

Problème 1 : Puissances de matrices

Partie A : étude d'un exemple

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ \frac{1}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

2. $\chi_A = X^2 - (\text{Tr}(A))X + \det(A) = X^2 - \frac{7}{5}X + \frac{2}{5} = \left(X - \frac{2}{5}\right)(X - 1)$. Donc la matrice A admet deux valeurs propres simples à savoir $\frac{2}{5}$ et 1. En particulier, la matrice A est diagonalisable.

• Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y = 0 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y = 0$.

Donc $\text{Ker}(A - I_2) = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}\left(A - \frac{2}{5}I_2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y = 0 \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$.

Donc $\text{Ker}\left(A - \frac{2}{5}I_2\right) = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On sait alors que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \text{diag}\left(1, \frac{2}{5}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}.$$

4. Puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et donc la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. D'après les questions 1. et 4., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \frac{1}{3} \left(\left(2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) x_0 + \left(2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) y_0 \right) \text{ et } y_n = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) x_0 + \left(1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) y_0 \right).$$

Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{2(x_0 + y_0)}{3} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{x_0 + y_0}{3}.$$

Partie B : résultats préliminaires

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = (a_{i,j}(n))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $B_n = (b_{i,j}(n))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$.

Posons encore $L = (l_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$.

1.1 Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $A_n + B_n$ est $a_{i,j}(n) + b_{i,j}(n)$. La suite $(a_{i,j}(n) + b_{i,j}(n))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ converge vers $l_{i,j} + m_{i,j}$.

Donc, la suite de matrices $(A_n + B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite la matrice $(l_{i,j} + m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ qui est la matrice $L + M$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n + B_n) = L + M.$$

1.2 Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice αA_n est $\alpha a_{i,j}(n)$. La suite $(\alpha a_{i,j}(n))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ converge vers $\alpha l_{i,j}$.

Donc, la suite de matrices $(\alpha A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite la matrice $(\alpha l_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ qui est la matrice αL .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha A_n) = \alpha L.$$

1.3 Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $\alpha_n B$ est $\alpha_n b_{i,j}$. La suite $(\alpha_n b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ converge vers $\alpha b_{i,j}$.

Donc, la suite de matrices $(\alpha_n B)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite la matrice $(\alpha b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ qui est la matrice αB .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n B) = \alpha B.$$

2.

2.1 Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $A_n X$ est $\sum_{k=1}^p a_{i,k}(n) x_{k,j}$. La

suite $\left(\sum_{k=1}^p a_{i,k}(n) x_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ converge vers $\sum_{k=1}^p l_{i,k} x_{k,j}$.

Donc, la suite de matrices $(A_n X)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite la matrice $\left(\sum_{k=1}^p l_{i,k} x_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ qui est la matrice LX .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n X) = LX.$$

2.2 De même, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} XA_n = XL$.

3. D'après la question précédente, pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n X = LX$.

On a donc pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, $LX = 0$. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^p canoniquement associé à L . On a donc pour tout x de \mathbb{C}^p , $f(x) = 0$ et donc $f = 0$ puis $L = 0$.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = L = 0$.

Partie C : condition nécessaire

1. Soit λ une valeur propre de u .

1.1 Il existe $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Soit $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $x_{i_0} \neq 0$.

On sait que pour tout entier naturel n , $A^n X = \lambda^n X$. Par hypothèse, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. D'après la question 2) de la partie B, la suite $(A^n X)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ou encore la suite $(\lambda^n X)_{n \in \mathbb{N}}$. En particulier, la suite $(\lambda^n x_{i_0})_{n \in \mathbb{N}}$ converge et finalement la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puisque $x_{i_0} \neq 0$.

En résumé, si la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et si λ est une valeur propre de A , alors la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Si $|\lambda| > 1$, la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et donc la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Par contraposition, si la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $|\lambda| \leq 1$.

1.2 Supposons de plus que $|\lambda| = 1$. Puisque la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $(\lambda^{n+1} - \lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Or, pour tout entier naturel n ,

$$|\lambda^{n+1} - \lambda^n| = |\lambda|^n \times |\lambda - 1| = |\lambda - 1|.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda^{n+1} - \lambda^n) = 0$, on en déduit que $|\lambda - 1| = 0$ puis que $\lambda = 1$.

2. Soit $x \in \text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id})$. Donc $u(x) = x$ et il existe y tel que $x = u(y) - y$. On en déduit que $u(u(y) - y) = u(y) - y$ puis que $u^2(y) - 2u(y) + y = 0$.

