une intégrale divergente.

Commentaire. Le théorème précédent est encore vrai quand on remplace l'intervalle $[a, b[$ par l'intervalle $]a, b]$ et en adaptant les hypothèses.

Démonstration. Supposons g intégrable sur $[a, b[$ et supposons que $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$. Il existe $c \in [a, b[$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [c, b[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant Mg(x)$.

Puisque la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_a^X g(x)\,dx$ a une limite réelle en b, il en est de même de la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_a^X Mg(x)\,dx = M\int_a^X g(x)\,dx$ ou encore la fonction Mg est intégrable sur $[c, b[$.

D'après le théorème 7, $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente puis $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

Par contraposition, si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale divergente, alors $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ est une intégrale divergente.

Supposons enfin que $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$. On sait alors que $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$. et les résultats précédents restent valables.

Commentaire. Le théorème 8 est donné pour des fonctions à valeurs réelles positives. On admet momentanément que ce théorème reste valable pour des fonctions quelconques, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou même $\mathbb{C}$. Ceci sera analysé dans la section II : fonctions intégrables.

Exemple. Montrons l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x}\,dx$. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+e^x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Etude au voisinage de 0. $\dfrac{\ln x}{x+e^x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\ln x}{1} = \ln x$. De plus, $\sqrt{x}\ln x \underset{x\to 0}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\ln x \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et finalement $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ est une intégrale convergente car $\dfrac{1}{2} < 1$ et d'après le théorème 4, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Etude au voisinage de $+\infty$. $\dfrac{\ln x}{x+e^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x\ e^{-x}$. De plus, $x^2\ln x\ e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\ln x\ e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et finalement $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale convergente car $2 < 1$ et d'après le théorème 3, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

En résumé, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ sont des intégrales convergentes et finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est une intégrale convergente. Il semble par contre difficile de calculer cette intégrale.

Théorème 9. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et à valeurs réelles **positives** sur $[a,b[$ où a est réel et b est réel ou $+\infty$. On suppose que $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$.

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ est une intégrale convergente ou encore $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ sont des intégrales de **même nature**.

Commentaire. Le théorème précédent est encore vrai quand on remplace l'intervalle $[a,b[$ par l'intervalle $]a,b]$ et en adaptant les hypothèses.

Démonstration. Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors $f(x) - g(x) \underset{x\to b}{\sim} o(f(x))$.

Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ convergente. Alors, d'après le théorème précédent $\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ est une intégrale convergente. Mais alors la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_a^X g(x)\,dx = \int_a^X f(x)\,dx - \int_a^X (f(x)-g(x))\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers b ou encore $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

En échangeant les rôles de f et g, on a aussi : si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ est une intégrale convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente

---

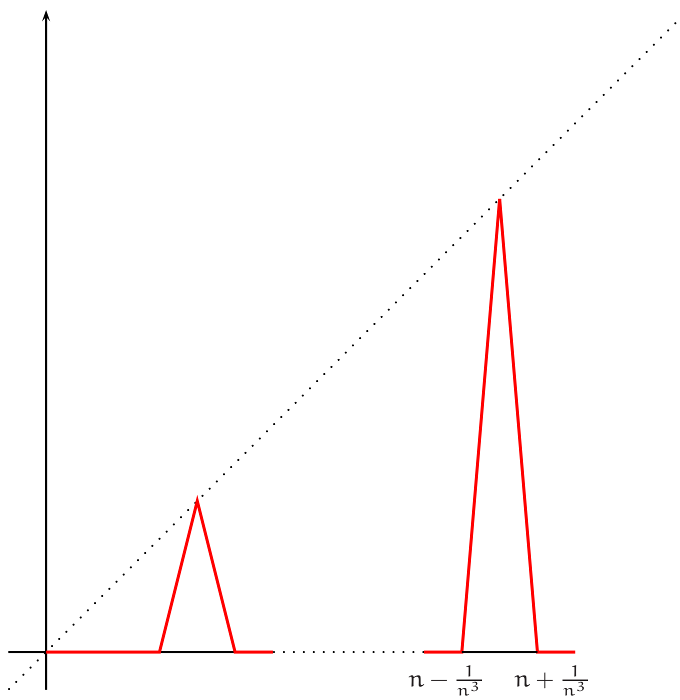
Commentaire. Le théorème 9 est donné pour des fonctions à valeurs réelles positives. On admet momentanément que ce théorème **n'est plus valable** pour des fonctions quelconques, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ceci sera analysé dans la section III : fonctions intégrables. Néanmoins, le théorème 9 reste valable pour des fonctions à valeurs réelles négatives ou plus généralement pour des fonctions à valeurs réelles de signe constant au voisinage de b.

Analysons maintenant deux pièges usuels concernant les intégrales généralisées. On est bien sûr tenté de faire le parallèle des définitions précédentes avec les définitions et premiers résultats concernant les séries numériques.

• Comme pour les séries numériques, le résultat « $f \underset{x\to+\infty}{=} o(1) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est une intégrale convergente » est un **résultat faux**. Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$, tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et pourtant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$ (de même que $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$).

• Plus surprenant est le fait que la réciproque de l'implication précédente **est aussi une implication fausse**. Le résultat « $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est une intégrale convergente $\Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ » est un **résultat faux**.
On va construire une fonction continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ et **non bornée sur** $[0,+\infty[$.

Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in \left[n-\dfrac{1}{n^3}, n+\dfrac{1}{n^3}\right]$, on pose $f(x) = n^4\left(x-n+\dfrac{1}{n^3}\right)$ si $x \in \left[n-\dfrac{1}{n^3}, n\right]$ et $f(x) = -n^4\left(x-n-\dfrac{1}{n^3}\right)$ si $x \in \left[n, n+\dfrac{1}{n^3}\right]$ (sur $\left[n-\dfrac{1}{n^3}, n+\dfrac{1}{n^3}\right]$, f est la fonction continue et affine par morceaux telles que $f\left(n-\dfrac{1}{n^3}\right) = f\left(n+\dfrac{1}{n^3}\right) = 0$ et $f(n) = n$). Pour tout autre réel positif, on pose $f(x) = 0$.



La fonction f est définie et continue sur $[0,+\infty[$, non bornée sur $[0,+\infty[$ (en particulier, f ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$) car pour tout $n \geqslant 2$, $f(n) = n$. Maintenant, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ exprimée en unités d'aire. D est une réunion de triangles. Le triangle général a pour aire $\dfrac{\frac{2}{n^3}\times n}{2} = \dfrac{1}{n^2}$. Donc,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < +\infty.$$

f est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

4) Propriétés des intégrales généralisées

Les intégrales généralisées conservent toutes les propriétés usuelles des intégrales de fonctions continues par morceaux sur un segment.

4-a) Linéarité

Théorème 10 (linéarité de l'intégrale). Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Si $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_I g(x)\,dx$ sont des intégrales convergentes, alors $\displaystyle\int_I (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx$ est une intégrale convergente et

$$\int_I (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_I f(x)\,dx + \mu \int_I g(x)\,dx.$$

Démonstration. Si par exemple, $I = [a, b[$ où b est réel ou infini, pour tout $X \in [a, b]$,

$$\int_a^X (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^X f(x)\,dx + \mu \int_a^X g(x)\,dx.$$

Ceci montre que $\displaystyle\int_I (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx$ est une intégrale convergente. De plus, quand X tend vers b, on obtient

$$\int_I (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_I f(x)\,dx + \mu \int_I g(x)\,dx.$$

Théorème 10 bis. L'ensemble E des fonctions f continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ telles $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ soient une intégrale convergente est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $f \mapsto \displaystyle\int_I f(x)\,dx$ est une forme linéaire sur E.

Commentaire. Comme pour les séries numériques, on ne peut « séparer une intégrale » en une combinaison linéaire d'intégrales que si chacune des intégrales écrites converge.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$ est continue sur $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 0 (car $\dfrac{x-1}{\ln x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0) et prolongeable par continuité en 1 (car $\dfrac{x-1}{\ln x}$ tend vers 1 quand x tend vers 1). Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$ est une intégrale convergente. Néanmoins, on **ne peut pas écrire** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{\ln x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{\ln x}\,dx$ car chacune des deux intégrales du second membre est divergente ($\dfrac{1}{\ln x} \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1} > 0$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de 1). Plus précisément, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln x}\,dx = -\infty = \int_0^1 \frac{x}{\ln x}\,dx$.

4-b) Positivité, croissance

Théorème 11 (positivité de l'intégrale). Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

Si f est positive, alors $\displaystyle\int_I f(x)\,dx \geqslant 0$.

Démonstration. Si par exemple, $I = [a, b[$ où b est réel ou infini, pour tout $X \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^X f(x)\,dx \geqslant 0$. Quand X tend vers b, on obtient $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

On dispose aussi de l'amélioration usuelle pour les fonctions continues :

Théorème 12. Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et **positive** sur I. Alors

$$\int_I f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

On en déduit que :

- l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle, est strictement positive ;
- une fonction continue, positive et d'intégrale nulle, est nulle.

Démonstration. Si $f = 0$, alors $\int_I f(x)\, dx = 0$.

Réciproquement, supposons par exemple que $I = [a, b[$ où b est réel ou $+\infty$ puis que f est une fonction continue, positive et non nulle sur $[a, b[$. Il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $f(x_0) > 0$. Soit $[c, d]$ un segment de longueur strictement positive, contenu dans $[a, b[$ et contenant x_0. Puisque f est une fonction continue, positive et non nulle sur le segment $[c, d]$, on sait depuis le cours de maths sup que $\int_c^d f(x)\, dx > 0$. Mais alors, pour tout X de $[d, b[$,

$$\int_a^X f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^X f(x)\, dx \geqslant \int_c^d f(x)\, dx > 0.$$

Quand X tend vers b, on obtient $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_c^d f(x)\, dx > 0$.

Théorème 13 (croissance de l'intégrale). Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_I f(x)\, dx$ et $\int_I g(x)\, dx$ sont des intégrales convergentes.

Si $f \leqslant g$, alors $\int_I f(x)\, dx \leqslant \int_I g(x)\, dx$.

Démonstration. La fonction $g - f$ est positive sur I et donc $\int_I g(x)\, dx - \int_I f(x)\, dx = \int_I (g(x) - f(x))\, dx \geqslant 0$.

