SESSION 2015

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Problème 1

Partie A

I. 1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\mathrm{Re}(z) \leqslant |\mathrm{Re}(z)| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2} \leqslant \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} = |z|.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si chaque inégalité écrite est une égalité. La deuxième inégalité est une égalité si et seulement si $(\mathrm{Im}(z))^2 = 0$ ce qui équivaut au fait que z est réel. La première inégalité est une égalité si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$.

Finalement, $\mathrm{Re}(z) = |z|$ si et seulement si z est un réel positif.

I. 2. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2 \\ &\leqslant |z_1|^2 + 2\left|\overline{z_1}z_2\right| + |z_2|^2 \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= |z_1|^2 + 2\left|\overline{z_1}\right||z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2.\end{aligned}$$

Mais alors, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

I. 3. Soient z_1 et z_2 deux nombre complexes non nuls. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si la seule inégalité écrite à la question précédente est une égalité. D'après la question I.1.,

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right) = \left|\overline{z_1}z_2\right| \Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}^{+*} \text{ (car } \overline{z_1}z_2 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}z_2 \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^{+*} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda > 0/\ \frac{z_1}{z_2} = \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda > 0/\ z_2 = \lambda z_1.\end{aligned}$$

On en déduit encore que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = 0\ [2\pi]$.

II. 1. Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $\forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

- Ce résultat est vrai quand $n = 2$ d'après la question I.2.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$. Soit alors $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \text{ (d'après la question I.2.)} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $\forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

II. 2. Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $\forall (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_k = \lambda_k z_1$.

- Ce résultat est vrai quand $n = 2$ d'après la question I.3.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\forall (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_k = \lambda_k z_1$.

Soit $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. On a

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|,$$

et, puisque $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$, chaque inégalité écrite est une égalité. Puisque la deuxième inégalité est une égalité, par hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_k = \lambda_k z_1$. Puisque la première inégalité est une égalité, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} z_k = \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1$ et donc $\exists \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_{n+1} = \lambda_{n+1} z_1$.

Réciproquement, supposons que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_k = \lambda_k z_1$. Alors,

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k z_1\right| = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\right) |z_1| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

On en déduit encore que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $\arg\left(\dfrac{z_k}{z_1}\right) = 0\ [2\pi]$.

Partie B

I. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $z_k = e^{\frac{2i(k-1)\pi}{n}}$.

(i) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k \neq 0$.

(ii) On sait que les z_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont deux à deux distincts.

(iii) Puisque $n \geqslant 3$, on sait que les A_k ne sont pas alignés sur une droite.

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2i(k-1)\pi}{n}} = \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0.$

Donc, les z_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, conviennent.

II. 1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}\,(z - z_k) = z\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} z_k = z \times 0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{|z_k|} = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

II. 2. Puisque $\sum_{k=1}^{n} |z_k|$ est un réel positif,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} -\overline{u_k}\,(z-z_k)\right| \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n} |-\overline{u_k}\,(z-z_k)| = \sum_{k=1}^{n} |-\overline{u_k}|\,|z-z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z-z_k|\,.\end{aligned}$$

Donc, pour tout nombre complexe z, $\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z-z_k|$.

II. 3. Soit z un nombre complexe distinct de chacun des z_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $-\overline{u_k}\,(z-z_k) \neq 0$ et d'après la question II.2. de la partie A,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z-z_k| \Leftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} -\overline{u_k}\,(z-z_k)\right| = \sum_{k=1}^{n} |-\overline{u_k}\,(z-z_k)| \\ \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*}/\ -\overline{u_k}\,(z-z_k) = -\lambda_k \overline{u_1}\,(z-z_1)\,.\end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} -\overline{u_k}\,(z-z_k) = -\overline{u_1}\,(z-z_1)\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et donc $\overline{u_1}\,(z-z_1) = -\dfrac{\sum_{k=1}^{n} |z_k|}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \in \mathbb{R}^{-*}$ puis $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$\overline{u_k}\,(z-z_k) = \lambda_k \overline{u_1}\,(z-z_1) \in \mathbb{R}^{-*}$.

