SESSION 2013

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Problème 1 : nombres irrationnels

Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels

1. $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$ sont entiers. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel.

Il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{n} = \dfrac{a}{b}$ ou encore tels que $n = \dfrac{a^2}{b^2}$. Si $b = 1$, alors $\sqrt{n} = a$ est un entier. Si $b \geqslant 2$, tout facteur premier de a^2 ou de b^2 apparaît à un exposant pair dans la décomposition primaire de a^2 ou de b^2. Il en est de même pour tout facteur premier de $n = \dfrac{a^2}{b^2}$ ce qui signifie que n est un carré parfait ou encore que $\sqrt{n}$ est un entier.

On a montré que si $\sqrt{n}$ est rationnel, alors $\sqrt{n}$ est entier. Par contraposition, si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

2. Soit p un nombre premier. p est en particulier un entier supérieur ou égal à 2.
Montrons que $\sqrt{p}$ n'est pas entier. Dans le cas contraire, il existe un entier naturel $n \geqslant 2$ tel que $\sqrt{p} = n$ ou encore tel que $n^2 = p$. Cette égalité est impossible par unicité de la décomposition en facteurs premier car le nombre premier p apparaît à un exposant dans le premier membre de cette égalité et à un exposant impair dans le second. Donc $\sqrt{p}$ n'est pas entier puis $\sqrt{p}$ est irrationnel d'après la question précédente.

3. $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est un réel strictement positif. Supposons que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ soit un rationnel strictement positif. Il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{a}{b}$ ou encore tels que $b\ln 2 = a\ln 3$ ou encore $e^{b\ln 2} = e^{a\ln 3}$ ou enfin tels que $2^b = 3^a$. Cette égalité est impossible par unicité de la décomposition en facteurs premiers car 2 et 3 sont des nombres premiers et car $a > 0$ et $b > 0$. Donc $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

4.

4.1 • Pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

• Pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)\times(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

• Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n \times n!} = 0$.

Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers e en croissant strictement et donc pour tout entier naturel non nul n, $u_n < e$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a même limite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers e en décroissant strictement. On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $v_n > e$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < e < v_n.$$

En particulier, $u_q < e < v_q$.

4.2 Soit $q \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $q! \times q \times u_q < q! \times q \times e < q! \times q \times v_q$, ce qui s'écrit encore

$$q\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} < p\times q! < 1+q\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}.$$

Pour tout entier $k\in[\![0,q]\!]$, $\dfrac{q!}{k!}$ est un entier et donc $q\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}$ est un entier. Ainsi, l'entier $p\times q!$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs. Ceci est une contradiction et il était donc absurde de supposer e rationnel. On a donc montré que e est irrationnel.

Partie B : une preuve de l'irrationalité de π

1.

1.1 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout réel x,

$$P_n'(x)=\frac{1}{n!}\times n(a-2bx)\times(x(a-bx))^{n-1}=(a-2bx)\frac{(x(a-bx))^{n-1}}{(n-1)!}=(a-2bx)P_{n-1}(x).$$

1.2 Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $x\mapsto|P_n(x)|$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et admet donc un maximum sur $[0,\pi]$.
Le trinôme du second degré $x\mapsto x(a-bx)$ est positif sur $[0,\pi]$ et s'annule en 0 et en $\dfrac{a}{b}=\pi$.
Donc la fonction $x\mapsto|x(a-bx)|=x(a-bx)$ atteint son maximum en $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{a}{2b}$ et ce maximum est égal à

$$\frac{a}{2b}\left(a-b\frac{a}{2b}\right)=\frac{a^2}{4b}.$$

Mais alors, par croissance de la fonction $t\mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $x\mapsto|P_n(x)|$ atteint son maximum en $\dfrac{a}{2b}$ et ce maximum est égal à

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n.$$

1.3 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

$$P_n\left(\frac{a}{b}-x\right)=\frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b}-x\right)^n\left(a-b\left(\frac{a}{b}-x\right)\right)^n=\frac{1}{n!}\frac{(a-bx)^n}{b^n}(bx)^n=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}=P_n(x).$$

1.4 Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in[a,b]$, $a-bx\geqslant 0$. Donc I_n est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle. On en déduit que $I_n>0$.

1.5 La série de terme général $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$, converge et a pour somme $\pi e^{a^2/4b}$. En particulier, son terme général $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question 1.2,

$$0\leqslant I_n=\int_0^{\pi}P_n(x)\sin x\,dx\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n\times 1\,dx=\frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n.$$

Puisque $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.
2. Soit $k\in\mathbb{N}$. En dérivant k fois les égalités de la question 1.3, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ (-1)^kP_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}-x\right)=P_n^{(k)}(x).$$

Pour $x=0$, on obtient en particulier $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)=(-1)^kP_n^{(k)}(0)$.