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0$, $u^n(y) = nu(y) + (1 - n)y$.

- Puisque $u^0(y) = y$, l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u^n(y) = nu(y) + (1 - n)y$. Alors

$$\begin{aligned} u^{n+1}(y) &= u(u^n(y)) = u(nu(y) + (1 - n)y) = nu^2(y) + (1 - n)u(y) = n(2u(y) - y) + (1 - n)u(y) \\ &= (n + 1)u(y) + (1 - (n + 1))y. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u^n(y) = n(u(y) - y) + y = nx + y$. Puisque la suite $(u^n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $(nx + y)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ce qui impose $x = 0$. On a montré que

$$\text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}.$$

Partie D : condition suffisante

1. Théorème de d'ALEMBERT-GAUSS. Tout polynôme à coefficients dans \mathbb{C} de degré supérieur ou égal à 1 est scindé sur \mathbb{C} .

2. On sait que χ_u est de degré p et de coefficient dominant $(-1)^p$. Si on note $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, la famille des p racines (distinctes ou confondues) de χ_u dans \mathbb{C} , on a

$$\chi_u = (-1)^p \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i) = \prod_{i=1}^p (\alpha_i - X).$$

3. u est un endomorphisme de \mathbb{C}^p qui est un \mathbb{C} -espace de dimension finie. On sait alors que u est triangulable. Par suite, il existe une base de \mathbb{C}^p dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Le polynôme caractéristique de cette matrice triangulaire est le polynôme caractéristique de u . On trouve donc sur la diagonale de cette matrice triangulaire la famille des racines de χ_u . Quitte à réordonner les vecteurs de base, on a montré qu'il existe une base (e_1, \dots, e_p) dans laquelle u admet une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \dots \\ & \alpha_2 & \dots & \dots \\ & & \ddots & \dots \\ 0 & & & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

4.

4.1. $u(e_1) = \alpha_1 e_1$ puis, pour tout entier naturel n , $u^n(e_1) = \alpha_1^n e_1$. Comme $|\alpha_1| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_1^n = 0$ puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_1^n e_1 = 0.$$

4.2. Montrons par récurrence que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_i) = 0$.

• Le résultat est vrai pour $i = 1$ d'après la question précédente.

• Soit $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Supposons que pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_j) = 0$ et montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_{i+1}) = 0$.

Par hypothèse de récurrence, pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_j) = 0$ et donc, par linéarité, pour tout x de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(x) = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque T est triangulaire supérieure, il existe un vecteur x de $\text{Vect}(e_j)_{1 \leq j \leq i}$ tel que

$$u(e_{i+1}) = \alpha_{i+1} e_{i+1} + x.$$

On en déduit que pour tout entier naturel k , $u^{k+1}(e_{i+1}) - \alpha_{i+1} u^k(e_{i+1}) = u^k(x)$ puis que

$$\alpha_{i+1}^{n-k-1} u^{k+1}(e_{i+1}) - \alpha_{i+1}^{n-k} u^k(e_{i+1}) = \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x).$$

En sommant ces égalités, on obtient

$$u^n(e_{i+1}) - \alpha_{i+1}^n e_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{i+1}^{n-k-1} u^{k+1}(e_{i+1}) - \alpha_{i+1}^{n-k} u^k(e_{i+1})) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x).$$

(somme télescopique). Ainsi, pour tout entier naturel non nul n ,

$$u^n(e_{i+1}) = \alpha_{i+1}^n e_{i+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x).$$

Déjà, puisque $|\alpha_{i+1}| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{i+1}^n e_{i+1} = 0$. Montrons alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^k(x) = 0$ et que $|\alpha_{i+1}| < 1$, il existe un entier naturel non nul n_0 tels que, pour tout entier $k \geq n_0$, $\|u^k(x)\| < \frac{\varepsilon(1-|\alpha_{i+1}|)}{2}$. Pour $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x) \right\| &\leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \|u^k(x)\| + \sum_{k=n_0}^{n-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \|u^k(x)\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \|u^k(x)\| + \frac{\varepsilon(1-|\alpha_{i+1}|)}{2} \sum_{k=n_0}^{n-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \|u^k(x)\| + \frac{\varepsilon(1-|\alpha_{i+1}|)}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_{i+1}|^k \\ &= \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \|u^k(x)\| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \|u^k(x)\|$ est la somme d'un nombre fixe (quand n varie) de suites géométriques,

convergentes, de limites nulles. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \|u^k(x)\| = 0$. On en déduit qu'il existe un entier naturel

$n_1 \geq n_0$ tel que pour $n \geq n_1$, $\sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \|u^k(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq n_1$, on a $\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ceci montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x) = 0$ et finalement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_{i+1}) = 0$.

