SESSION 2014

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Problème 1 : sommes de Riemann

Partie A : convergence des sommes de Riemann

1. La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ et donc uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine.

Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ est un réel strictement positif. Donc, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, si $|x-y| \leqslant \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 / \ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$.

2.1. Soit $N = E\left(\dfrac{b-a}{\eta}\right) + 1$. Alors N est un entier naturel non nul tel que $N \geqslant \dfrac{b-a}{\eta}$.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant N$. Alors $n \geqslant N \geqslant \dfrac{b-a}{\eta}$ puis $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \eta$.

Soient $k \in [\![0, n-1]\!]$ puis $t \in [x_k, x_{k+1}]$.

$$|t - x_k| \leqslant |x_{k+1} - x_k| = \frac{b-a}{n} \leqslant \eta,$$

et donc $|f(t) - f(x_k)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. On a montré que

$$\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in [x_k, x_{k+1}],\ |f(t) - f(x_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

2.2. Soient $n \geqslant N$ puis $k \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque $x_k \leqslant x_{k+1}$, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\, dt\right| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\, dt \leqslant (x_{k+1} - x_k) \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{b-a}{n} \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{n}.$$

Soit de nouveau $n \geqslant N$. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\ dt - (b-a)S_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt - \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\, f(x_k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ dt\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

3. On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant N \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt - (b-a)S_n(f)\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Ainsi, la suite $((b-a)S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ ou encore la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n(f)=\frac{-f(x_0)+f(x_n)}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)=\frac{f(b)-f(a)}{n}+S_n(f)$$

et donc, puisque $\dfrac{f(b)-f(a)}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En posant $j=n+k$, on obtient

$$u_n=\sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}.$$

Posons $a=0$, $b=1$, puis pour tout x de $[a,b]=[0,1]$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, posons $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{k}{n}$. Alors,

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=R_n(f).$$

Puisque la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ en tant que fraction rationnelle définie sur $[0,1]$, la somme de Riemann $R_n(f)$ converge et a pour limite $\dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2$.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{j}=\ln 2.$$

5.

5.1. La fonction f' est définie et continue sur le segment $[0,1]$. On en déduit que la fonction f' est bornée sur $[0,1]$. Par suite, il existe un réel M tel que, pour tout réel t de $[0,1]$, $|f'(t)|\leqslant M$.

5.2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $k\in[\![0,n-1]\!]$ puis $t\in[x_k,x_{k+1}]$. Les réels t et x_k sont éléments de $[a,b]$, f est dérivable sur $[a,b]$ et $|f'|$ est majorée sur $[a,b]$ par le réel M. D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(t)-f(x_k)|\leqslant M\,|t-x_k|=M\,(t-x_k)$.

5.3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(t)-f(x_k))\,dt\right|&\leqslant\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(t)-f(x_k)|\,dt\leqslant\int_{x_k}^{x_{k+1}}M\,(t-x_k)\,dt=M\left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}\\&=M\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2}=\frac{M(b-a)^2}{2n^2}.\end{aligned}$$

puis, comme à la question 2.2.,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt-(b-a)S_n(f)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(t)-f(x_k))\,dt\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M(b-a)^2}{2n^2}=n\times\frac{M(b-a)^2}{2n^2}=\frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

6.

6.1. f est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et pour tout réel x de $[0,1]$, $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ puis $f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$. La fonction f'' est négative sur $\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right]$. On en déduit que la fonction f' est croissante sur $\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right]$. Mais alors, pour tout réel x de $[0,1]$, $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\leqslant f'(x)\leqslant\mathrm{Max}\{f'(0),f'(1)\}=0$ et donc $|f'(x)|\leqslant -f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}e^{-1/2}=\sqrt{\dfrac{2}{e}}$.

6.2. D'après la question 5.3, pour tout entier naturel non nul n,

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx-(1-0)S_n(f)\right|=\left|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k^2/n^2}\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{e}}\frac{(1-0)^2}{2n}=\frac{1}{\sqrt{2e}}\times\frac{1}{n}.$$

Soit alors $\varepsilon>0$.

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx-(1-0)S_n(f)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{2e}}\times\frac{1}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{e}}$$
$$\Leftarrow n = E\left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{e}}\right)+1.$$

Pour cette valeur de n, la valeur exacte de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k^2/n^2}$ est une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ près et donc une valeur approchée à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ près de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k^2/n^2}$ est une valeur approchée à ε près de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Algorithme.