2.1 et 2.2 Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{x^n}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p a^{n-p}b^p x^p = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{p}(-1)^p a^{n-p}b^p x^{n+p}\\
&= \sum_{p=n}^{2n}\frac{1}{n!}\binom{n}{p-n}(-1)^{p-n}a^{2n-p}b^{p-n}x^p.
\end{aligned}
$$

D'après la formule de TAYLOR, on sait alors que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(0) = 0$ puis, pour $k \in [\![n, 2n]\!]$,

$$P_n^{(k)}(0) = k! \times \frac{1}{n!}\binom{n}{k-n}(-1)^{k-n}a^{2n-k}b^{k-n}.$$

Pour $k \in [\![n, 2n]\!]$, $\dfrac{k!}{n!}$ est un entier et donc $P_n^{(k)}(0)$ est un entier. En résumé, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, $P_n^{(k)}(0)$ est un entier relatif. Puisque $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$, $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ est aussi un entier relatif.

2.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ puis k un entier naturel supérieur ou égal à $2n+1$. P_n est un polynôme de degré $2n$ et donc $P_n^{(k)} = 0$. En particulier, $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) = 0$. Dans ce cas, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs.

On a montré que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs.

3.

3.1. Une double intégration par parties fournit

$$
\begin{aligned}
I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\,dx &= [-P_n(x)\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} P_n'(x)\cos x\,dx = P_n\left(\frac{a}{b}\right) + P_n(0) + \int_0^{\pi} P_n'(x)\cos x\,dx\\
&= P_n\left(\frac{a}{b}\right) + P_n(0) + [P_n'(x)\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} P_n''(x)\sin x\,dx.
\end{aligned}
$$

Plus généralement, après $2n$ intégration par parties, on obtient

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\varepsilon_k P_n^{(2k)}\left(\frac{a}{b}\right) + \varepsilon_k' P_n^{(2k)}(0)\right) + \varepsilon\int_0^{\pi} P_n^{(2n)}(x)\sin x\,dx$$

où les nombres ε_k et ε_k' où $k \in [\![0, n-1]\!]$ et ε sont éléments de $\{-1, 1\}$. De plus, P_n étant un polynôme de degré $2n$, $P_n^{(2n)}$ est la constante $K = (2n)!\mathrm{dom}(P_n) = (-b)^n\dfrac{(2n)!}{n!}$ et donc

$$\int_0^{\pi} P_n^{(2n)}(x)\sin x\,dx = K\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2(-b)^n\frac{(2n)!}{n!}.$$

Finalement,

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\varepsilon_k P_n^{(2k)}\left(\frac{a}{b}\right) + \varepsilon_k' P_n^{(2k)}(0)\right) + 2\varepsilon(-b)^n\frac{(2n)!}{n!}.$$

$\dfrac{(2n)!}{n!} = \displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k$ est un entier relatif et les nombres $P_n^{(2k)}(0)$ et $P_n^{(2k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont des entiers relatifs d'après la question 2. On en déduit que I_n est un entier relatif.

3.2 D'après les questions 3.1 et 1.4, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement positifs. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 1$. Ceci est en contradiction avec le résultat de la question 1.5 à savoir $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Il était donc absurde de supposer que π était rationnel et on a donc montré que π est irrationnel.

Partie C : développement en série de Engel et applications

1. Pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{a_0 \dots a_n} \geqslant 0$. Donc la série de terme général $\dfrac{1}{a_0 \dots a_n}$, $n \geqslant 0$, c'est-à-dire la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \dots a_0} \text{ (car la suite } (a_n) \text{ est croissante et strictement positive)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0^{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0^{k+1}} \ \left(\frac{1}{a_0} \in]0,1[\text{ et donc } \sum \frac{1}{a_0^{k+1}} \text{ converge}\right) \\
&= \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1-\dfrac{1}{a_0}} = \frac{1}{a_0 - 1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{1}{a_0-1}$ et donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel inférieur ou égal à $\dfrac{1}{a_0-1}$.

2.

2.1 Pour tout réel $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{\alpha} < 1 + E\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha}$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n et a_n existent et $x_n > 0$.

- $x_0 = x$ existe et est strictement positif. Puis $a_0 = 1 + E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ existe.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que x_n existe et soit strictement positif. Alors, a_n existe puis x_{n+1} existe et

$$x_{n+1} = a_n x_n - 1 > \frac{1}{x_n} \times x_n - 1 = 0.$$

Mais alors $a_{n+1} = 1 + E\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)$ existe.