Réciproquement, si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\overline{u_k}\,(z-z_k) \in \mathbb{R}^{-*}$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $-\overline{u_k}\,(z-z_k) \in \mathbb{R}^{+*}$ puis

$$\sum_{k=1}^{n} |z-z_k| = \sum_{k=1}^{n} |-\overline{u_k}\,(z-z_k)| = \sum_{k=1}^{n} -\overline{u_k}\,(z-z_k) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|\,.$$

Si maintenant z est l'un des z_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $-\overline{u_k}\,(z-z_k) = 0$ et $\forall j \neq k$, $-\overline{u_j}\,(z-z_j) \neq 0$. En reprenant l'étude précédente, on a l'égalité si et seulement si $\overline{u_k}\,(z-z_k) = 0$ et $\forall j \neq k$, $\overline{u_j}\,(z-z_j) \in \mathbb{R}^{-*}$. En résumé,

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left(\sum_{k=1}^{n} |z-z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \overline{u_k}\,(z-z_k) \in \mathbb{R}^{-}\right).$$

II. 4. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\overline{u_k}\,(z-z_k) = \dfrac{z-z_k}{u_k} = |z_k|\dfrac{z-z_k}{z_k} = -|z_k|\dfrac{z-z_k}{0-z_k}$ ($\overline{u_k} = \dfrac{1}{u_k}$ car $|u_k| = 1$). Donc,

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1,n]\!],\ \overline{u_k}\,(z-z_k) \in \mathbb{R}^{-} &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{z-z_k}{0-z_k} \in \mathbb{R}^{+} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ M = A_k \text{ ou } M \neq A_k \text{ et } \left(\overrightarrow{A_kO}, \overrightarrow{A_kM}\right) = 0\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ M \in [A_kO)\ \text{ (on rappelle que } \forall k \in [\![1,n]\!],\ A_k \neq O) \\ &\Leftrightarrow M = O \text{ (car deux au moins des demi-droites } [A_kO) \text{ sont sécantes en } O).\end{aligned}$$

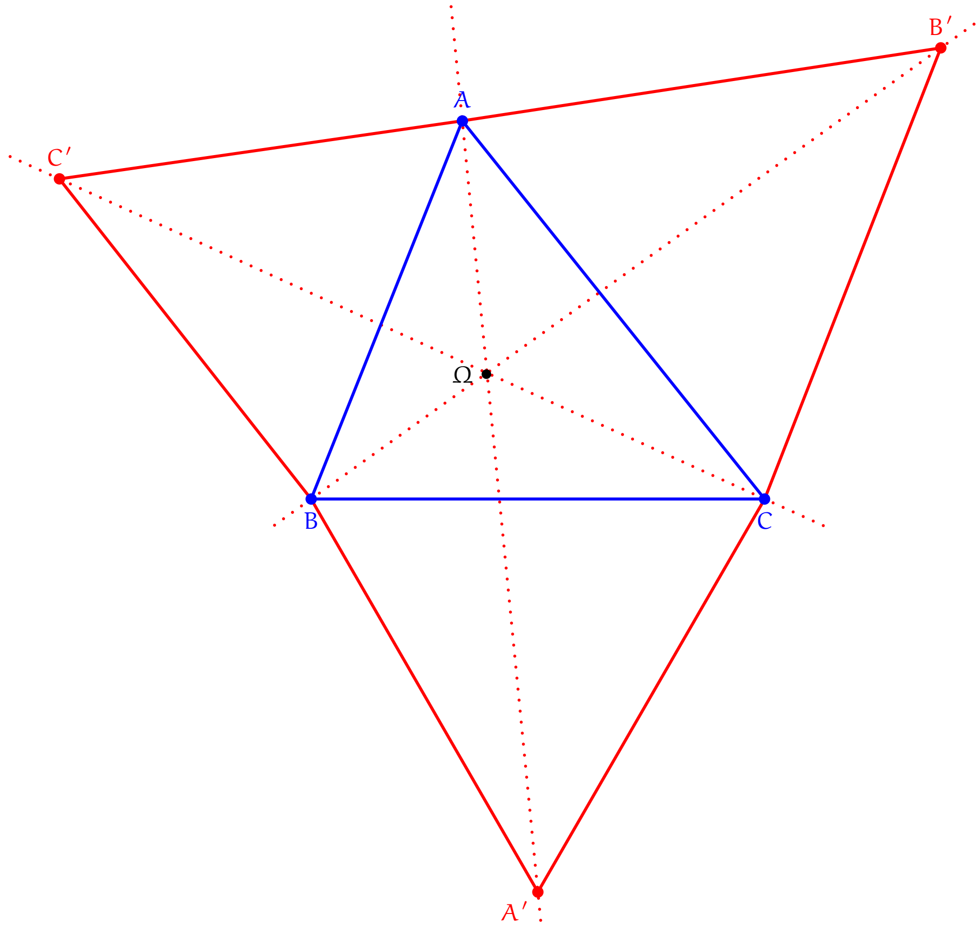
Donc, $(\star)$ est une égalité si et seulement si $M = O$ ou encore $z = 0$

