Convexité : résumé

Barycentres

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $a_1, \ldots, a_n$ n éléments de E. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \neq 0$.
Le **barycentre du système de points pondérés** $(a_1(\lambda_1), \ldots, a_n(\lambda_n))$ est $g = \dfrac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$.
Le barycentre du système $(a_1(\lambda_1), \ldots, a_n(\lambda_n))$ se note $\mathrm{bar}(a_1(\lambda_1), \ldots, a_n(\lambda_n))$.

Théorème. g est l'unique point de E vérifiant $\lambda_1 \overrightarrow{ga_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{ga_n} = \overrightarrow{0}$.

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $a_1, \ldots, a_n$ n éléments de E. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \neq 0$. Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors

$$\mathrm{bar}(a_1(k\lambda_1), \ldots, a_n(k\lambda_n)) = \mathrm{bar}(a_1(\lambda_1), \ldots, a_n(\lambda_n)).$$

On peut donc toujours se ramener au cas où la somme des coefficients est égale à 1.

Convexes

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient a et b deux éléments de E.
Le segment $[a, b]$ est $\{(1-\lambda)a + \lambda b,\ \lambda \in [0, 1]\}$ ou encore $\{\mathrm{bar}(a(1-\lambda), b\lambda),\ \lambda \in [0, 1]\}$.

Définition. Soit $\mathscr{C}$ une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $\mathscr{C}$ est **convexe** si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathscr{C}^2$, $[x, y] \subset \mathscr{C}$ ou encore si et seulement si $\forall (x, y) \in \mathscr{C}^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in \mathscr{C}$.

Convention. $\varnothing$ est convexe.

Théorème. Soit $\mathscr{C}$ une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $\mathscr{C}$ est **convexe** si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{C}^n,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0, 1]^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathscr{C}\right).$$

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient I un ensemble non vide d'indices puis $(\mathscr{C}_i)_{i \in I}$ une famille de convexes de E indexée par I. Alors $\bigcap_{i \in I} \mathscr{C}_i$ est un convexe de E.

Théorème et définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathscr{A}$ une partie de E. Il existe une plus petite partie convexe (au sens de l'inclusion) contenant $\mathscr{A}$.
Le plus petit convexe (au sens de l'inclusion) de E contenant $\mathscr{A}$ s'appelle l'**enveloppe convexe** de $\mathscr{A}$ et se note $\mathrm{conv}(\mathscr{A})$.

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide de E. L'enveloppe convexe de $\mathscr{A}$ est l'ensemble des $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{A}^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
Dit autrement, $\mathrm{conv}(\mathscr{A})$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'éléments de $\mathscr{A}$.

Fonctions convexes

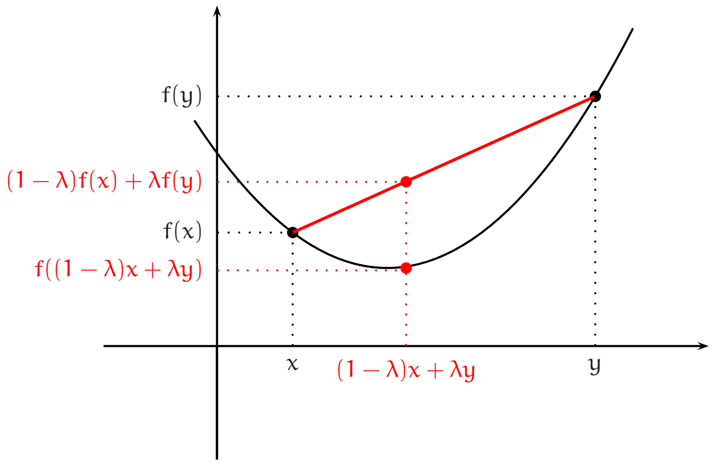
Définitions

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.
f est concave sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ (f est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I).

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est **strictement convexe** sur I si et seulement si si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2$ tel que $x \neq y$, $\forall \lambda \in]0, 1[$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.
On dit que f est **strictement convave** sur I si et seulement si si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2$ tel que $x \neq y$, $\forall \lambda \in]0, 1[$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) > (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.