On a montré par récurrence que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.

2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x_n \neq 0$ et

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a_n - \frac{1}{x_n} \leqslant 1 + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n} = 1,$$

et donc $x_{n+1} \leqslant x_n$ car $x_n > 0$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \leqslant x_n$ et donc que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc

$$0 < x_{n+1} \leqslant x_n \Rightarrow \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow E\left(\frac{1}{x_n}\right) \leqslant E\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right) \Rightarrow a_n \leqslant a_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers.

D'autre part, $x \in]0,1] \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant 1 \Rightarrow E\left(\dfrac{1}{x}\right) \geqslant 1 \Rightarrow a_0 \geqslant 2$.

2.4 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x = S_n + \dfrac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n}$.

- $x = x_0 = \dfrac{1}{a_0} + \dfrac{x_1}{a_0} = S_0 + \dfrac{x_1}{a_0}$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $x = S_n + \dfrac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n}$. Alors

$$x = S_n + \frac{\dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{x_{n+1}}{a_{n+1}}}{a_0 \dots a_n} = S_n + \frac{1}{a_0 \dots a_{n+1}} + \frac{x_{n+2}}{a_0 \dots a_{n+1}} = S_{n+1} + \frac{x_{n+2}}{a_0 \dots a_{n+1}}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

D'après les questions 1 et 2.3, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. En particulier, le terme général de cette série à savoir $\dfrac{1}{a_0 \dots a_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'autre part, d'après la question 2.2, la suite (x_n) est décroissante et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n} \leqslant \dfrac{x}{a_0 \dots a_n}$.

D'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Finalement, $x = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et donc x admet un développement en série de Engel.

3.

3.1 Le résultat est clair si $n_0 = 0$. Supposons $n_0 \geqslant 1$. Par définition de n_0, si $k < n_0$ alors $a_k = b_k$. Par suite,

$$\begin{aligned}
[a_{n_0}, \dots, a_n, \dots] &= \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n_0} \dots a_k} = a_0 \dots a_{n_0-1} \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_{n_0-1} a_{n_0} \dots a_k} \\
&= a_0 \dots a_{n_0-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_k} - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \right) \\
&= a_0 \dots a_{n_0-1} \left([a_0, \dots, a_n, \dots] - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \right) \\
&= b_0 \dots b_{n_0-1} \left([b_0, \dots, b_n, \dots] - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{1}{b_0 \dots b_k} \right) \\
&= [b_{n_0}, \dots, b_n, \dots]
\end{aligned}$$

3.2 Supposons que $x = [\alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots]$ où la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels telle que $\alpha_0 \geqslant 2$. D'après la question 1, $x \leqslant \dfrac{1}{\alpha_0 - 1}$ puis $(\alpha_0 - 1)x \leqslant 1$ (car $\alpha_0 - 1 \geqslant 1 > 0$) et donc $\alpha_0 x - 1 \leqslant x$.

On en déduit que $\alpha_0 \leqslant 1 + \dfrac{1}{x}$. D'autre part,

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_0 \dots \alpha_k} = \frac{1}{\alpha_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_0 \dots \alpha_k} > \frac{1}{\alpha_0},$$

et donc $\dfrac{1}{x} < \alpha_0$ ou encore $1 + \dfrac{1}{x} < \alpha_0 + 1$. En résumé, $\alpha_0 \leqslant 1 + \dfrac{1}{x} < \alpha_0 + 1$ et donc $\alpha_0 = E\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1 + E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3.3 D'après la question précédente, $a_{n_0} = 1 + E\left(\dfrac{1}{x}\right) = b_{n_0}$. Ceci contredit la définition de n_0. Il était donc absurde de supposer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étaient distinctes. On a donc montré que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore on a montré l'unicité du développement en série de Engel d'un réel $x \in]0, 1]$.

4.

4.1 Soit c un entier supérieur ou égal à 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = c$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers telles que $a_0 \geqslant 2$.

$$[a_0, \dots, a_n, \dots] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{c^{k+1}} = \frac{1}{c} \times \frac{1}{1 - \dfrac{1}{c}} = \frac{1}{c-1}.$$

4.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = n + 2$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers telles que $a_0 \geqslant 2$.

$$[a_0, \dots, a_n, \dots] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2 \times 3 \times \dots \times (k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+2)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 2.$$

4.3 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = (2n+1)(2n+2)$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers telles que $a_0 \geqslant 2$.

$$[a_0,\dots,a_n,\dots]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\dots\times(2k+1)(2k+2)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+2)!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}=\text{ch}(1)-1.$$

5.