4-c) Relation de Chasles

On suppose que $\int_I f(x)\, dx$ est une intégrale convergente. Si $I = [a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$, a et b étant suivant les cas réels ou infini, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, on pose $\int_y^x f(t)\, dt = -\int_x^y f(t)\, dt$ sauf dans le cas où x et y sont tous deux égaux à une borne non comprise de I. Par passage à la limite, on démontre alors facilement que pour tout $(x, y, z) \in [a, b]^3$ tels que x et y ou x et z ou y et z ne soient pas égaux à une borne non atteinte de I, les intégrales ci-dessous existent et

$$\int_x^y f(t)\, dt + \int_y^z f(t)\, dt = \int_y^z f(t)\, dt.$$

Par exemple, $\int_{+\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\, dx = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = -\frac{\pi}{2}$ ou aussi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$.

5) Dérivation de la fonction $X \mapsto \int_X^b f(x)\, dx$

On suppose que $I = [a, b[$ ou $]a, b[$ où b est réel ou $+\infty$. On se donne f une fonction définie et **continue** sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On sait que la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^X f(x)\, dx$, $x_0 \in I$ donné, est de classe C^1 sur I. On suppose alors que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x)\, dx$ est une intégrale convergente. Pour tout X de I, on peut écrire

$$\int_X^b f(x)\, dx = -\int_{x_0}^X f(x)\, dx + \int_{x_0}^b f(x)\, dx.$$

$\int_{x_0}^b f(x)\, dx$ est une constante quand X varie et d'autre part, la fonction $X \mapsto \int_{x_0}^X$ est de classe C^1 sur I de dérivée f. On en déduit que la fonction $F : x \mapsto \int_X^b f(x)\, dx$ est de classe C^1 sur I et que $F' = -f$.

De même, si $I =]a, b]$ ou $]a, b[$ où a est réel ou $-\infty$ et f est une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la fonction $F : x \mapsto \int_a^X f(x)\, dx$ est de classe C^1 sur I et $F' = f$.

Par exemple, la fonction $F_1 : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{t^2}\, dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F_1'(x) = -e^{x^2}$. F_1 est en fait la primitive de la fonction $f_1 : x \mapsto -e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ dont la limite en $+\infty$ est nulle.

De même, la fonction $F_2 : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} e^{t^2}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F_2'(x) = e^{x^2}$. F_2 est en fait la primitive de la fonction $f_2 : x \mapsto e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ dont la limite en $-\infty$ est nulle.

6) Sommation des relations de comparaison pour des fonctions réelles positives

On rappelle que quand la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge, pour tout entier naturel n, on peut définir $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$ le reste à l'ordre n de la série de terme général u_n et que R_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (car $S - S_n$ tend vers $S - S = 0$).

On a une notion équivalente pour les intégrales sans avoir l'équivalent du vocabulaire « reste à l'ordre n ».

Théorème 14. Soit $I = [a, b[$ où b est réel ou $+\infty$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

Alors, pour tout x de $[a, b[$, $\int_x^b f(t)\,dt$ est une intégrale convergente et de plus

$$\lim_{x \to b} \int_x^b f(t)\,dt = 0.$$

Démonstration. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ est une intégrale convergente, on sait déjà que pour tout réel de $[a, b[$ $\int_x^b f(t)\,dt$ est une intégrale convergente et que $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$. Mais alors

$$\forall x \in [a, b[,\ \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt.$$

Quand x tend vers b, $\int_a^x f(t)\,dt$ tend vers $\int_a^b f(t)\,dt$ et donc $\int_x^b f(t)\,dt$ tend vers 0.

Commentaire. On a un énoncé analogue si $I =]a, b]$.

Exemple. $\int_x^{+\infty} e^{t^2}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et $\int_{-\infty}^{x} e^{t^2}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

Théorème 15. Soit $I = [a, b[$ où b est réel ou $+\infty$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles **positives** sur I. On suppose que $f \underset{b}{=} o(g)$.

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et

$$\int_x^b f(t)\,dx \underset{x \to b}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,dt\right).$$

- Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge et

$$\int_a^x f(t)\,dt \underset{x \to b}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right).$$

Démonstration. On suppose que $f \underset{x \to b}{=} o(g)$.

- Supposons que $\int_a^b g(t)\,dt$ converge. On sait déjà que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge puis que pour tout x de $[a, b[$, $\int_x^b f(t)\,dt$ et $\int_x^b g(t)\,dt$ sont des intégrales convergentes et enfin que $\lim_{x \to b} \int_x^b f(t)\,dt = 0 = \lim_{x \to b} \int_x^b g(t)\,dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \underset{x \to b}{=} o(g)$, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $\forall t \in [x_0, b[$, $0 \leqslant f(t) \leqslant \varepsilon g(t)$.
Soit $x \in [x_0, b[$. Par positivité et croissance de l'intégrale, on a

$$0 \leqslant \int_x^b f(t)\,dt \leqslant \varepsilon \int_x^b g(t)\,dt.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in [a, b[/ \forall x \in [x_0, b[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \leqslant \varepsilon \int_x^b g(t)\,dt$ et donc que

$$\int_x^b f(t)\,dx \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,dt\right).$$

• Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ diverge. On sait déjà que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ diverge puis que que $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt = +\infty = \lim_{a\to x}\int_x^b g(t)\,dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \underset{x\to b}{=} o(g)$, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $\forall t \in [x_0, b[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}g(t)$.
Soit $x \in [x_0, b[$.

$$0 \leqslant \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^x g(t)\,dt \leqslant \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)\,dt.$$