II. 5. $\sum_{k=1}^{n} MA_k = \sum_{k=1}^{n} |z-z_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} OA_k$ avec égalité si et seulement si $z = 0$ ou encore $M = O$.

Donc, $\sum_{k=1}^{n} MA_k$ admet un minimum à savoir $\sum_{k=1}^{n} OA_k$ et ce minimum est atteint en un unique point à savoir $M = O$.

Partie C

I. Figure.



II. $B' = r_{A,\frac{\pi}{3}}(C)$. Donc, $b' = a + e^{\frac{i\pi}{3}}(c-a) = a - j^2(c-a)$. De même, $B = r_{A,\frac{\pi}{3}}(C')$ et donc $b = a + e^{\frac{i\pi}{3}}(c'-a) = a - j^2(c'-a)$.

III. $\dfrac{b'-b}{c-c'} = \dfrac{e^{\frac{i\pi}{3}}(c-a) - e^{\frac{i\pi}{3}}(c'-a)}{c-c'} = \dfrac{e^{\frac{i\pi}{3}}(c-c')}{c-c'} = e^{\frac{i\pi}{3}}$. Donc, $\dfrac{b'-b}{c-c'}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

IV. Puisque Ω est strictement compris à l'intérieur au triangle ABC et que les points B' et C' sont extérieurs à ce triangle, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{B'B}$ sont non nuls, colinéaires et de même sens de même que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega C}$ et $\overrightarrow{C'C}$. Donc,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) &= \left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}\right) = \arg\left(\frac{c-c'}{b-b'}\right)\ [2\pi] = -\arg\left(\frac{b-b'}{c-c'}\right)\ [2\pi] = -\arg\left(-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\ [2\pi]\\ &= -\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)\ [2\pi]\\ &= \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

En échangeant les rôles des points A, B et C, on obtient finalement $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

V. Notons a, b et c les affixes respectives des vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A}$, $\dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B}$ et $\dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C}$.

D'après la question précédente, a, b et c sont trois nombres complexes de module 1 tels que $\arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{c}{b}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Donc, $b = ja$ et $c = jb = j^2a$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ puis

$$a + b + c = a\left(1 + j + j^2\right) = 0$$

ou encore $\dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \overrightarrow{0}$.

VI. On choisit un repère orthonormé direct d'origine Ω. Les conditions de la partie B sont vérifiées par les points $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_3 = C$ car, entre autres, l'égalité $\dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \overrightarrow{0}$ s'écrit $\dfrac{z_A}{|z_A|} + \dfrac{z_B}{|z_B|} + \dfrac{z_C}{|z_C|} = 0$.

D'après la partie B, pour tout point M du plan, $MA+MB+MC \geqslant \Omega A+\Omega B+\Omega C$ avec égalité si et seulement si $M = \Omega$.