$$\begin{aligned}\text{ch}\left(\sqrt{2}\right)-2&=-2+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2k}}{(2k)!}=-2+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{(2k)!}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2^k}{(2k)!}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^{k+2}}{(2k+4)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\dfrac{1\times 2}{2}\times\dfrac{3\times 4}{2}\times\dots\times\dfrac{(2k+3)(2k+4)}{2}}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(1\times 1)\times(3\times 2)\times\dots\times(2k+3)(k+2)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(3\times 2)\times(5\times 3)\times\dots\times(2k+3)(k+2)}.\end{aligned}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $a_n=(2n+3)(n+2)$. Tous les a_n, $n\in\mathbb{N}$, sont entiers. $a_0=6\geqslant 2$. Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+1}-a_n=2(n+1)^2+7(n+1)+6-2n^2-7n-6=4n+9\geqslant 0,$$

et donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a donc trouvé le développement de Engel de $\text{ch}\left(\sqrt{2}\right)-2$:

$$\text{ch}\left(\sqrt{2}\right)-2=[a_0,\dots,a_n\dots]\text{ où }\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=(2n+3)(n+2).$$

6. • Supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante à partir d'un certain rang. Il exite un entier $c\geqslant 2$ et un entier n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0,\ a_n=c$. Si $n_0=0$, la question 4.1 montre que $x=\dfrac{1}{c-1}\in\mathbb{Q}$. Supposons $n_0\geqslant 1$.

$$x=\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{1}{a_0\dots a_k}+\sum_{k=n_0}^{+\infty}\frac{1}{a_0\dots a_{n_0-1}\times c^{k-n_0}}=\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{1}{a_0\dots a_k}+\frac{1}{a_0\dots a_{n_0-1}}\frac{c}{c-1}\in\mathbb{Q}.$$

• Supposons que le réel $x\in]0,1]$ soit un rationnel. Posons $x=\dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux tels que $a\leqslant b$.
La division euclidienne de b par a fournit un entier naturel q et un entier naturel $r\in[\![0,a-1]\!]$ tels que $b=aq+r$. On a $q=E\left(\dfrac{b}{a}\right)=E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis $a_0=1+q$. On obtient alors

$$x_1=a_0x-1=(q+1)\frac{a}{b}-1=\frac{(q+1)a-b}{b}=\frac{a-r}{b}.$$

Si $r=0$, on obtient $x_1=\dfrac{a}{b}=x=x_0$ puis par une récurrence immédiate, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n=x$. Dans ce cas, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 0 et il en de même de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sinon, $r\in[\![1,a-1]\!]$ puis $1\leqslant a-r\leqslant a-1<a$. x_1 s'écrit donc $\dfrac{a'}{b}$ où a' est un entier naturel non nul tel que $a'<a$.
On recommence ce procédé tant que le reste obtenu n'est pas nul. Vérifions qu'il existe un premier reste nul. Dans le cas contraire, on peut écrire chaque x_n, $n\in\mathbb{N}$, sous la forme $\dfrac{\alpha_n}{b}$ où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante d'entiers naturels non nuls. Une telle suite n'existe pas et donc il existe un premier reste nul ou encore il existe un entier naturel n_0 tel que x_{n_0} s'écrive $\dfrac{\alpha_{n_0}}{b}$ avec $\alpha_{n_0}\in\mathbb{N}^*$ et $\dfrac{b}{\alpha_{n_0}}\in\mathbb{N}$. D'après l'étude du cas $r=0$, on a alors $x_{n_0+1}=x_{n_0}$ puis par récurrence, $\forall n\geqslant n_0$, $x_n=x_{n_0}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante à partir du rang n_0 et il en est de même de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 2 : statistiques et probabilités