Ensuite, puisque $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x g(t)\,dt = +\infty$, il existe $x_1 \in [x_0, b[$ tel que pour tout $x \in [x_1, b[$, $\displaystyle\int_a^x g(t)\,dt \geqslant \frac{2}{\varepsilon}\int_a^{x_0} f(t)\,dt$ et donc $\displaystyle\int_a^{x_0} f(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)\,dt$. Pour $x \in [x_1, b[$, on a

$$0 \leqslant \int_a^x f(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)\,dt = \varepsilon\int_a^x g(t)\,dt.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1 \in [a, b[/ \forall x \in [x_1, b[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\,dt$ et donc que

$$\int_a^x f(t)\,dx \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right).$$

Théorème 16. Soit $I = [a, b[$ où b est réel ou $+\infty$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles **positives** sur I. On suppose que $f \underset{b}{=} O(g)$.

• Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge et

$$\int_x^b f(t)\,dx \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b g(t)\,dt\right).$$

• Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ diverge et

$$\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,dt\right).$$

Démonstration. On suppose que $f \underset{x\to b}{=} O(g)$.

• Supposons que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge. On sait déjà que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge puis que pour tout x de $[a, b[$, $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_x^b g(t)\,dt$ sont des intégrales convergentes et enfin que $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_x^b f(t)\,dt = 0 = \lim_{x\to b}\int_x^b g(t)\,dt$.

Puisque $f \underset{x\to b}{=} O(g)$, il existe $x_0 \in [a, b[$ et $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\forall t \in [x_0, b[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant Mg(t)$.
Pour $x \in [x_0, b[$, on a

$$0 \leqslant \int_x^b f(t)\,dt \leqslant M\int_x^b g(t)\,dt.$$

On a montré que $\exists x_0 \in [a, b[,\ \exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in [x_0, b[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \leqslant M\int_x^b g(t)\,dt$ et donc que

$$\int_x^b f(t)\,dx \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b g(t)\,dt\right).$$

• Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ diverge. On sait déjà que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ diverge puis que que $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt = +\infty = \lim_{a\to x}\int_x^b g(t)\,dt$.

Puisque $f \underset{x\to b}{=} O(g)$, il existe $x_0 \in [a, b[$ et $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\forall t \in [x_0, b[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{M}{2} g(t)$.
Soit $x \in [x_0, b[$.

$$0 \leqslant \int_a^x f(t)\ dt = \int_a^{x_0} f(t)\ dt + \int_{x_0}^x f(t)\ dt \leqslant \int_a^{x_0} f(t)\ dt + \frac{M}{2}\int_{x_0}^x g(t)\ dt \leqslant \int_a^{x_0} f(t)\ dt + \frac{M}{2}\int_a^x g(t)\ dt.$$

Ensuite, puisque $\lim\limits_{x\to b}\displaystyle\int_a^x g(t)\ dt = +\infty$, il existe $x_1 \in [x_0, b[$ tel que pour tout $x \in [x_1, b[$, $\displaystyle\int_a^x g(t)\ dt \geqslant \frac{2}{M}\int_a^{x_0} f(t)\ dt$ et donc $\displaystyle\int_a^{x_0} f(t)\ dt \leqslant \frac{M}{2}\int_a^x g(t)\ dt$. Pour $x \in [x_1, b[$, on a

$$0 \leqslant \int_a^x f(t)\ dt \leqslant \frac{M}{2}\int_a^x g(t)\ dt + \frac{M}{2}\int_a^x g(t)\ dt = M\int_a^x g(t)\ dt.$$

On a montré que $\exists x_1 \in [a, b[/,\ \exists M \in \mathbb{R}^+/\ \forall x \in [x_1, b[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \leqslant M\int_a^x g(t)\ dt$ et donc que

$$\int_a^x f(t)\ dx \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g(t)\ dt\right).$$

Théorème 17. Soit $I = [a, b[$ où b est réel ou $+\infty$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles **strictement positives** sur I. On suppose que $f \underset{b}{\sim} g$.

Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont des intégrales de même nature et

• Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge,

$$\int_x^b f(t)\ dx \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\ dt.$$

• Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ diverge,

$$\int_a^x f(t)\ dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\ dt.$$

Démonstration. On suppose que $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ ou encore que $f(x) - g(x) \underset{x\to b}{\sim} o(f(x))$.

• Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge. On sait déjà que $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ converge puis que pour tout x de $[a, b[$, $\displaystyle\int_x^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_x^b g(t)\ dt$ sont des intégrales convergentes et enfin que $\lim\limits_{x\to b}\displaystyle\int_x^b f(t)\ dt = 0 = \lim\limits_{x\to b}\int_x^b g(t)\ dt$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \underset{b}{\sim} g$, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $\forall t \in [x_0, b[,\ |f(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon f(t)$.
Soit $x \in [x_0, b[$.

$$\left|\int_x^b f(t)\ dt - \int_x^b g(t)\ dt\right| \leqslant \int_x^b |f(t) - g(t)|\ dt \leqslant \varepsilon\int_x^b f(t)\ dt.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in [a, b[/\ \forall x \in [x_0, b[,\ \left|\displaystyle\int_x^b f(t)\ dt - \int_x^b g(t)\ dt\right| \leqslant \varepsilon\int_x^b f(t)\ dt$ et donc que $\displaystyle\int_x^b f(t)\ dt - \int_x^b g(t)\ dt \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b f(t)\ dt\right)$ ou encore que

$$\int_x^b f(t)\ dx \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\ dt.$$

• Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ diverge. On sait déjà que $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ diverge puis que que $\lim\limits_{x\to b}\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt = +\infty = \lim\limits_{a\to x}\int_x^b g(t)\ dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \underset{b}{\sim} g$, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $\forall t \in [x_0, b[,\ |f(t) - g(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} f(t)$.
Soit $x \in [x_0, b[$.