Théorème. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in I^n,\ \forall (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in [0,1]^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right).$$

Théorème. (Caractérisation par la « fonction pente »). Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall x_0 \in I,\ \text{« la fonction pente en } x_0 \text{ »}\quad \varphi_{x_0} : \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \quad \text{est croissante sur } I \setminus \{x_0\}.$$

f est strictement convexe sur I si et seulement si la fonction pente en tout x_0 de I est strictement croissante sur I.

Théorème 10. (Cas des fonctions dérivables). Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f est dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si f' est une fonction croissante sur I.
f est concave sur I si et seulement si f' est une fonction décroissante sur I.

Théorème. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f est dérivable sur I.

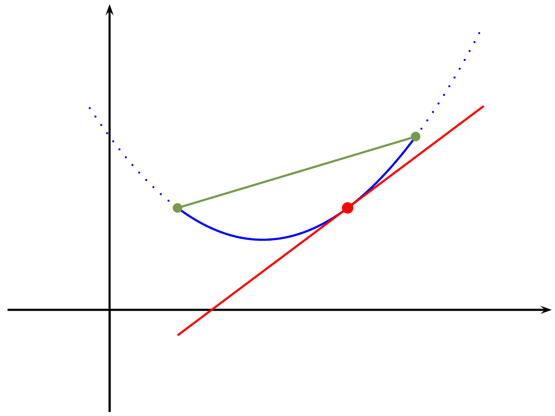
f est strictement convexe sur I si et seulement si f' est une fonction strictement croissante sur I.
f est strictement concave sur I si et seulement si f' est une fonction strictement décroissante sur I.

Théorème. (cas des fonctions deux fois dérivables). Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geqslant 0$.
f est concave sur I si et seulement si $f'' \leqslant 0$.

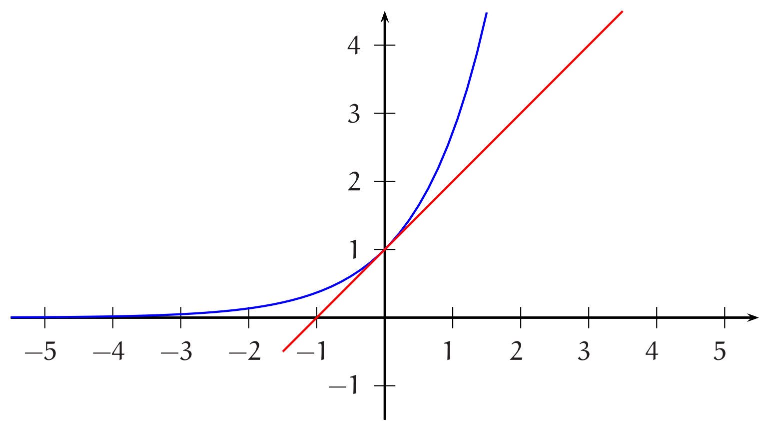
Si $f'' > 0$ sur I sauf peut-être en un nombre fini de points, alors f est strictement convexe sur I.
Si $f'' < 0$ sur I sauf peut-être en un nombre fini de points, alors f est strictement concave sur I.

Le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes et au-dessous de ses cordes.

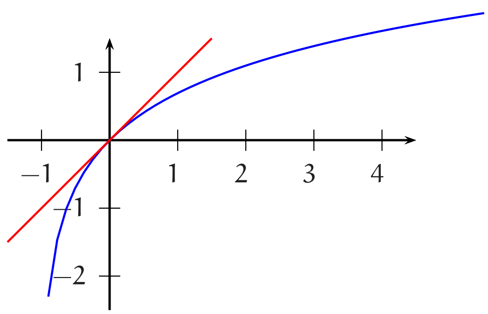


Cette constatation explicitement utilisée fournit des inégalités appelées « inégalités de convexité ». Inégalités de convexité classiques à connaître :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ e^x > 1 + x.}$$



$$\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1 + x) \leqslant x \text{ et } \forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[,\ \ln(1 + x) < x.}$$



$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.}$$