Partie A : deux indicateurs de dispersion

1. Minimisation de G

1.1 Posons $M=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

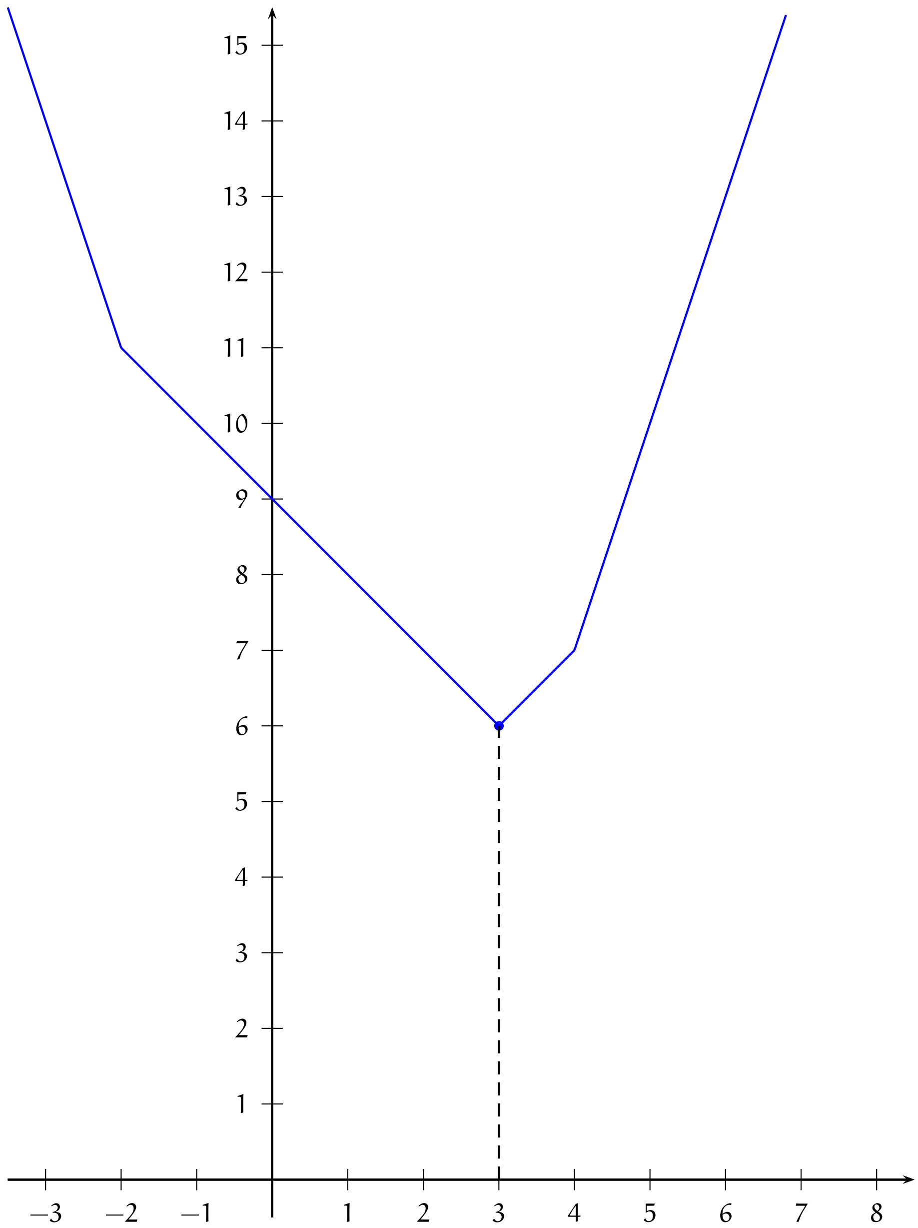
$$G(x)=\sum_{i=1}^{n}(x^2-2x_ix+x_i^2)=nx^2-2nMx+\sum_{i=1}^{n}x_i^2=n(x-M)^2-nM^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$
$$\geqslant -nM^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

avec égalité si et seulement si $x=M$. Ainsi, la fonction G admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en un réel et un seul.