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_a^{x_0} (f(t)-g(t))\,dt\right| + \int_{x_0}^x |f(t)-g(t)|\,dt \leqslant \left|\int_a^{x_0} (f(t)-g(t))\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$
$$\leqslant \left|\int_a^{x_0} (f(t)-g(t))\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x f(t)\,dt.$$

Ensuite, puisque $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt = +\infty$, il existe $x_1 \in [x_0, b[$ tel que pour tout $x \in [x_1, b[$, $\int_a^x f(t)\,dt \geqslant \frac{2}{\varepsilon}\left|\int_a^{x_0} (f(t)-g(t))\,dt\right|$ et donc $\left|\int_a^{x_0} (f(t)-g(t))\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x f(t)\,dt$. Pour $x \in [x_1, b[$, on a

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x f(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x f(t)\,dt = \varepsilon\int_a^x f(t)\,dt.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1 \in [a, b[/\ \forall x \in [x_1, b[,\ \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon\int_a^x f(t)\,dt$ et donc que

$$\int_a^x f(t)\,dx \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,dt.$$

Exemples. Déterminons un équivalent simple de $\int_1^x e^{t^2}\,dt$ quand x tend vers $+\infty$ (étant acquis le fait que la fonction $f\ :\ t \mapsto e^{t^2}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$).

La fonction $g\ :\ t \mapsto \frac{e^{t^2}}{2t}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$g'(t) = \frac{2te^{t^2}}{2t} - \frac{e^{t^2}}{2t^2} = e^{t^2}\left(1 - \frac{1}{2t^2}\right).$$

On note que $g'(t) = e^{t^2}\left(1 - \frac{1}{2t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{t^2} = f(t)$.

Ainsi,
- La fonction f est continue, positive et non intégrable sur $[1, +\infty[$;
- $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g'(t)$.

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt = \int_1^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x g'(t)\,dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_1^x = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

$$\boxed{\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}.}$$

Déterminons un équivalent simple de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ quand x tend vers $+\infty$ (étant acquis le fait que la fonction $f\ :\ t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$).

La fonction $g\ :\ t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2t}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$g'(t) = \frac{2te^{t^2}}{2t} + \frac{e^{t^2}}{2t^2} = e^{t^2}\left(1 + \frac{1}{2t^2}\right).$$

avec $g'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} f(t)$.

Ainsi,
- La fonction f est continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$;
- $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g'(t)$.

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g'(t)\,dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

$$\boxed{\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.}$$

7) Comparaison séries-intégrales

Séries et intégrales ont des points communs. Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$. On a analyse précisément cette situation dans un cas particulier :

Théorème 18. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles positives et décroissante sur $[0,+\infty[$.

Alors, la série numérique de terme général $\displaystyle\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt\right) - f(n)$, $\in \mathbb{N}^*$, converge

En particulier, la série de terme général $f(n)$, $n\in\mathbb{N}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Démonstration. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n = \displaystyle\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt\right) - f(n)$. Puisque la fonction f est continue par morceaux et décroissante sur $[0,+\infty[$, pour tout entier naturel non nul n, $f(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leqslant f(n-1)$ puis

$$0 \leqslant \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt\right) - f(n) = u_n \leqslant f(n-1) - f(n).$$

Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}0 \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt\right) - f(n)\right) &\leqslant \sum_{n=1}^{N}(f(n-1)-f(n))\\ &= f(0) - f(N) \text{ (somme télescopique)}\\ &\leqslant f(0).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$ et de plus la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. On sait alors que la série de terme général u_n converge.

Maintenant, pour $N\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt\right) - f(n)\right) = \sum_{n=1}^{N}\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - \sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_0^N f(t)\,dt - \sum_{n=1}^{N} f(n)$.

Puisque la suite $\displaystyle\left(\int_0^N f(t)\,dt - \sum_{n=1}^{N} f(n)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge, les suites $\displaystyle\left(\int_0^N f(t)\,dt\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} f(n)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ ou encore la suite $\displaystyle\left(\int_0^N f(t)\,dt\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et la série de terme général $f(n)$, $n\in\mathbb{N}$, sont de mêmes natures.

Enfin, puisque la fonction f est positive sur $[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la suite $\displaystyle\left(\int_0^N f(t)\,dt\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ ou encore si et seulement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est une intégrale convergente.

Ceci montre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$.

Exemple. La fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{x\ln x}$ est continue, positive et décroissante sur $]1,+\infty[$. Donc la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$, $n\geqslant 2$, et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ sont de mêmes natures.

Or, pour tout $X \in [2, +\infty[$, $\displaystyle\int_2^X \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln X) - \ln(\ln 2)$ puis $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_2^X \frac{dx}{x \ln x} = +\infty$.

Ainsi, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = +\infty$ et donc aussi $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n} = +\infty$.

8) *Intégration par parties. Changements de variables*

8-a) Intégration par parties

Théorème 19. Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b[$, b réel ou infini, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $\displaystyle\lim_{X \to b} [f(x)g(x)]_a^X$ existe dans $\mathbb{K}$ (et on note dans ce cas $[f(x)g(x)]_a^b$ cette limite).

Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\ dx$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$

Démonstration. Soit $X \in [a, b[$. Les deux fonctions f et g sont de classe C^1 sur le segment $[a, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\forall X \in [a, b[,\ \int_a^X f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^X - \int_a^X f'(x)g(x)\ dx.$$

Puisque $[f(x)g(x)]_a^X$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand X tend vers b, les fonctions $X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(x)g'(x)\ dx$ et $X \mapsto \displaystyle\int_a^X f'(x)g(x)\ dx$ sont ou bien toutes convergentes en b ou bien toutes deux divergentes en b. De plus, en cas de convergence, quand X tend vers b, on obtient

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$

Exemple 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $f_n\ :\ x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, I_n existe dans $\mathbb{R}$.

Les deux fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Au vu de la convergence de toutes les expressions considérées, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}\ dx = \left[x^{n+1}\left(-e^{-x}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)x^n\left(-e^{-x}\right) dx = (n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx \\ &= (n+1)I_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En tentant compte de $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = -0 + 1 = 1$, on obtient par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx = n!.}$$

Commentaire. Dans l'exemple précédent, l'intégration par parties était simple à effectuer et à rédiger car les différentes limites se calculaient immédiatement. Quand l'intégration par parties est un peu délicate à gérer, le plus propre est de revenir à une intégration par parties sur un segment puis de gérer individuellement chaque problème de limite.

Exemple 2. Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$ est une intégrale convergente.

Soient ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $x \mapsto 1 - \cos x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_{\varepsilon}^{A} \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_{\varepsilon}^{A} - \int_{\varepsilon}^{A} (1-\cos x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$
$$= \frac{1-\cos A}{A} - \frac{1-\cos \varepsilon}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx.$$

• $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx$ est une intégrale convergente car la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0. D'autre part, $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} = 0$ car $\dfrac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^A \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ est une intégrale convergente et de plus, quand ε tend vers 0, on obtient

$$\forall A \in]0,+\infty[,\ \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1-\cos A}{A} + \int_0^A \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx.$$

• Puisque $\left|\dfrac{1-\cos A}{A}\right| \leqslant \dfrac{2}{A}$, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1-\cos A}{A} = 0$. D'autre part, $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$. Mais alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ est une intégrale convergente et de plus, quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ est une intégrale convergente.}}$$

8-b) Changements de variables

Théorème 20. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$, a et b réels ou infinis, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit φ une fonction définie sur $]\alpha,\beta[$, α et β réels ou infinis, de classe C^1 sur $]\alpha,\beta[$, strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$ et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$.

Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx.$$

Démonstration. Soit $(X,Y) \in]\alpha,\beta[^2$ tel que $X \leqslant Y$. Puisque φ est de classe C^1 sur $]\alpha,\beta[$ à valeurs dans $]a,b[$, on peut poser $t = \varphi(x)$ et donc $dt = \varphi'(x)\, dx$ sur le segment $[X,Y]$ et on obtient

$$\int_X^Y f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(X)}^{\varphi(Y)} f(t)\, dt.$$

Maintenant, puisque φ est strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$ et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$, $\displaystyle\lim_{X \to \alpha} \varphi(X) = a$ et $\displaystyle\lim_{X \to \beta} \varphi(X) = b$.

Ceci montre que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx$ sont de même nature et de plus, en cas de convergence, quand X tend vers α et Y tend vers β, on obtient

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx.$$

Commentaire. On a un théorème analogue si le changement de variables φ est strictement décroissant sur $]\alpha,\beta[$ auquel cas la conclusion est $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx$.

Exemple. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\, dx$ existe dans $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

La fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x} = t$ est une bijection de classe C^1 de $]0,+\infty[$ sur lui-même, strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. En posant $t = \dfrac{1}{x}$ et donc $x = \dfrac{1}{t}$ puis $dx = \dfrac{1}{t}$ dt, on obtient une nouvelle intégrale convergente. Plus précisément,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{\frac{1}{t^3}+1} \times \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\,dt.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

puis $I = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

II - Fonctions intégrables

1) *Définition*

Définition 7. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que f est **intégrable** sur I si et seulement si $\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx < +\infty$.
Il revient au même de dire que f est intégrable sur I si et seulement si $|f|$ est intégrable sur I.
Quand $\displaystyle\int_I |f(t)|\,dt$ est une intégrale convergente, on dit que $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ est une intégrale **absolument convergente**.

