Séries numériques : résumé

Les séries alternées

Définition. On appelle **série alternée** toute série dont le terme général u_n est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = -(-1)^n v_n$ où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle
- décroissante,
- convergente et de limite nulle.

Théorème. (critère spécial aux séries alternées)

Toute série alternée converge.

On obtient avec cette section, les premiers exemples de suites équivalentes telles que les séries correspondantes soient de natures différentes. Par exemple, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ mais $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ diverge car $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Théorème. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle alternée en signe dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant.

On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Alors,

- $\text{sgn}(S) = \text{sgn}(u_0)$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\text{sgn}(S_n) = \text{sgn}(u_0)$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\text{sgn}(R_n) = \text{sgn}(u_{n+1})$.
- $|S| \leqslant |u_0|$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $|S_n| \leqslant |u_0|$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

S, S_n et R_n sont du signe de leur premier terme et en valeur absolue majorés par la valeur absolue de leur premier terme.

La règle de d'Alembert

Théorème. (règle de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

On suppose que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ admet pour limite un certain ℓ élément de $[0,+\infty]$ quand n tend vers $+\infty$. Alors
- Si $0 \leqslant \ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument ;
- Si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge grossièrement ;
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien en conclure.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.

Le **produit de Cauchy** des séries de termes généraux respectifs u_n et v_n **est la série** de terme général w_n où

$$\forall n\in\mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Théorème. (produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.

Si les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent **absolument**, alors le produit de Cauchy de ces deux séries converge et a pour somme $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. Plus explicitement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Attention, le produit de Cauchy de deux séries **absolument** convergentes est une série convergente mais le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente. Par exemple, on peut montrer que le produit de Cauchy de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ par elle-même est une série divergente.

Théorèmes de sommation des relations de comparaison

Théorème. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (resp. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$).

- Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \text{ (resp. } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)\text{).}$$

- Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \text{ (resp. } \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)\text{).}$$

Théorème. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

- Si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général v_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

- Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Dans la pratique, pour donner des équivalents de restes de séries à termes positifs convergentes ou de sommes partielles de séries à termes positifs divergentes, on dispose de deux techniques : les théorèmes de sommations des relations de comparaison ou bien un encadrement par des intégrales. Par exemple, si on veut un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, on peut ou bien démarrer avec $\dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{k(k-1)}$ puis $R_n \sim \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$, ou bien démarrer avec $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2}$ puis $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ ...