SESSION 2012

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

Problème 1 : anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Eléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned} a \text{ inversible dans } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times) &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}/\ \overline{a} \times \overline{u} = \overline{1} \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2/\ au = 1 - nv \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2/\ ua + vn = 1 \\ &\Leftrightarrow a \wedge n = 1 \text{ (d'après le théorème de Bézout).} \end{aligned}$$

2. • $\overline{1} \in \mathcal{I}_n$ et donc $\mathcal{I}_n$ n'est pas vide.
• On sait que le produit de deux classes inversibles est une classe inversible ou encore $\times$ est interne dans $\mathcal{I}_n$.
• On sait que la multiplication des classes est commutative.
• On sait que la multiplication des classes est associative.
• $\overline{1} \in \mathcal{I}_n$ et pour toute classe inversible $\overline{a}$, $\overline{a} \times \overline{1} = \overline{a}$.
• On sait que l'inverse d'une classe inversible est une classe inversible ou encore tout élément de $\mathcal{I}_n$ admet un inverse dans $\mathcal{I}_n$.

On a montré que $(\mathcal{I}_n, \times)$ est un groupe commutatif.

3.

$\mathcal{I}_{10}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$
ordre	1	4	4	2

Puisque l'élément $\overline{3}$ est d'ordre 4 et que $\text{card}(\mathcal{I}_{10}) = 4$, le groupe $(\mathcal{I}_{10}, \times)$ est cyclique.

4.

$\mathcal{I}_{12}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$
ordre	1	2	2	2

Puisque $\text{card}(\mathcal{I}_{12}) = 4$ et que $\mathcal{I}_{12}$ ne contient pas d'élément d'ordre 4, le groupe $(\mathcal{I}_{12}, \times)$ n'est pas cyclique.

5. Algorithmes écrits avec Algobox.

5.1 Voir page suivante. On utilise cet agorithme en rentrant deux entiers k et n tels que $k \geqslant 0$ et $n > 1$.


```
VARIABLES
    n EST DU TYPE NOMBRE
    k EST DU TYPE NOMBRE
    r EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
    LIRE n
    LIRE k
    Si k>=n ALORS
        DEBUT SI
            k PREND LA VALEUR k-floor(k/n)*n
        FIN SI
    r PREND LA VALEUR n%k
    TANT QUE (r!=0) FAIRE
        DEBUT TANT QUE
            n PREND LA VALEUR k
            k PREND LA VALEUR r
            r PREND LA VALEUR n%k
        FIN TANT QUE
    SI (k!=1) ALORS
        DEBUT SI
            AFFICHER "0"
        FIN SI
        SINON
            DEBUT SINON
                AFFICHER "1"
            FIN SINON
FIN ALGORITHME
```

5.2

```
VARIABLES
    n EST DU TYPE NOMBRE
    k EST DU TYPE NOMBRE
    r EST DU TYPE NOMBRE
    card EST DU TYPE NOMBRE
    a EST DU TYPE NOMBRE
    b EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
    LIRE n
    card PREND LA VALEUR 0
    POUR k ALLANT DE 1 A n-1
        DEBUT POUR
            a PREND LA VALEUR n
            b PREND LA VALEUR k
            r PREND LA VALEUR a%b
            TANT QUE (r!=0) FAIRE
                DEBUT TANT QUE
                    a PREND LA VALEUR b
                    b PREND LA VALEUR r
                    r PREND LA VALEUR a%b
                FIN TANT QUE
            SI (b==1) ALORS
                DEBUT SI
                    card PREND LA VALEUR card+1
                FIN SI
        FIN POUR
    AFFICHER "Le cardinal de In est "
    AFFICHER card
FIN ALGORITHME
```