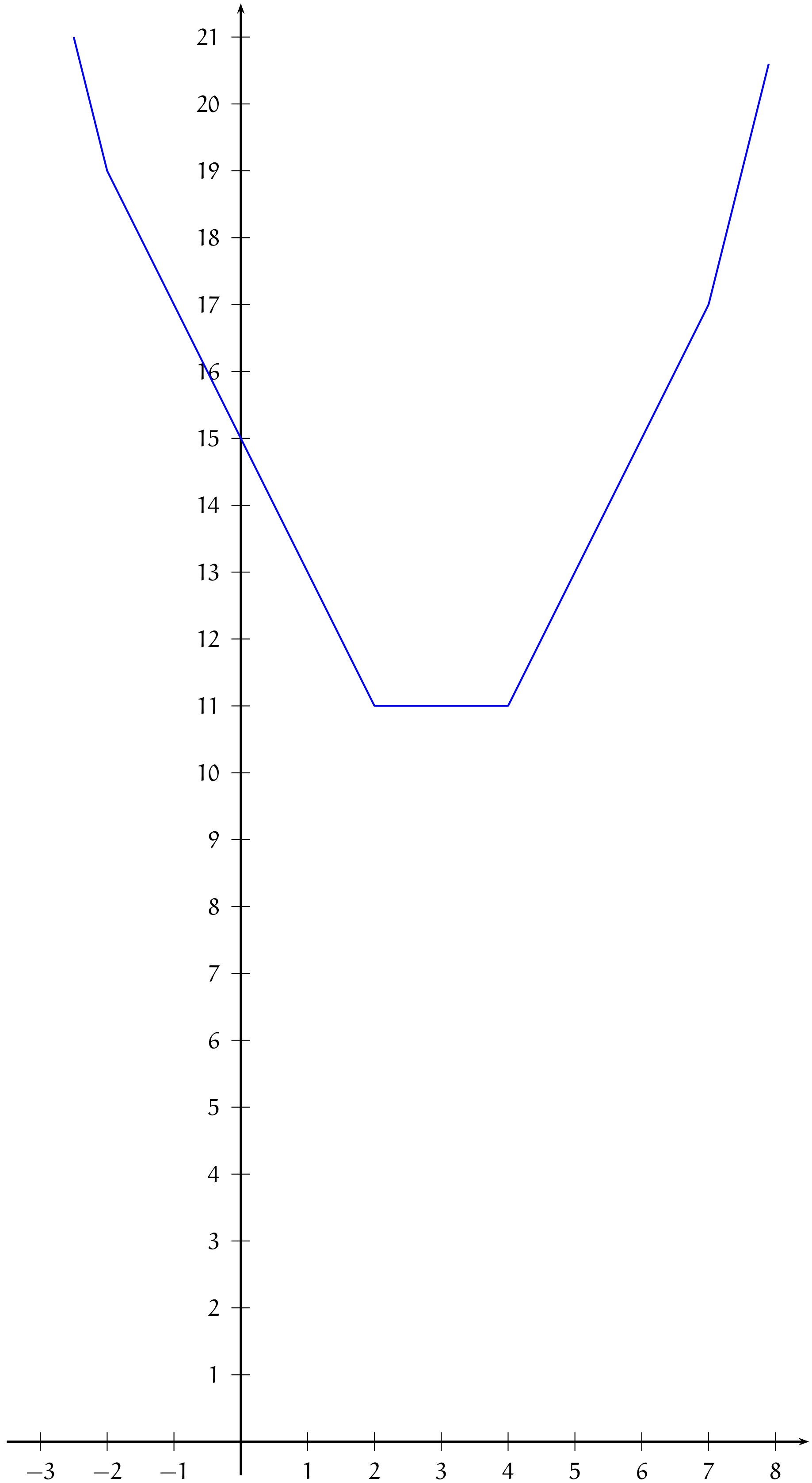
1.2 Le réel $M=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$ est la moyenne des x_i, $1\leqslant i\leqslant n$.

2. Minimisation de L

2.1 Dans cette question, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $L(x)=|x+2|+|x-3|+|x-4|$.



2.2 Dans cette question, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $L(x)=|x+2|+|x-3|+|x-4|+|x-7|$.



2.3 On suppose sans perte de généralité que la numérotation des x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, a été effectuée de sorte que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

1er cas. Supposons n impair. Posons $n = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. Si $p = 0$, la fonction $L : x \mapsto [x - x_1|$ atteint son minimum en x_1. On suppose dorénavant $p \geqslant 1$.

Vérifions que pour tout réel x, $L(x) \geqslant L(x_{p+1})$ avec égalité si et seulement si $x = x_{p+1}$. Tout d'abord

$$L(x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p} |x_{p+1} - x_i| + \sum_{i=p+2}^{2p+1} |x_{p+1} - x_i| = \sum_{i=1}^{p} (x_{p+1} - x_i) + \sum_{i=p+2}^{2p+1} (x_i - x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p} x_i - \sum_{i=p+2}^{2p+1} x_i.$$

Pour tout $x \in]-\infty, x_1]$, $L(x) = -(2p+1)x + \sum_{i=1}^{2p+1} x_i$. Sur l'intervalle $]-\infty, x_1]$, la fonction L est une fonction affine strictement décroissante.
Soit $k \in [\![1, p]\!]$ puis $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

$$L(x) = \sum_{i=1}^{k} (x - x_i) + \sum_{i=k+1}^{2p+1} (x_i - x) = x(k - (2p+1-k)) - \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{2p+1} x_i = (2k - 2p - 1)x - \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{2p+1} x_i.$$

Puisque $2k - 2p - 1 \leqslant -1 < 0$, la fonction L est une fonction affine strictement décroissante sur $[x_k, x_{k+1}]$. Puisque L est continue sur $]-\infty, x_{p+1}]$, strictement décroissante sur $]-\infty, x_1]$ et sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$, $k \in [\![1, p]\!]$, la fonction L est strictement décroissante sur $]-\infty, x_{p+1}]$. De même, la fonction L est strictement croissante sur $[x_{p+1}, +\infty[$ et finalement la fonction L admet un minimum global strict en x_{p+1}.