Commentaire 1. On verra plus loin que si f est intégrable sur $[a,b[$ par exemple ou encore si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ est une intégrale convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

Commentaire 2. On déjà eu l'occasion de dire que si f est une fonction à valeurs réelles **positives** sur I, alors

f est intégrable sur I **si et seulement si** $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

Exemple 1. Pour $x \geqslant 1$, posons $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$. f est continue sur $[1,+\infty[$ et pour tout réel $x \in [1,+\infty[$, $\left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$. Donc, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\,dx$ est une intégrale convergente ou encore, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exemple 2. Pour $x \geqslant 1$, posons $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{x^2}$. f est continue sur $[1,+\infty[$ et pour tout réel $x \in [1,+\infty[$, $\left|\dfrac{e^{ix}}{x^2}\right| = \dfrac{1}{x^2}$. Donc, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{ix}}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exemple 3. Pour $x \geqslant 1$, posons $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{x}$. f est continue sur $[1,+\infty[$ et pour tout réel $x \in [1,+\infty[$, $\left|\dfrac{e^{ix}}{x}\right| = \dfrac{1}{x}$. Donc, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{ix}}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

2) *Fonctions à valeurs réelles intégrables*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit les fonction f^+ et f^- par

$$\text{pour tout } x \text{ de I, } f^+(x) = \text{Max}\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

et

$$f^-(x) = -\text{Min}\{f(x), 0\} = \text{Max}\{f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) \text{ si } f(x) \leqslant 0 \\ 0 \text{ si } f(x) \geqslant 0 \end{cases}.$$

On a immédiatement les résultats suivants :

Théorème 21. Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$;
- $f^+ = \dfrac{1}{2}(|f| + f)$ et $f^- = \dfrac{1}{2}(|f| - f)$;
- f^+ et $f-$ sont continues par morceaux à valeurs réelles positives.
- $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$.

Puis on a le théorème :

Théorème 22. Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- sont intégrables sur I.

Démonstration. Si f est intégrable sur I, alors $|f|$ est intégrable sur I puis f^+ et $f-$ sont intégrables sur I car continues par morceaux, à valeurs réelles positives et majorées sur I par la fonction intégrable $|f|$.

Réciproquement, si f^+ et f^- sont intégrables sur I, alors $|f| = f^+ - f^-$ est intégrable sur I.

Théorème 23. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$ ou $]a, b[$), à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est intégrable sur $[a, b[$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente.

Démonstration. Si f est intégrable sur $[a, b[$, alors f^+ et f^- sont intégrables sur $[a, b[$ d'après le théorème précédent. Pour tout X de $[a, b[$, on a

$$\int_a^X f(x)\,dx = \int_a^X \left(f^+(x) - f^-(x)\right) dx = \int_a^X f^+(x)\,dx - \int_a^X f^-(x)\,dx.$$

Par hypothèse, $\displaystyle\int_a^b f^+(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b f^-(x)\,dx$ sont des intégrales convergentes. Donc, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale convergente. De plus quand X tend vers b, on obtient

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx.}$$

Commentaire. La réciproque du théorème précédent est fausse. Par exemple, on a déjà vu (page 19) que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est une intégrale convergente. Vérifions que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$ ou encore que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ est une intégrale divergente ou encore que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &\geqslant \int_{\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx\\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi} dt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{t+k\pi} dt\\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{(k+1)\pi} dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty.$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x} dx$ est un exemple d'intégrale telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x} dx$ est une intégrale convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ est une intégrale divergente. Une telle intégrale est dite **semi-convergente**.

3) Fonctions à valeurs complexes intégrables

Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\left|\overline{f}\right| = |f|$. Donc,

Théorème 24. Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

f est intégrable sur I si et seulement si $\overline{f}$ est intégrable sur I.

Théorème 25. Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

f est intégrable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur I.

Démonstration. Supposons f est continue par morceaux et intégrable sur I. Alors $\mathrm{Re}(f) = \dfrac{1}{2}\left(f+\overline{f}\right)$ et $\mathrm{Im}(f) = \dfrac{1}{2i}\left(f-\overline{f}\right)$ sont continues par morceaux sur I. D'autre part, $|f|$ est intégrable sur I puis $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur I car $|\mathrm{Re}(f)| \leqslant |f|$ et $|\mathrm{Im}(f)| \leqslant |f|$.

Réciproquement, si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur I, alors $|f|$ est intégrable sur I car $|f| \leqslant |\mathrm{Re}(f)| + |\mathrm{Im}(f)|$.

Théorème 26. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$ ou $]a, b[$), à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Si f est intégrable sur $[a, b[$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ est une intégrale convergente.

Démonstration. Si f est intégrable sur $[a, b[$, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur $[a, b[$ d'après le théorème précédent. Pour tout X de $[a, b[$, on a

$$\int_a^X f(x)\, dx = \int_a^X (\mathrm{Re}(f(x)) + i\mathrm{Im}(f)(x))\, dx = \int_a^X \mathrm{Re}(f(x))\, dx + i\int_a^X \mathrm{Im}(f(x))\, dx.$$

Par hypothèse, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\, dx$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\, dx$ sont des intégrales convergentes. Donc, $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ est une intégrale convergente. De plus quand X tend vers b, on obtient

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (\mathrm{Re}(f))(x)\, dx + i\int_a^b (\mathrm{Im}(f))(x)\, dx}$$

et donc aussi

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (\mathrm{Re}(f))^+(x)\, dx - \int_a^b (\mathrm{Re}(f))^-(x)\, dx + i\int_a^b (\mathrm{Im}(f))^+(x)\, dx - i\int_a^b (\mathrm{Im} f)^-(x)\, dx.}$$

4) *L'espace* $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$

Notation. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et intégrables sur I se note $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ (L est l'initiale du mathématicien LEBESGUE).

Théorème 27. $\left(\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K}), +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
De plus, $f \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x)\, dx$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Démonstration. Montrons que $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C}_{p.m}(\mathrm{I}, \mathbb{K}), +, .)$.