5.3

```
VARIABLES
  n EST DU TYPE NOMBRE
  k EST DU TYPE NOMBRE
  r EST DU TYPE NOMBRE
  a EST DU TYPE NOMBRE
  m EST DU TYPE NOMBRE
  ordre EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
  LIRE n
  LIRE k
  m PREND LA VALEUR n
  a PREND LA VALEUR k
  SI (k>=n) ALORS
    DEBUT SI
      k PREND LA VALEUR k-floor(k/n)*n
    FIN SI
  r PREND LA VALEUR n%k
  TANT QUE (r!=0) FAIRE
    DEBUT TANT QUE
      n PREND LA VALEUR k
      k PREND LA VALEUR r
      r PREND LA VALEUR n%k
    FIN TANT QUE
  SI (k!=1) ALORS
    DEBUT SI
      AFFICHER "Erreur"
    FIN SI
    SINON
      DEBUT SINON
        ordre PREND LA VALEUR 1
        TANT QUE (pow(a,ordre)-floor(pow(a,ordre)/m)*m!=1) FAIRE
          DEBUT TANT QUE
            ordre PREND LA VALEUR ordre+1
          FIN TANT QUE
        AFFICHER "L'ordre de "
        AFFICHER a
        AFFICHER " est "
        AFFICHER ordre
      FIN SINON
FIN ALGORITHME
```

Eléments non inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$.

6.

6.1 Soit n un entier supérieur ou égal à 2 non primaire. n possède un facteur premier p. On note $\alpha \geqslant 1$ l'exposant de p dans la décomposition primaire de n et on pose $n_1 = p^\alpha$ puis $n_2 = \dfrac{n}{n_1}$ de sorte que n_2 est un entier tel que $n = n_1 n_2$.
Puisque n n'est pas primaire, $p^\alpha \neq n$ et donc $1 < n_1 < n$. L'entier n_2 est supérieur ou égal à 2 et n'admet plus p pour facteur premier. Les entiers n_1 et n_2 n'ont pas de facteur premier commun et donc $n_1 \wedge n_2 = 1$.
On a montré qu'il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que $n = n_1 n_2$ et $1 < n_1 < n_2$ et $n_1 \wedge n_2 = 1$.

6.2 Posons $d = (n_1 + n_2) \wedge n$.

d divise n_1+n_2 et d divise $n = n_1 n_2$. Donc d divise $(n_1+n_2)n_1 - n_1 n_2 = n_1^2$ et de même d divise $(n_1+n_2)n_2 - n_1 n_2 = n_2^2$.
Mais alors d divise $n_1^2 \wedge n_2^2 = 1$ (n_1 et n_2 sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 n'ayant pas de diviseur premier commun et il en est de même de n_1^2 et n_2^2).
Finalement, d divise 1 et donc $d = 1$. On a montré que $(n_1 + n_2) \wedge n = 1$.

6.3 Puisque $n = n_1 n_2$, $n_1 \wedge n = n_1 > 1$. Puisque n_1 et n ne sont pas premiers entre eux, $\overline{n_1} \notin \mathcal{I}_n$ d'après la question 1. De même, $n_2 \notin \mathcal{I}_n$.

7. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

• Si p divise k, alors p divise $k \wedge p^\alpha$. Par suite, k et p^α ne sont pas premiers entre eux et donc $\overline{k} \in \mathcal{N}_{p^\alpha}$.
• Si p ne divise pas k, alors k et p^α sont premiers entre eux (car p est premier). Dans ce cas, $\overline{k} \notin \mathcal{N}_{p^\alpha}$.

On a montré que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\left(\overline{k} \in \mathcal{N}_{p^\alpha} \Leftrightarrow p|k\right)$.

8. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Si n n'est pas primaire, d'après la question 6, on peut écrire $n = n_1 n_2$ avec n_1 et n_2 entiers naturels tels que $1 < n_1 < n$ et $(n+1+n_2) \wedge n = 1$. La question 6.3 montre que $\overline{n_1}$ et $\overline{n_2}$ appartiennent à $\mathcal{N}_n$ et la question 6.2 montre que $\overline{n_1} + \overline{n_2}$ n'appartiennent pas à $\mathcal{N}_n$. Dans ce cas, $\mathcal{N}_n$ n'est pas stable pour $+$ et en particulier n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

• Supposons que n soit un nombre primaire. Il existe un nombre premier p et un entier naturel non nul α tel que $n = p^\alpha$. Les éléments de $\mathcal{N}_n$ sont les classes des entiers relatifs divisibles par p. Donc,
- $\overline{0}$ appartient à $\mathcal{N}_n$,
- la différence de deux éléments de $\mathcal{N}_n$ est encore un élément de $\mathcal{N}_n$.

Ceci montre que $\mathcal{N}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

On a montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ (\mathcal{N}_n \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \text{ si et seulement si } n \text{ est primaire}).}$$

Problème 2 : isométries du plan et de l'espace

Partie A : généralités

1. Soient f une isométrie de E et F une partie non vide de E.
• Si $f \in G(F)$, alors $f(F) = F$. Mais alors,
- Si M est un point de F, alors $f(M) \in f(F) = F$
- Si M est un point de $F = f(F)$, $f^{-1}(M) \in f^{-1}(f(F)) = F$.

• Réciproquement, supposons que pour tout M de F, $f(M)$ et $f^{-1}(M)$ soient dans F.
-Pour tout point M un point de F, $f(M) \in F$. Ceci montre que $f(F) \subset F$.
-Soit M' un point de $f(F)$. Il existe $M \in F$ tel que $M' = f(M)$ à savoir $M = f^{-1}(M')$. Puisque $M \in F$, $M' = f(M)$ est dans F. Ceci montre que $F \subset f(F)$ et finalement que $f(F) = F$.

On a montré que

$$\boxed{\forall f \in \text{Is}(E),\ f \in G(F) \Leftrightarrow \forall M \in F,\ (f(M) \in F \text{ et } f^{-1}(M) \in F).}$$

2. • $G(F) \subset \text{Is}(E)$.
• $\text{Id}_E \in G(F)$ et en particulier $G(F) \neq \varnothing$.
• Soit $(f, g) \in (G(F))^2$. D'après 1), pour tout point M de F,
- $g^{-1}(M) \in F$ puis $f(g^{-1}(M)) \in F$,
- $f^{-1}(M) \in F$ puis $g(f^{-1}(M)) \in F$ ou encore $(f \circ g^{-1})^{-1}(M) \in F$.

Toujours d'après la question précédente, on en déduit que $f \circ g^{-1} \in G(F)$. Ainsi, $\forall (f, g) \in (G(F))^2$, $f \circ g^{-1} \in G(F)$.

Ceci montre que

$$\boxed{G(F) \text{ est un sous-groupe de } (\text{Is}(E), \circ).}$$

Dans la démonstration précédente, on remplace $G(F)$ par $G^+(F)$ et $\text{Is}(E)$ par $\text{Is}^+(E)$ et on obtient $G^+(F)$ est un sous-groupe de $(\text{Is}^+(E), \circ)$. Puisque $\text{Is}^+(E)$ est un sous-groupe de $(\text{Is}(E), \circ)$,

$$\boxed{G^+(F) \text{ est un sous-groupe de } (\text{Is}(E), \circ).}$$

3. Soit s une symétrie qui est une isométrie. Alors $s^{-1} = s$ et d'après 1), $s \in G(F) \Leftrightarrow \forall M \in F,\ s(M) \in F$.

4.

4.1 Soit $f \in G^+(F)$. Alors $\varphi \circ f \in \text{Is}^-(E)$ et d'autre part, pour tout point M de F, $f(M) \in F$ puis $\varphi(f(M)) \in F$ et aussi $\varphi^{-1}(M) \in F$ puis $(\varphi \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(\varphi^{-1}(M)) \in F$. Ainsi, $\varphi \circ f \in G^-(M)$. Φ est une application bien définie.