2ème cas. Supposons n pair. Posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. Comme précédemment la fonction L est strictement décroissante sur $]-\infty, x_p]$ et strictement croissante sur $[x_{p+1}, +\infty[$. Enfin, pour $x \in [x_p, x_{p+1}]$,

$$L(x) = \sum_{i=1}^{p} (x - x_i) + \sum_{i=p+1}^{2p} (x_i - x) = -\sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=p+1}^{2p+1} x_i.$$

La fonction L est donc constante sur $[x_p, x_{p+1}]$. Par suite, la fonction L admet un minimum atteint en n'importe quel réel de l'intervalle $[x_p, x_{p+1}]$ et uniquement en un tel réel.

2.4 Si n est impair, L atteint son minimum en la médiane de la série $(x_1, \ldots x_n)$. Si n est pair, L atteint son minimum en n'importe quel point de l'intervalle médian $\left[x_{n/2}, x_{1+n/2}\right]$.

Partie B : théorie de l'information, le cas discret

1. Deux exemples

1.1 Ici, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{1}{4}$ et donc

$$H(A) = -4 \times \frac{1}{4} \times \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 2\ln 2.$$

1.2

$$H(A) = -\left(2 \times \frac{1}{8} \times \ln\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} \times \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2}\right)\ln 2 = \frac{7}{4}\ln 2 < 2\ln 2.$$

2. Cas $n = 2$. Ici, l'entropie est définie par $H(A) = -p\ln(p) - (1-p)\ln(1-p)$ où $p \in]0, 1[$. Pour $p \in]0, 1[$, posons $f(p) = -p\ln(p) - (1-p)\ln(1-p)$. f est dérivable sur $]0, 1[$ puis pour $p \in]0, 1[$,

$$f'(p) = -1 - \ln p + 1 + \ln(1-p) = \ln(1-p) - \ln(p).$$

Pour $p \in]0, 1[$, $f'(p) > 0 \Leftrightarrow \ln(1-p) > \ln(p) \Leftrightarrow 1 - p > p \Leftrightarrow p < \dfrac{1}{2}$ et de même $\ln(1-p) = \ln(p) \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$. On en déduit que la fonction f admet un maximum global strict en $\dfrac{1}{2}$ ou encore, l'entropie est maximale si et seulement si les événements A_1 et A_2 sont équiprobables.

3. Cas général Soit f une fonction convexe sur I

3.1 Montrons par récurrence que

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall (x_1, \ldots x_n) \in I^n,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I \text{ et } f(\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)\right).$$

Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété ci-dessus.
• Le cas $n = 2$ est la définition d'une fonction convexe.
• Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Soient $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in I^{n+1})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.
Puisque les λ_k, $1 \leqslant k \leqslant n+1$ sont positifs, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $\lambda_k \in [0, 1]$.

- Si $\lambda_{n+1} = 1$, puisque les λ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ sont positifs et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1} = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = 0$.
Dans ce cas, l'inégalité à démontrer est immédiate.
- Supposons maintenant que $\lambda_{n+1} \in [0, 1[$.

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k\right)$$

Les nombres $\dfrac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}}$ sont positifs et vérifient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$. Par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k \in I$ et

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Le cas $n = 2$ permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k\right) \\ &\leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k). \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.
3.2 Pour $x \in]0, 1[$, posons $f(x) = x \ln x$. f est deux fois dérivable sur $]0, 1[$ et pour $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \ln x + 1$ puis $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$. Donc la fonction f est convexe sur $]0, 1[$.
3.3 Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k) &= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(p_k) \\ &\geqslant nf\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) = nf\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = n \times \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n), \end{aligned}$$

puis $H(A) \leqslant \ln(n)$. Comme $\ln(n)$ est l'entropie dans le cas où les A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont équiprobables (et donc de probabilité $\dfrac{1}{n}$), on a montré que l'entropie est maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

Partie B : théorie de l'information, le cas continu

1. Deux exemples

1.1 Pour tout réel t, $g(t) = \dfrac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. g est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. De plus, pour tout réel t, $g(t) > 0$ puis

$$-g(t) \ln(g(t)) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi)\right).$$

La fonction $t \mapsto -g(t)\ln(g(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ et $t \mapsto \dfrac{t}{2}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t^2}{2}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt &= \int_0^A \frac{t}{2} \times t\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt = \left[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{t}{2}\right]_0^A + \frac{1}{2}\int_0^A \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt \\ &= -\frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\int_0^A \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt.\end{aligned}$$

Maintenant, il est admis dans l'énoncé que la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

Quand A tend vers $+\infty$, $-\dfrac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times \dfrac{A}{2}$ tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées et donc quand A tend vers $+\infty$, on obtient la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt = \frac{1}{4}.$$

Mais alors

$$H(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt + \frac{\ln(2\pi)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt = \frac{1 + \ln(2\pi)}{2}.$$

1.2 (Erreur d'énoncé : on supposera que la définition de l'entropie de h est $H(h) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\ln(h(x))\ dx$.)