Problème 2

Partie A

I. 1. Questions de cours. Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, A n'est pas un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0} > A$.

On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

I. 2. Soit $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Donc, E admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure que l'on note ℓ.

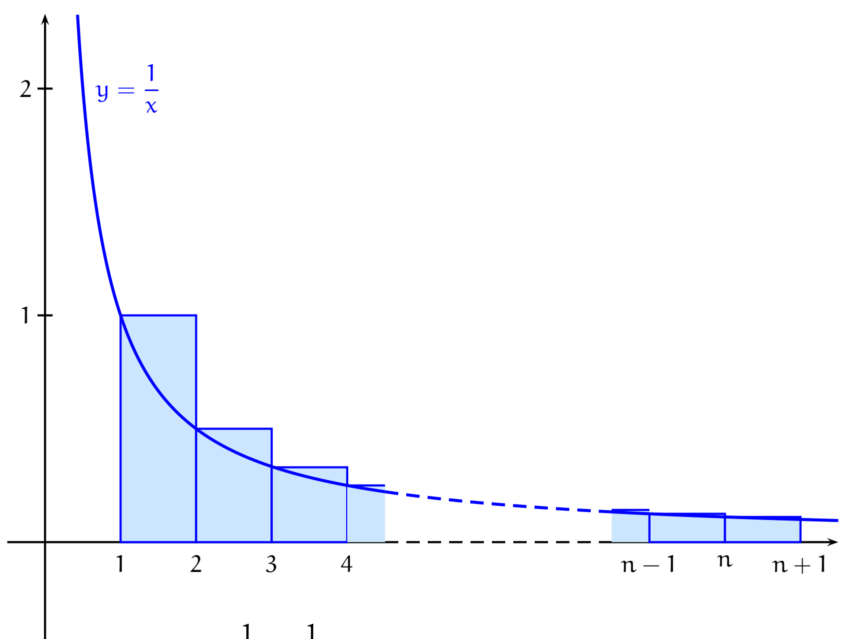
Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ. Puisque ℓ est un majorant de E, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque ℓ est le plus petit des majorants de E, $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell - \varepsilon$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0} > \ell - \varepsilon$ et donc $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell$.
On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell)$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

I. 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Alors, la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après la question précédente,

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow (-u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow (-u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée} \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée.}$$

Une suite décroissante converge si et seulement si elle est minorée.

II. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. a_n est la somme des aires, exprimées en unité d'aire, des rectangles ci-dessous :



II. 2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n - (n+1)) \times \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} - a_n \geqslant \frac{1}{2}.}$$

II. 2. b. Supposons par l'absurde que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons ℓ sa limite. Quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question précédente, on obtient $\ell - \ell \geqslant \frac{1}{2}$ ou encore $0 \geqslant \frac{1}{2}$. Ceci est absurde et donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

II. 3. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $[k, k+1] \subset]0, +\infty[$. Pour tout réel t de $[k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k)\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant (k+1-k)\frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

II. 3. b. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 1$ car $a_1 = 1$ et $\ln 1 = 0$.
Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$ ou encore $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\,dt$ ou enfin $a_n - 1 \leqslant \ln n$.
D'autre part, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{k}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ou encore $\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant a_n$ ou encore $\ln(n+1) \leqslant a_n$ ou enfin $\ln n \leqslant a_n$ car $\ln n \leqslant \ln(n+1)$.
On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant a_n.}$$

II. 3. c. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln n \leqslant a_n \leqslant \ln n + 1$ puis

$$\forall n \geqslant 2,\ 1 \leqslant \frac{a_n}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\frac{a_n}{\ln n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ ou encore

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

II. 4. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant a_n - \ln n \leqslant 1$. Donc, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$. D'après la question II.3.a., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.
La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et est minorée par 0. Donc, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel positif ou nul.