Variables	e est un réel strictement positif n est un entier naturel non nul k est un entier naturel S est un réel
Initialisation	Demander e Affecter à n la valeur $E\left(\sqrt{2}/\left(e*\sqrt{\exp(1)}\right)\right)+1$ Affecter à S la valeur 0
Traitement	Pour k variant de 0 à $n-1$ Affecter à S la valeur $S+\exp\left(-k^2/n^2\right)$ Fin du Pour Afficher une valeur décimale approchée à $e/2$ près de S/n Fin

Partie B : application à l'étude de suites

1. Soit $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right] \subset]0,1]$. Donc, f est définie, continue et décroissante sur $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$. Par suite, pour t de $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant f(t) \leqslant f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. En intégrant, on obtient

$$\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leqslant \left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ou encore

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. En additionnant membres à membres les inégalités précédentes, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1+1}{n}} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ou encore

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant I\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Mais alors, $r_n - \dfrac{f(1)}{n} \geqslant I\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $r_n - \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant I\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ou encore

$$I\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{f(1)}{n} \leqslant I\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant r_n \leqslant I\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0} I(x) = \ell$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0} xf(x) = 0$. Enfin, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(1)}{n} = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{f(1)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)=\ell$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=\ell$.

4.

4.1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
r_n&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}1-\frac{1}{2n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\times 4n^3}-\frac{n}{4n}-\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)=\frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)
\end{aligned}$$

4.2. La fonction f est définie et continue sur $]0,1]$. f est dérivable sur $]0,1]$ et pour $x\in]0,1]$,

$$f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}=\frac{x^2-1}{2x}.$$

La fonction f' est négative sur $]0,1]$ et donc la fonction f est décroissante sur $]0,1]$. Ensuite, $xf(x)=\frac{x^3-x}{4}-\frac{1}{2}x\ln x$ tend vers 0 quand x tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. Enfin, pour $x\in]0,1]$,

$$\int_x^1 f(t)\,dt=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)-\frac{1}{2}(t\ln t-t)\right]_x^1=\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x\right)-\frac{1}{2}(x\ln x-x)\right).$$

Quand x tend vers 0, cette expression tend vers $\ell=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. D'après la question 3, on peut affirmer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=\frac{1}{3}$.

D'après la question 4.1, pour $n\geqslant 1$,

$$\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)=\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2}-\frac{1}{2}-2r_n,$$

puis

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}=\exp\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2}-\frac{1}{2}-2r_n\right).$$

On en déduit que la suite $\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}=\exp\left(\frac{2}{12}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{e}.$$

Partie C : une suite d'intégrales

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. Pour tout x de $\left[\frac{k\pi}{n},\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, $nx\in[k\pi,(k+1)\pi]$ et donc $|\sin(nx)|=(-1)^k\sin(nx)$ puis

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}|\sin(nx)|\,dx&=(-1)^k\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}\sin(nx)\,dx=(-1)^k\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}\\
&=\frac{(-1)^k}{n}\left(-\cos((k+1)\pi)+\cos(k\pi)\right)=\frac{(-1)^k}{n}\left(-(-1)^{k+1}+(-1)^k\right)=\frac{(-1)^k}{n}\times 2(-1)^k=\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

2.

2.1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. Puisque est croissante sur $[0,\pi]$ et que $\left[\frac{k\pi}{n},\frac{(k+1)\pi}{n}\right]\subset[0,\pi]$, pour tout réel x de $[0,\pi]$,

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

puis, après multiplication des trois membres de l'encadrement par le réel positif $|\sin(nx)|$,

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right)|\sin(nx)| \leqslant f(x)|\sin(nx)| \leqslant f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)|\sin(nx)|.$$

En intégrant, on obtient

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\ dx \leqslant \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\ dx \leqslant f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\ dx.$$

ou encore

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\ dx \leqslant \frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

2.2. En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\ dx \leqslant \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

ou encore

$$2S_n(g) \leqslant \int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\ dx \leqslant 2R_n(g)$$

ou g est la fonction $g\ :\ \begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\pi x) \end{array}$.

2.3. Puisque la fonction g est continue sur le segment $[0,1]$, les deux membres tend vers $2\int_0^1 g(t)\ dt = 2\int_0^1 f(\pi t)\ dt$ ou encore, en posant $x = \pi t$, les deux membres tend vers $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ dx$.

D'après le théorème des gendarmes, la suite $\left(\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ dx$.

2.4. Si la fonction f est continue et décroissante sur $[0,\pi]$, la fonction $-f$ est continue et croissante sur $[0,\pi]$. Donc, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} -f(x)|\sin(nx)|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -f(x)\ dx$ puis $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ dx$ par linéarité de l'intégrale. On obtient donc le même résultat dans ce cas aussi.

Partie D : une application aux probabilités

1.

1.1. Soit $(k,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Les deux fonctions $x \mapsto x^k$ et $x \mapsto -\frac{1-x)^{m+1}}{m+1}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
I_{k,m} &= \int_0^1 x^k(1-x)^m\ dx = \left[x^k \times -\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 kx^{k-1} \times -\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1}\ dx \\
&= \frac{k}{m+1}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{m+1}\ (0^k = (1-1)^{m+1} = 0 \text{ car } k \geqslant 1 \text{ et } m+1 \geqslant 1) \\
&= \frac{k}{m+1} I_{k-1,m+1}.
\end{aligned}$$

1.2. Soit $(k,m) \in \mathbb{N}^2$.

$$I_{0,k+m} = \int_0^1 x^0(1-x)^{k+m}\ dx = \left[-\frac{(1-x)^{k+m+1}}{k+m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+m+1}.$$

Par suite, pour $k \geqslant 1$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$I_{k,m} = \frac{k}{m+1} \times \frac{k-1}{m+2} \times \ldots \times \frac{1}{m+k} \times I_{0,m+k} = \frac{k \times (k-1) \times \ldots \times 1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k+1)} = \frac{k!m!}{(m+k+1)!}$$

ce qui reste vrai quand $k = 0$.

2. La variable aléatoire X est régie par une loi binomiale de paramètres n et p. En effet,
- on effectue n fois une même expérience de manière indépendante
- chaque expérience à deux éventualités à savoir « obtenir une boule rouge » avec une probabilité p et « ne pas obtenir une boule rouge » avec une probabilité $1-p$.

On sait alors que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ et que $E(X) = np$.

3.

3.1. Pour $j \in [\![1, N]\!]$, notons U_j la probabilité que l'urne choisie soit l'urne n° j. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_N = k) &= \sum_{j=1}^{N} P(U_j) \times P_{U_j}(X_N = k) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

3.2.

$$\begin{aligned} E(X_N) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X_N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}\right) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} n \times \frac{j}{N} \text{ (l'espérance de la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{j}{N} \text{ est } n \times \frac{j}{N}) \\ &= \frac{n}{N^2} \times \frac{N(N+1)}{2} = \frac{n(N+1)}{2N}. \end{aligned}$$

En particulier, $\lim\limits_{N \to +\infty} E(X_N) = \frac{n}{2}$.

3.3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in [\![0, n]\!]$. Pour $x \in [0, 1]$, posons $f(x) = x^k (1-x)^{n-k}$. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc, quand N tend vers $+\infty$, la somme de Riemann

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{j}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k},$$

tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = I_{k,n-k} = \frac{k!(n-k)!}{(k+n-k+1)!} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$ d'après la question 1.2. Comme

$$p_N(k) = \binom{n}{k} \times \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}$$

on a donc

$$\lim_{N \to +\infty} P_N(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, la suite de variables aléatoires $(X_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population

Partie A : la fonction exponentielle

1.

1.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f(x) \times f(-x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

Donc, g est constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x, $g(x) = g(0) = [f(0)]^2 = 1$. On a montré que pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$.

1.2. En particulier, pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) \neq 0$ et donc pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

1.3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g' = g$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{[f(x)]^2} = 0.$$

Donc la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x, $\varphi(x) = \varphi(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$ et donc que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$. Ceci montre l'unicité de la fonction f.

1.4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On sait que $f(a) \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\psi(x) = \dfrac{f(a+x)}{f(a)}$. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\psi'(x) = \frac{f'(a+x)}{f(a)} = \frac{f(a+x)}{f(a)} = \psi(x).$$

De plus, $\psi(0) = \dfrac{f(0)}{f(0)} = 1$. En résumé, la fonction ψ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\psi' = \psi$ et ψ. Par unicité d'une telle fonction, on a $\psi = f$ et donc pour tout réel x, $\dfrac{f(a+x)}{f(a)} = f(x)$ ou encore pour tout réel x, $f(a+x) = f(a) \times f(x)$. On a montré que pour tous réels a et b, $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.

1.5. En particulier, pour tout réel a, $f(a) = \left[f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right]^2 \geqslant 0$. Comme d'autre part, la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, pour tout réel a, $f(a) > 0$.

2.

2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$. Alors, $-1 < \dfrac{x}{n} < 1$ puis $1 + \dfrac{x}{n} > 0$ et $1 - \dfrac{x}{n} > 0$. $u_n(x)$ et $u_n(-x)$ existent et $u_n(-x)$ n'est pas nul. Donc, $u_n(x)$ et $v_n(x)$ existent.

2.2. Soit $a \in]-1, +\infty[$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

- L'inégalité est vraie quand $n = 1$ puisque $(1+a)^1 = 1 + a \geqslant 1 + 1 \times a$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \times (1+a)\\ &\geqslant (1+na) \times (1+a) \text{ (par hypothèse de récurrence et car } 1+a \geqslant 0)\\ &= 1 + (n+1)a + na^2\\ &\geqslant 1 + (n+1)a.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

2.3. i. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$. Alors, $1 + \dfrac{x}{n} > 0$ puis $u_n(x) \neq 0$ et donc

$$
\begin{aligned}
u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= u_n(x) \times \frac{\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}} \\
&= u_n(x) \times \left(1+\frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$ (donc $n \in \mathbb{N}^*$). Soit $a = \dfrac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}} - 1 = -\dfrac{\dfrac{x}{n(n+1)}}{1+\dfrac{x}{n}}$.

Si $x \leqslant 0$, cette dernière expression est positive et donc $a \in]-1, +\infty[$. Si $x > 0$, alors $\dfrac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}} > 0$ puis $a > -1$ et encore une fois $a \in]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer l'inégalité de Bernoulli et on obtient

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1} &= (1+a)^{n+1} \\
&\geqslant 1+(n+1)a = 1+(n+1)\left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}} - 1\right) = n + (n+1)\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}} \\
&= \frac{n+x+(n+1)+x}{1+\dfrac{x}{n}} = \frac{2n+1+2x}{1+\dfrac{x}{n}} \\
&\geqslant \frac{2n+1-2|x|}{1+\dfrac{x}{n}} \text{ (car } 1+\frac{x}{n} > 0) \\
&\geqslant \frac{1}{1+\dfrac{x}{n}} \text{ (car } 2n-2|x| = 2(n-|x|) \geqslant 0).
\end{aligned}
$$

iii. Puisque $1+\dfrac{x}{n} > 0$, on en déduit que $\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \times \left(\dfrac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant 1$ puis, comme $u_n(x)$ est positif, on a

$$
u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \left(1+\frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant u_n(x) \times 1 = u_n(x).
$$

Ceci montre que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.

2.4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, la suite $(u_n(-x))_{n>|x|}$ est croissante et strictement positive. Mais alors la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante en tant qu'inverse d'une suite strictement positive croissante.

2.5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$.

i.

$$
\begin{aligned}
v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \frac{u_n(x)}{v_n(x)}\right) &= v_n(x)\left(1 - u_n(x)u_n(-x)\right) = v_n(x)\left(1 - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right) \\
&= v_n(x)\left(1 - \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right).
\end{aligned}
$$

ii. Puisque $|x| < n$, on a $x^2 < n^2$ puis $0 \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{n^2} \leqslant 1$ puis $0 \leqslant \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$ (par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,1]$) et enfin $1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 0$. Comme d'autre part $v_n(x) \geqslant 0$, on a montré que $v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0$.

iii. Puisque $0 \leqslant \dfrac{x^2}{n^2} < 1$, on a $-\dfrac{x^2}{n^2} \in]-1,+\infty[$. On peut donc appliquer l'inégalité de Bernoulli qui fournit $\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1 + n\left(-\dfrac{x^2}{n^2}\right) = 1 - \dfrac{x^2}{n}$ puis $1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant \dfrac{x^2}{n}$. Puisque $v_n(x) \geqslant 0$, on en déduit que

$$v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \leqslant v_n(x)\frac{x^2}{n}.$$

2.6. D'après la question 2.4, la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante. Donc, pour tout entier naturel $n > |x|$, on a $v_n(x) \times \dfrac{x^2}{n} \leqslant v_{E(|x|)+1}(x) \times \dfrac{x^2}{n}$. Mais alors, d'après les questions 2.5.ii et 2.5.iii, pour tout entier naturel $n > |x|$,

$$0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_{E(|x|)+1}(x) \times \frac{x^2}{n}.$$

Les deux membres de cet encadrement tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$ converge et a pour limite 0.

En résumé, la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante, la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante et la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$ converge vers 0. Donc les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes. On en déduit que ces deux suites sont convergentes de même limite.

2.7. i. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n(0) = \left(1 + \dfrac{0}{n}\right)^n = 1$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(0) = 1$.

ii. Pour $a = x_0$ et $k = h$, on obtient $f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant hf(x_0)$.
Pour $a = x_0 + h$ et $k = -h$, on obtient $f(x_0) - f(x_0 + h) \geqslant -hf(x_0 + h)$ puis $-(1-h)f(x_0 + h) \geqslant -f(x_0)$ puis $(1-h)f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ puis $f(x_0 + h) \leqslant \dfrac{1}{1-h}f(x_0)$ (car $1 - h > 0$) puis $f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant \left(\dfrac{1}{1-h} - 1\right)f(x_0)$ et enfin $f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant \dfrac{h}{1-h}f(x_0)$.

iii. Soit $h \in]0,1[$. D'après la question précédente, $f(x_0) \leqslant \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant \dfrac{f(x_0)}{1-h}$. Quand h tend vers 0 par valeurs supérieures, les deux membres de cet encadrement tendent vers $f(x_0)$. On en déduit que le taux $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite à droite en 0 et que cette limite à droite est égale à $f(x_0)$.

Soit $h \in]-1,0[$. D'après la question précédente, $f(x_0) \geqslant \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant \dfrac{f(x_0)}{1-h}$. Quand h tend vers 0 par valeurs inférieures, les deux membres de cet encadrement tendent vers $f(x_0)$. On en déduit que le taux $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite à gauche en 0 et que cette limite à gauche est égale à $f(x_0)$.

En résumé, f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et ses dérivées à gauche et à droite sont égales. On en déduit que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = f(x_0)$.

f est donc l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et telle que $f(0) = 1$.

Partie B : évolution d'une population

1. L'équation différentielle (E) s'écrit $y' = f(x,y)$ où pour tous réels x et y, $f(x,y) = ry\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à deux variables. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (E) admet une solution maximale et une seule prenant la valeur N_0 en 0.

N étant par définition une solution maximale prenant la valeur N_0 en 0, on a montré l'existence et l'unicité de la fonction N.

2.

2.1. Pour tout réel $t \in I$, $N(t) < K$ puis $\dfrac{N(t)}{K} < 1$ (car $K > 0$) et donc $1 - \dfrac{N(t)}{K} > 0$. D'autre part, $r > 0$ et pour tout t de I, $N(t) > 0$. Finalement, pour tout réel t de I,

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) > 0.$$

La fonction N est donc strictement croissante sur I.

2.2. I contient $[0, +\infty[$. La fonction fonction N est croissante sur I et est majorée par K sur I. On en déduit que la fonction N a une limite réelle ℓ quand t tend vers $+\infty$ et que $\ell \leqslant K$. Notons d'autre part que $\ell \geqslant N(0) = N_0 > 0$.

2.3. Supposons par l'absurde $\ell < K$. La fonction N' tend donc vers $r\ell\left(1 - \frac{\ell}{K}\right) = L$. L est un réel strictement positif. Il existe alors un réel $A > 0$ tel que pour $t \geqslant A$, on a $N'(t) \geqslant \frac{L}{2}$. Par intégration, pour tout $t \geqslant A$, on a $N(t) \geqslant N(A) + \frac{L}{2}(t - A)$. Puisque $\frac{L}{2} > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} N(A) + \frac{L}{2}(t - A) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$. Ceci est faux et donc $\ell = K$.

3.

3.1. La fonction g est définie et dérivable sur I en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I. Pour tout réel t de I,

$$g'(t) = -\frac{N'(t)}{(N(t))^2} = -\frac{1}{(N(t))^2} \times rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = -\frac{r}{N(t)} + \frac{r}{K} = -rg(t) + \frac{r}{K}.$$

La fonction g est donc solution de l'équation différentielle $y' = -ry + \frac{r}{K}$ sur I.

3.2. (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Une solution particulière de (E') sur $\mathbb{R}$ est la fonction constante $t \mapsto \frac{1}{K}$ et une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée est la fonction $t \mapsto e^{-rt}$. Les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il existe un réel λ tel que pour tout $t \in I$, $\frac{1}{N(t)} = \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$. La condition $N(0) = N_0$ fournit $\lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}$ et donc, pour tout $t \in I$,

$$N(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}.$$

3.3. Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-rt} = 0$, on retrouve $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = K$.