Soit $\lambda > 0$. Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0$ puis

$$-h(x)\ln(h(x)) = -\lambda e^{-\lambda x}\ln\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) = -\ln(\lambda) \times \lambda e^{-\lambda x} + \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

La fonction $x \mapsto -h(x)\ln(h(x))$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. Soit alors $A > 0$. Les deux fonctions $x \mapsto -e^{-\lambda x}$ et $x \mapsto x$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^A \lambda^2 x e^{-\lambda x}\ dx &= \lambda\left(\int_0^A x \times \lambda e^{-\lambda x}\ dt\right) = \lambda\left(\left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x}\ dx\right) \\ &= -\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1\end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x}\ dx = 1$. Par suite,

$$H(h) = -\ln(\lambda)\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\ dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x}\ dx = 1 - \ln(\lambda).$$

2. Deux résultats préliminaires

2.1 Soit $x > 0$. Pour $y > 0$, on pose $f(y) = x\ln x + y - x - x\ln y$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $y > 0$,

$$f'(y) = 1 - \frac{x}{y} = \frac{y - x}{y}.$$

f' est strictement négative sur $]0, x[$ et strictement positive sur $]x, +\infty[$ puis f est ctritement décroissante sur $]0, x]$ et strictement croissante sur $[x, +\infty[$. Par suite, f admet un minimum global strict en x égal à

$$f(x) = x\ln x + x - x - x\ln x = 0.$$

On a montré que pour tous réels strictement positifs x et y, $x\ln y \leqslant x\ln x + y - x$ avec égalité si et seulement si $y = x$.

2.2 Puisque f est positive sur $[a,b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$.

Supposons $f \neq 0$. Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité, il existe un intervalle I de longueur strictement positive et de centre x_0 tel que pour tout $x \in I\cap[a,b]$, $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. $I\cap[a,b]$ est un intervalle de longueur strictement positive ℓ et puisque f est positive,

$$\int_a^b f(x)\ dx \geqslant \int_{I\cap[a,b]} f(x)\ dx \geqslant \frac{\ell f(x_0)}{2} > 0.$$

Ainsi, si f n'est pas la fonction nulle, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx > 0$. Par contraposition, si $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0$ alors f est la fonction nulle.

3. Une maximisation d'entropie sous contrainte de moyenne et de variance

3.1 • La fonction $t \mapsto tg(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, négligeable en $+\infty$ ou $-\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Par suite, la fonction $t \mapsto tg(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction $t \mapsto tg(t)$ est impaire, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\ dt = 0$.

• La fonction $t \mapsto t^2g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, négligeable en $+\infty$ ou $-\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Par suite, la fonction $t \mapsto t^2g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le calcul de la question 1.1, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2g(t)\ dt = 4 \times \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt = 4 \times \frac{1}{4} = 1$.

On a montré que $g \in \mathcal{N}$.

3.2 Soit $f \in \mathcal{N}$.

$$\begin{aligned}
H(g) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(g(x))\ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - f(x))\ln(g(x))\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - f(x))\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi)\right)\ dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2\pi)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx\right) - \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g(x)\ dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\ dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2\pi)(1-1) - \frac{1}{2}(1-1) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $H(g) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(g(x))\ dx$.

3.3 • Soit $f \in \mathcal{N}$.

$$\begin{aligned}
H(g) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(g(x))\ dx \\
&\geqslant -\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)\ln(f(x)) + g(x) - f(x))\ dx \text{ (d'après la question 2.1)} \\
&= H(f) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = H(f) + 1 - 1 = H(f).
\end{aligned}$$

• De plus,

$$H(g) = H(f) \Leftrightarrow H(g) - H(f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x))\ dx = 0.$$

D'après la question 2.1, la fonction $x \mapsto f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

$$0 \leqslant \int_a^b (f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x))\ dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x))\ dx = 0.$$

Donc, $\int_a^b (f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x))\ dx = 0$ puis, d'après la question 2.2, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x) = 0$. Mais alors d'après la question 2.1, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) = g(x)$. Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on a montré que si $H(f) = H(g)$, alors $f = g$.

Réciproquement, si $f = g$ alors $H(f) = H(g)$ et on a montré que

$$\forall f \in \mathcal{N},\ H(f) = H(g) \Leftrightarrow f = g.$$