Partie B

I. 1. a. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $k \geqslant n_0$, $-\varepsilon \leqslant u_k \leqslant \varepsilon$. Soit $n \geqslant n_0 + 1$. En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient $\sum_{k=n_0+1}^{n} -\varepsilon \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \varepsilon$ ou encore $-(n-n_0)\,\varepsilon \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant (n-n_0)\,\varepsilon$ ce qui implique $-n\varepsilon \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant n\varepsilon$.

On en déduit que $\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - n\varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + n\varepsilon$ puis que $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$. Cet encadrement reste vrai quand $n = n_0$ et donc

$$\forall n \geqslant n_0,\ \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon.$$

I. 1. b. Soit $n \geqslant n_0$. Donc, $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$.

$\sum_{k=1}^{n_0} u_k$ est une expression constante quand n varie et donc $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $-\varepsilon \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) \leqslant \varepsilon$.

Soit $n = \mathrm{Max}\{n_0, n_1\}$. Pour $n \geqslant N$, on a $-2\varepsilon \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^* / \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n \geqslant N \Rightarrow -2\varepsilon \leqslant v_n \leqslant 2\varepsilon)$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

I. 2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel ℓ. Alors, la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. D'après la question précédente, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ou encore $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

$$\boxed{\text{Si la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \ell, \text{ alors la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \ell.}$$

II. 1. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, x_n existe et $0 < x_n < 1$.

- $x_2 = \frac{1 \times (1+1)}{1+2} = \frac{2}{3}$. Donc, le résultat est vrai pour $n = 2$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que x_n existe et $0 < x_n < 1$. Alors, $1 + 2x_n \neq 0$ puis x_{n+1} existe puis $x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} > 0$. Ensuite,

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} - 1 = \frac{x_n^2 - x_n - 1}{1+2x_n} = \frac{\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}}{1+2x_n}.$$

Par hypothèse de récurrence, $x_n \in]0,1[$ puis $\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$ puis $\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$ et finalement $x_{n+1} - 1 < 0$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, x_n existe et $0 < x_n < 1$ et donc aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n \leqslant 1$.

II. 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $x_n > 0$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} \leqslant \frac{x_n(1+2x_n)}{1+2x_n} = x_n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \leqslant x_n$ et donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

II. 3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel $\ell \geqslant 0$. Puisque $\ell \geqslant 0$, $1 + 2\ell \neq 0$ et donc, quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}$, on obtient $\ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell}$. Or,

$$\ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell} \Leftrightarrow \frac{\ell(1+2\ell) - \ell(1+\ell)}{1+2\ell} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell^2}{1+2\ell} = 0 \Leftrightarrow \ell = 0.$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = 0.}$$

II. 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. x_n et x_{n+1} ne sont pas nuls puis

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n}{x_n(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n - (1+x_n)}{x_n(1+x_n)} = \frac{x_n}{x_n(1+x_n)} = \frac{1}{1+x_n}.$$

II. 5. D'après les questions II.3. et II.4., $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+0} = 1$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

II. 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_1}\right) \text{ (somme télescopique).}$$

On en déduit que $x_n = \dfrac{1}{nv_{n-1} + \dfrac{1}{x_1}} = \dfrac{1}{nv_{n-1}+1}$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 d'après la question I.2. et donc $x_n = \dfrac{1}{nv_{n-1}+1} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n(1+o(1))+1} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n+o(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

III. 1. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel ℓ, alors $x_{n+1} - x_n$ tend vers $\ell - \ell = 0$ quand n tend vers $+\infty$ et en particulier, la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

III. 2. a. Pour $n \geqslant 1$, posons $y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k)$. Pour $n \geqslant 1$, $y_n = \dfrac{1}{n}(x_{n+1} - x_1)$ (somme télescopique) puis pour $n \geqslant 2$, $x_n = (n-1)y_{n-1} + x_1$ et donc

$$\frac{x_n}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)y_{n-1} + x_1.$$

Puisque $x_{n+1} - x_n$ tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, il en est de même y_{n-1} d'après le lemme de CÉSARO. On en déduit que $\dfrac{x_n}{n}$ tend vers $(1-0)\ell + 0 = \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \ell.}$$

III. 2. b. Si $\ell \neq 0$, on en déduit que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell n$ et en particulier, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge. Plus précisément, si $\ell > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et si $\ell < 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

III. 2. c. Pour $n \geqslant 1$, posons $x_n = \ln(n)$. $x_{n+1} - x_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pourtant, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge. Donc, si $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.