On a montré par récurrence que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_i) = 0$.

4.3 Pour tout $n \in \mathbb{C}$ et tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les composantes de la i -ème colonne $C_{i,n}$ de T^n sont les coordonnées de $u^n(e_i)$ dans la base (e_1, \dots, e_p) de \mathbb{C}^p . Puisque pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_i) = 0$, on en déduit que chaque colonne $C_{i,n}$ de T^n tend vers la colonne nulle quand n tend vers $+\infty$ ou encore chaque suite de coefficients de T^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors la matrice T^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Il existe une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$. Pour tout entier naturel n , $A^n = PT^nP^{-1}$. D'après la question 2. de la partie B, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $P \times 0 \times P^{-1} = 0$. En résumé, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

5.

5.1 $\text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$ et d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u - \text{Id})) + \dim(\text{Im}(u - \text{Id})) = \dim(\mathbb{C}^p) < +\infty$. On sait alors que $\mathbb{C}^p = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Im}(u - \text{Id})$.

Les endomorphismes u et $u - \text{Id}$ commutent. On sait alors que $\text{Ker}(u - \text{Id})$ et $\text{Im}(u - \text{Id})$ sont stables par u .

5.2 Si $\text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$, alors $\mathbb{C}^p = \text{Ker}(u - \text{Id})$ puis $u = \text{Id}$. Dans ce cas, $A = I_p$ et il n'y a rien à dire dans cette question.

Sinon, $\text{Im}(u - \text{Id}) \neq \{0\}$ et u_1 est un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace de dimension finie non nulle. u_1 admet donc au moins une valeur propre. Soit λ une valeur propre de u_1 dans \mathbb{C} . Il existe un vecteur non nul x de $\text{Im}(u - \text{Id})$ tel que $u_1(x) = \lambda x$. Mais alors, x est un vecteur non nul de \mathbb{C}^p tel que $u(x) = \lambda x$. λ est donc une valeur propre de u .

Si $\lambda = 1$, alors x est un vecteur non nul tel que $u(x) = x$ et donc x est un vecteur non nul de $\text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id})$ ce qui est impossible. Donc, $\lambda \neq 1$. On a montré que toute valeur propre de u_1 est une valeur propre de u distincte de λ_1 .

5.3 Si $\text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$, $A = I_p$ et donc la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers I_p .

Sinon, la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^p = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Im}(u - \text{Id})$ est de la forme $T = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ (puisque $\text{Im}(u - \text{Id})$ est stable par u). A est semblable à T . Un calcul par blocs montre que A^n est semblable à $T^n = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & T_1^n \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de T_1 sont les valeurs propres de A de modules tous strictement inférieurs à 1. D'après la question 4., la suite $(T_1^n)^{n\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle et donc la suite $(T^n)^{n\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais alors, comme

à la question 4.3., la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice semblable à la matrice $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $d = \dim(\text{Ker}(u - \text{Id}))$, ce qui reste vrai dans la cas où $\text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$.

Partie E : conclusion et applications

1. La partie C montre que la condition est nécessaire et la partie D montre que la condition est suffisante (la lecture de l'énoncé étant conventionnelle dans le cas $m = 1$).

2.

2.1 $\chi_A = X^2 - 0,5X + 0,04 = (X - 0,1)(X - 0,4)$. A est de format 2 et a deux valeurs propres distinctes dont les modules sont strictement plus petits que 1. D'après la question précédente, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2.2 A est triangulaire supérieure de format 3. Ses valeurs propres deux à deux distinctes sont 1 et $\frac{i}{2}$ qui est de module $\frac{1}{2} < 1$. D'après la question précédente, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\text{Ker}(A - I_3) \cap \text{Im}(A - I_3) = \{0\}$.

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 0 & -1 + \frac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 + \frac{i}{2} & 1 \end{pmatrix} = 2 \text{ car } \begin{vmatrix} 1 & i \\ -1 + \frac{i}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} + i \neq 0. \text{ Donc, } \text{Im}(A - I_3)$$

est un plan et $\text{Ker}(A - I_3)$ est une droite d'après le théorème du rang. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur non

nul de $\text{Ker}(A - I_3)$ et donc $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(e_1)$. On en déduit que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $e_1 \notin \text{Im}(A - I_3)$.

$\text{Im}(A - I_3)$ est engendré par les colonnes de $A - I_3$ et donc une base de $\text{Im}(A - I_3)$ est (e_2, e_3) où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \frac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$e_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (car $\text{Im}(A - I_3)$ est un plan). La matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & -1 + \frac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas inversible car sa dernière ligne est nulle. Donc, la famille (e_1, e_2, e_3) est liée puis $e_1 \in \text{Vect}(e_2, e_3) = \text{Im}(A - I_3)$ car la famille (e_2, e_3) est libre. Ceci montre que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

2.3 En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A &= (1-X) \left(X^2 - \left(-6 + \frac{i}{2} + 6 + \frac{i}{2} \right) X + \left(-6 + \frac{i}{2} \right) \left(6 + \frac{i}{2} \right) + 36 \right) = (1-X) \left(X^2 - iX - \frac{1}{4} \right) \\ &= (1-X) \left(X - \frac{i}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Comme à la question précédente, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\text{Ker}(A - I_3) \cap \text{Im}(A - I_3) = \{0\}$. Puisque

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 + \frac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 5 + \frac{i}{2} \end{pmatrix} \text{ et que } \begin{vmatrix} -7 + \frac{i}{2} & 9 \\ -4 & 5 + \frac{i}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{7i}{2} \neq 0, \text{ la matrice } A - I_3 \text{ est de rang 2. } \text{Ker}(A - I_3)$$

est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Im}(A - I_3)$ est le plan vectoriel de base (e_2, e_3) où

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 + \frac{i}{2} \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 + \frac{i}{2} \end{pmatrix}. \text{ Enfin, la matrice de la famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ dans la base canonique de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$$

est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 + \frac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 5 + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est $1 - \frac{7i}{2} \neq 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) est libre et donc $e_1 \notin \text{Vect}(e_2, e_3)$ ou encore $\text{Ker}(A - I_3) \cap \text{Im}(A - I_3) = \{0\}$. Dans ce cas, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Problème 2 : quelques théorèmes d'arithmétique

Partie A : théorème de Lagrange

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$k \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

2. Soient p un nombre premier puis $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Alors k et p sont premiers entre eux. Ensuite, p divise $p \binom{p-1}{k-1} = k \binom{p}{k}$.

En résumé, p divise $k \binom{p}{k}$ et p est premier à k . D'après le théorème de GAUSS, p divise $\binom{p}{k}$.

3.

3.1 Soient p un entier premier impair (donc $p \geq 3$) et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(x+1)f(x+1) - xf(x) &= (x+1) \prod_{k=1}^{p-1} (x+1+k) - x \prod_{k=1}^{p-1} (x+k) = \prod_{k=0}^{p-1} (x+(k+1)) - \prod_{k=0}^{p-1} (x+k) \\
&= \prod_{k=1}^p (x+k) - \prod_{k=0}^{p-1} (x+k) = ((x+p) - x) \prod_{k=1}^{p-1} (x+k) = pf(x).
\end{aligned}$$

3.2 f est un polynôme de degré $p-1$ et il existe donc des réels a_0, \dots, a_{p-1} tels que pour tout réel x ,

$$f(x) = a_0 x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \dots + a_{p-2} x + a_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-1-k}.$$

3.3 Le coefficient de x^{p-1} est $1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$ et donc $a_0 = 1$. D'autre part,

$$a_{p-1} = f(0) = 1 \times 2 \times \dots \times (p-1) = (p-1)!$$

3.4 Soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. pa_k est le coefficient de x^{p-1-k} dans pf . D'autre part, pour tout réel x

$$\begin{aligned}
pf(x) &= (x+1)f(x+1) - xf(x) = (x+1) \sum_{k=0}^{p-1} a_k (x+1)^{p-1-k} - x \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a_k (x+1)^{p-k} - \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-k} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \left(\sum_{i=0}^{p-k} \binom{p-k}{i} x^{p-k-i} \right) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a_k \left(\sum_{i=1}^{p-k} \binom{p-k}{i} x^{p-k-i} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{j=k}^{p-1} \binom{p-k}{j+1-k} a_k x^{p-1-j} \right) \text{ (en posant } j = k+i-1 \text{)} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{k=0}^j \binom{p-k}{j+1-k} a_k \right) x^{p-1-j} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^k \binom{p-i}{k+1-i} a_i \right) x^{p-1-k} \text{ (en posant } k = i \text{ et } j = k \text{)}.
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, le coefficient de x^{p-1-k} dans pf est aussi $\sum_{i=0}^k \binom{p-i}{k+1-i} a_i$ et donc, par identification des coefficients,

$$\forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, pa_k = \sum_{i=0}^k \binom{p-i}{k+1-i} a_i.$$

3.5 Quand $k=0$, on obtient $pa_0 = pa_0$ ce qui n'apporte rien.

Quand $k=1$, on obtient $pa_1 = \binom{p}{2} a_0 + \binom{p-1}{1} a_1 = \binom{p}{2} + (p-1)a_1$ et donc $a_1 = \binom{p}{2}$.

Pour $k \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$, on a

$$pa_k = \binom{p}{k+1} a_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i + \binom{p-k}{1} a_k$$

et donc $(p - (p-k))a_k = \binom{p}{k+1} a_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$ puis $ka_k = \binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$.

3.6 Montrons par récurrence sur k que $\forall k \in \llbracket 1, p-2 \rrbracket$, a_k est divisible par p .

- $a_1 = \binom{p}{2} = p \times \frac{p-1}{2}$. Puisque p est impair, $\frac{p-1}{2}$ est un entier et donc p divise a_1 . Ceci achève la démonstration si $p=3$. On suppose forénavant $p \geq 5$.

- Soit $k \in \llbracket 2, p-2 \rrbracket$. Supposons que $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, p divise a_i . Alors, p divise déjà $\sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$.

D'autre part, $k+1 \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et donc, d'après la question 2., p divise $\binom{p}{k+1}$.

Finalement, p divise $\binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i = ka_k$.

Ainsi, p divise ka_k et p est premier avec k (car p est premier et $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$). D'après le théorème de GAUSS, p divise a_k .

Le résultat est démontré par récurrence.

Partie B : théorème de Wilson

1. $(2-1)! = 1$ et $1 \equiv -1 \pmod{2}$. Donc la propriété est vraie pour $p = 2$.

2.

2.1 $p! = \prod_{i=1}^{p-1} (1+i) = f(1) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + a_{p-1} = 1 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + (p-1)!$ d'après la question 3.3 de la partie A.

2.2 $p!$ est divisible par p et $\sum_{k=1}^{p-2} a_k$ est divisible par p d'après la question 3.6. Donc $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ou encore $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Alors, il existe un entier naturel q tel que

$\forall k \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$, $\left(- \prod_{1 \leq j \leq p, j \neq k}^j \right) k + qp = 1$. Le théorème de BÉZOUT montre que p est premier avec chacun des entiers k

tels que $1 \leq k \leq p-1$ et donc que p est un nombre premier.

Puisque 2 est premier, le résultat est vrai quand $p = 2$. On a montré que

$$\forall p \geq 2, p \text{ premier} \Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

4.

4.1 Posons $n = p_1 p_2 m$ où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers tels que $p_1 < p_2$ et m est un entier naturel non nul. Alors $2 \leq p_1 < p_2 \leq p_2 m < n$ (car si $p_2 m = n$, alors $p_1 = 1$ ce qui est faux. Ainsi, p_1 et $p_2 m$ sont deux diviseurs de n , inférieurs ou égaux à $n-1$ et tels que $p_1 < p_2 m$.

$(n-1)!$ est un multiple de $p_1 \times p_2 m = n$ et donc $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

4.2 Posons $n = p^\alpha$ où p est un nombre premier et $\alpha \geq 3$. Alors, $p \geq 2$, $\alpha - 1 \geq 2$ puis $p < p^{\alpha-1} < p^\alpha$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto p^x$ sur \mathbb{R} .

p et $p^{\alpha-1}$ sont deux diviseurs de n , inférieurs ou égaux à $n-1$ et tels que $p < p^{\alpha-1}$.

$(n-1)!$ est un multiple de $p \times p^{\alpha-1} = n$ et donc $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

4.3 Posons $n = p^2$ où p est un nombre premier supérieur ou égal à 3 (car si $p = 2$, alors $n = 4$ ce qui est faux). $2 \times p \geq 2 > 1$ et d'autre part, $2 \times p < p \times p = n$. Donc $1 < 2p < n$ et même $1 < p < 2p < n$.