4.2 Soit $g \in G^-(F)$. Alors $\varphi \circ g \in \text{Is}^+(E)$ et d'autre part, pour tout point M de F, $g(M) \in F$ puis $\varphi(g(M)) \in F$ et aussi $\varphi^{-1}(M) \in F$ puis $(\varphi \circ g)^{-1}(M) = g^{-1}(\varphi^{-1}(M)) \in F$. Ainsi, $\varphi \circ g \in G^+(M)$.

On définit donc une application en posant $\Psi : \begin{array}{ccc} G^-(F) & \rightarrow & G^+(F) \\ g & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$. Il est immédiat que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{G^+(F)}$ et $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{G^-(F)}$. On sait alors que Φ est une bijection et que $\Psi = \Phi^{-1}$.

5. $G^+(F)$ n'est pas vide d'après la question 2.

• Si $G^-(F)$ est vide, alors $G(F) = G^+(F)$ puis $\mathrm{card}(G(F)) = \mathrm{card}(G^+(F))$.

• Si $G^-(F)$ n'est pas vide, $(G^+(F), G^-(F))$ est une partition de $G(F)$ et de plus, les ensembles $G^+(F)$ et $G^-(F)$ sont équipotents d'après la question précédente. Par suite, $\mathrm{card}(G(F)) = \mathrm{card}(G^+(F)) + \mathrm{card}(G^-(F)) = 2\mathrm{card}(G^+(F))$.

Partie B : exemples dans le plan euclidien

Un singleton.

1.

1.1 f est une isométrie négative et l'identité est une isométrie positive. Donc $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Par suite, il existe un point $I \in \mathcal{P}$ tel que $f(I) \neq I$.

1.2 Puisque f est une isométrie, $\Omega I = f(\Omega)f(I) = \Omega f(I)$ et donc le point Ω appartient à la médiatrice du segment $[I, f(I)]$. On en déduit que $r(\Omega) = \Omega$.

$r \circ f$ est une isométrie positive en tant que composée de deux isométries négatives. De plus, $r \circ f$ admet les points Ω et I pour points invariants. Puisque $f(\Omega) = \Omega$ et que $f(I) \neq I$, les points Ω et I sont distincts. En résumé, $r \circ f$ est une isométrie positive ayant au moins deux points fixes distincts et donc $r \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ car $r \circ f$ ne peut être ni une rotation distincte de l'identité (qui n'a qu'un point invariant), ni une translation distincte de l'identité (qui n'a pas de point invariant).

1.3 Mais alors $f = r^{-1} = r$ ou encore f est la réflexion d'axe la médiatrice du segment $[I, f(I)]$.

2. • D'après la question précédente, un élément de $G^-(F)$ est nécessairement une réflexion d'axe passant par Ω et réciproquement une réflexion d'axe passant par Ω est un élément de $G^-(F)$. $G^-(F)$ est donc constitué des réflexions d'axe passant par Ω.

• Soit r une réflexion d'axe passant par Ω fixée. D'après la question 3), les éléments de $G^+(F)$ sont les $r \circ f$ où $f \in G^-(F)$. Il est connu que la composée de deux réflexions d'axe passant par Ω est une rotation de centre Ω, éventuellement égale à l'identité. Réciproquement, les rotations de centre Ω sont dans $G^+(F)$ et donc $G^+(F)$ est constitué des rotations de centre Ω.

On a montré que $G(F)$ est constitué des rotations de centre Ω (avec la convention que $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ est une rotation de centre Ω) et des réflexions d'axe passant par Ω.

Une paire.

3. $f \in G(\mathcal{U})$ et donc ou bien $f(P_1) = P_1$ et $f(P_2) = P_2$, ou bien $f(P_1) = P_2$ et $f(P_2) = P_1$. Dans les deux cas, l'image par f du segment $[P_1, P_2]$ est le segment $[f(P_1), f(P_2)] = [P_1, P_2]$. Puisque f est une application affine, l'image par f du milieu de $[P_1, P_2]$ est le milieu de $[f(P_1), f(P_2)] = [P_1, P_2]$ ou encore $f(I) = I$.