Partie C

I. 1. Pour $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = -\frac{1-(-1)^n}{2n} = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ est impair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Mais alors, $\forall n \geqslant 1$, $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

I. 2. Pourtant, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge car la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $-1 \neq 1$.

La réciproque de la proposition énoncée à la question I.2. de la partie B est fausse.

II. 1. Si $\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$, alors $\forall n \geqslant 1$, $u_n = 0$ puis $\forall n \geqslant 1$, $v_n = 0$. Dans ce cas, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.

II. 2. Soit $n \geqslant 1$.

$$u_{n+2} - u_n = \sin((n+2)\alpha) - \sin(n\alpha) = 2\sin\alpha\cos((n+1)\alpha) = 2\sin\alpha c_{n+1}$$

et

$$u_{n+2} + u_n = \sin((n+2)\alpha) + \sin(n\alpha) = 2\cos\alpha\sin((n+1)\alpha) = 2\cos\alpha u_{n+1}$$

II. 3. a. Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Puisque $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, $\sin\alpha \neq 0$. Par suite, pour $n \geqslant 2$, $c_n = \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\sin\alpha}$ d'après la première relation de la question précédente. Quand n tend vers $+\infty$, c_n tend vers $\dfrac{\ell-\ell}{2\sin\alpha} = 0$. Donc, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Quand n tend vers $+\infty$ dans la deuxième relation, on obtient $2\ell = 2\cos\alpha\ell$ puis $(1-\cos\alpha)\ell = 0$ et donc $\ell = 0$ car $\cos\alpha \neq 1$.

II. 3. b. Ainsi, les suites $(u_n)_{n\geqslant 1} = (\sin(n\alpha))_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1} = (\cos(n\alpha))_{n\geqslant 1}$ convergent toutes les deux vers 0 puis la suite $\left(u_n^2 + c_n^2\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $0^2 + 0^2 = 0$.

Mais ceci est impossible car pour tout $n \geqslant 1$, $u_n^2 + c_n^2 = 1$. Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

II. 3. c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\sin}(k\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}\left(e^{ik\alpha}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\alpha}\right)^k\right)\\
&= \frac{1}{n}\mathrm{Im}\left(e^{i\alpha}\frac{1-e^{in\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right) \text{ (car } \alpha \not\equiv 0 \text{ (mod } \pi \Rightarrow e^{i\alpha} \neq 1)\\
&= \frac{1}{n}\mathrm{Im}\left(e^{i\alpha\left(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}\frac{e^{-in\alpha/2}-e^{in\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2}-e^{i\alpha/2}}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Im}\left(e^{i(n+1)\alpha/2}\frac{-2i\sin(n\alpha/2)}{-2i\sin(\alpha/2)}\right)\\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{n\alpha}{2}\right)}{n\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n\left|\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right|}$ et en particulier que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

III. 1. Soit $n \geqslant 1$.

$$nu_{n+1} = (2n-(n+1))u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

III. 2. Soit $n \geqslant 1$.

$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \frac{1}{n}\left(2nv_{2n} - nv_n\right) = 2v_{2n} - v_n.$$

III. 3. Par hypothèse, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain réel ℓ. On en déduit que $2nv_{2n} - v_n$ tend vers $2\ell - \ell = \ell$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite, à partir d'un certain rang n_0, on a $u_{n+1} \leqslant 2v_{2n} - v_n \leqslant \ell + 1$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant \ell + 1$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, en appliquant le résultat précédent à la suite $(-u_n)_{n\geqslant 1}$ qui est croissante, on obtient de même la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. On a donc montré que

$$\boxed{\text{si la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est monotone, alors la suite } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge si et seulement si la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$