$(n-1)!$ est un multiple de $p \times 2p = 2n$. En particulier, $(n-1)!$ est un multiple de n et donc $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

Partie C : théorème de Wolstenholme

1. Algorithme.

Variables	s et t sont des entiers naturels non nuls n est un entier naturel non nul d est un entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à s la valeur 1 Affecter à t la valeur 1
Traitement	Pour n allant de 1 à 9 Affecter à s la valeur (n + 1) * s + t Affecter à t la valeur (n + 1)t Affecter à d la valeur PGCD(s, t) Affecter à s la valeur s/d Affecter à t la valeur t/d Afficher à s Afficher t Fin du Tant que Fin

2. • $H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 6 + 4 + 3}{12} = \frac{25}{12}$. Puisque $\text{PGCD}(25, 12) = 1$, on a $s_4 = 25 = 5^2$. s_4 est donc divisible par 5^2 .

• $H_6 = H_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{125 + 12 + 10}{60} = \frac{147}{60} = \frac{3 \times 7^2}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{49}{20}$. Puisque $\text{PGCD}(49, 20) = 1$, on a $s_6 = 49 = 7^2$. s_6 est donc divisible par 7^2 .

• $H_{10} = H_6 + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{49}{20} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{49 \times 2 \times 3^2 \times 7 + 2^3 \times 3^2 \times 5 + 3^2 \times 5 \times 7 + 2^3 \times 5 \times 7 + 2^2 \times 3^2 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7} = \frac{6174 + 360 + 315 + 280 + 252}{7381} = \frac{11^2 \times 61}{2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7}$. 61 est premier car n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée à savoir 2, 3, 5 et 7.

Puisque $\text{PGCD}(11^2 \times 61, 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7) = 1$, on a $s_{10} = 11^2 \times 61 = 7381$. s_{10} est donc divisible par 11^2 .

3. Après réduction au même dénominateur, on obtient $H_{p-1} = \frac{\sum_{k=1}^{p-1} \left(\prod_{1 \leq j \leq p-1, j \neq k} j \right)}{(p-1)!}$.

Le coefficient de x dans le développement de $f(x) = \prod_{k=1}^{p-1} (x+k)$ est $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\prod_{1 \leq j \leq p-1, j \neq k} j \right)$. Ce coefficient est aussi a_{p-2} et donc

$$H_{p-1} = \frac{a_{p-2}}{(p-1)!}.$$

4. Pour tout réel x, $f(x) = a_0 x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \dots + a_{p-2} x + a_{p-1} = x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \dots + a_{p-2} x + (p-1)!$. Donc, $f(-p) = p^{p-1} - a_1 p^{p-2} + \dots + a_{p-3} p^2 - a_{p-2} p + (p-1)!$ (car $p-1$ est pair, -2 est impair ...). Mais d'autre part,

$$f(-p) = (-p+1)(-p+2)\dots(-p+(p-2))(-p+(p-1)) = (-1)^{p-1} (p-1)! = (p-1)!$$

car $p-1$ est pair. Donc, $p^{p-1} - a_1 p^{p-2} + \dots + a_{p-3} p^2 - a_{p-2} p + (p-1)! = (p-1)!$ puis $p a_{p-2} = p^{p-1} - a_1 p^{p-2} + \dots + a_{p-3} p^2$ et finalement,

$$a_{p-2} = p^{p-2} - a_1 p^{p-3} + \dots + a_{p-3} p.$$

5. $a_{p-2} = p(p^{p-3} - a_1 p^{p-4} + \dots + a_{p-3})$. Puisque $p \geq 5$, chacun des termes de la somme dans la parenthèse est divisible par p d'après la question 3.6 de la partie A et donc le nombre entre parenthèses est divisible par p puis a_{p-2} est divisible par p^2 .

L'égalité $H_{p-1} = \frac{a_{p-2}}{(p-1)!}$ s'écrit encore $s_{p-1} \times (p-1)! = a_{p-2} \times t_{p-1}$. p^2 divise a_{p-2} et donc p^2 divise $a_{p-2} \times t_{p-1} = s_{p-1} \times (p-1)!$. Mais p est premier et donc p est premier avec $(p-1)!$ d'après le théorème de WILSON. On en déduit que p^2 est premier avec $(p-1)!$ et que p^2 divise $s_{p-1} \times (p-1)!$. D'après le théorème de GAUSS, p^2 divise $(p-1)!$.