- $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \subset \mathscr{C}_{p.m}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.
- $0 \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.
- Soient $(f, g) \in (\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur I et de plus

$$|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda||f| + |\mu||g|.$$

Puisque la fonction $|\lambda||f| + |\mu||g|$ est réelle, positive et intégrable sur I, il en est de même de la fonction $|\lambda f + \mu g|$. Mais alors, par définition, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I.

On sait alors que $\int_{\mathrm{I}} (\lambda f(x)+\mu g(x))\, dx$ est une intégrale convergente et que $\int_{\mathrm{I}} (\lambda f(x)+\mu g(x))\, dx = \lambda \int_{\mathrm{I}} f(x)\, dx + \mu \int_{\mathrm{I}} g(x)\, dx$.

Théorème 28. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Alors, $\left|\int_{\mathrm{I}} f(x)\, dx\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} |f(x)|\, dx$.

Démonstration. Puisque f est dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ $\left|\int_{\mathrm{I}} f(x)\, dx\right|$ et $\int_{\mathrm{I}} |f(x)|\, dx$. De plus, l'inégalité à démontrer est vraie sur tout segment J contenu dans I. On obtient alors l'inégalité à démontrer par passage à la limite.

---

5) *Produit de fonctions intégrables. L'espace* $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$

Tout d'abord, il ne faut pas croire que le produit de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ mais la fonction $f \times f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

Notation. L'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que f^2 soit intégrable sur I se note $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ (quand f^2 est intégrable sur I, on dit que « f est de carré sommable sur I »).

Théorème 29. Soit $(f, g) \in \left(\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})\right)$. Alors, $f \times g$ est intégrable sur I.

Démonstration. Soient f et g deux éléments de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. En particulier, f et g sont continues par morceaux sur I et donc $f \times g$ est continue par morceaux sur I.

Ensuite, si α et β sont deux nombres complexes, alors $(|\alpha| - |\beta|)^2 \geqslant 0$ et donc

$$|\alpha\beta| \leqslant \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right).$$

Mais alors, $|f \times g| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$. Comme les fonctions $|f|^2$ et $|g|^2$ sont intégrables sur I, il en est de même de la fonction $\frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$ puis de la fonction $|f \times g|$.

Théorème 30. $\left(\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K}), +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Montrons que $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C}_{p.m}(\mathrm{I}, \mathbb{K}), +, .)$.

- $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \subset \mathscr{C}_{p.m}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.
- $0 \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.
- Soient $(f, g) \in (\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur I et de plus

$$|\lambda f + \mu g|^2 = |\lambda|^2|f|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\lambda\overline{\mu}f\overline{g}) + |\mu|^2|g|^2 \leqslant |\lambda|^2|f|^2 + 2|\lambda||\mu||f||g| + |\mu|^2|g|^2.$$

Les fonctions $|f|^2$ et $|g|^2$ sont intégrables sur I par définition et la fonction $|fg|$ est intégrable sur I d'après le théorème précédent. Donc, la fonction $|\lambda|^2|f|^2 + 2|\lambda||\mu||f||g| + |\mu|^2|g|^2$ est intégrable sur I puisque $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Mais alors, la fonction $|\lambda f + \mu g|^2$ est intégrable sur I ou encore la fonction $\lambda f + \mu g$ est dans $L^2(I, \mathbb{K})$.

On a montré que $L^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C}_{p.m}(I, \mathbb{K}), +, .)$.

Théorème 31. (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(f, g) \in \left(L^2(I, \mathbb{R})\right)^2$. Alors

$$\left|\int_I f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_I f^2(x)\,dx} \times \sqrt{\int_I g^2(x)\,dx}.$$

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $P(\lambda) = \displaystyle\int_I (\lambda f(x) - g(x))^2\,dx$.

• Puisque f est g sont dans $L^2(I, \mathbb{R})$ et que $\left(L^2(I, \mathbb{R}), +, .\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pour chaque réel λ, $\lambda f(x) - g(x)$ est dans $L^2(I, \mathbb{R})$ et donc $P(\lambda)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel λ, $P(\lambda) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

• Pour tout réel λ, $P(\lambda) = \lambda^2 \displaystyle\int_I f^2(x)\,dx - 2\lambda \int_I f(x)g(x)\,dx + \int_I g^2(x)\,dx$.

1er cas. Supposons $\displaystyle\int_I f^2(x)\,dx \neq 0$ (et donc $\displaystyle\int_I f^2(x)\,dx > 0$). P est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul. On en déduit que

$$0 \geqslant \Delta' = \left(\int_I f(x)g(x)\,dx\right)^2 - \left(\int_I f^2(x)\,dx\right)\left(\int_I g^2(x)\,dx\right),$$

et donc

$$\left|\int_I f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_I f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_I g^2(x)\,dx}.$$

2ème cas. Supposons $\displaystyle\int_I f^2(x)\,dx = 0$. P est alors une fonction affine de signe constant sur $/mathbbR$. Le coefficient de λ doit donc être nul ce qui fournit $\displaystyle\int_I f(x)g(x)\,dx = 0$. Mais alors, dans ce cas aussi on a $\left|\displaystyle\int_I f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\displaystyle\int_I f^2(x)\,dx}\sqrt{\displaystyle\int_I g^2(x)\,dx}$.

Nous reparlerons de l'espace $L^2(I, \mathbb{R})$ dans le chapitre « espaces préhilbertiens réels ».