4. Soit $f \in G^+(\mathcal{U})$ tel que $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. f est une isométrie positive admettant I pour point invariant et donc f est une rotation de centre I. L'angle de f est $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{f(P_1)f(P_2)}\right)$. Cet angle est soit $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)$ ou $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_1}\right)$. Donc f est soit la rotation de centre I et d'angle 0 modulo 2π c'est-à-dire $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ ce qui est exclu, soit la rotation de centre I et d'angle π modulo 2π c'est-à-dire la symétrie centrale de centre I.

On a montré que si $f \in G^+(\mathcal{U})$ et $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, alors f est la symétrie centrale de centre I.

5. Réciproquement, s_I la symétrie centrale de centre I est dans $G^+(\mathcal{U})$ et donc $G^+(\mathcal{U}) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, s_I\}$. D'après la question 4, $G^-(\mathcal{U})$ est équipotent à $G^+(\mathcal{U})$ et donc $\mathrm{card}(G^-(\mathcal{U})) = 2$. Comme la réflexion d'axe (P_1P_2) et la réflexion d'axe la médiatrice de $[P_1, P_2]$ sont deux éléments distincts de $G^-(\mathcal{U})$, $G^-(\mathcal{U})$ est constitué de la réflexion d'axe (P_1P_2) et la réflexion d'axe la médiatrice de $[P_1, P_2]$.

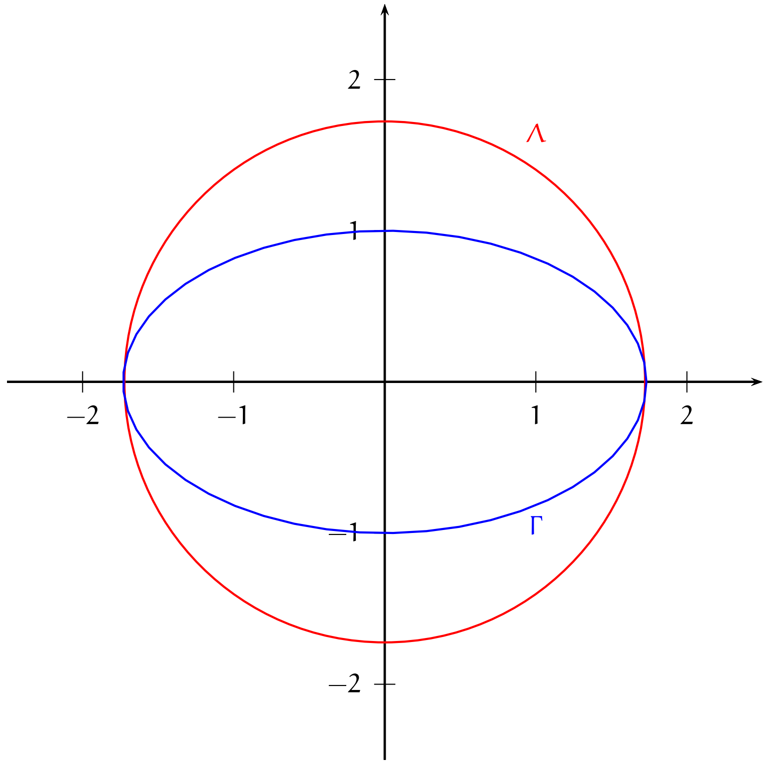
En résumé, $G^(\mathcal{U})$ est formé de quatre éléments : l'identité, la symétrie centrale de centre I et deux réflexions.

Une ellipse.

6. $s(M)$, $r_1(M)$ et $r_2(M)$ ont pour coordonnées respectives $(-x, -y)$, $(x, -y)$ et (x, y).

7. Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{(\pm x)^2}{a^2} + \dfrac{(\pm y)^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, on en déduit que pour tout point M du plan, $M \in \Gamma \Leftrightarrow s(M) \in \Gamma \Leftrightarrow r_1(M) \in \Gamma \Leftrightarrow r_2(M) \in \Gamma$. Comme s, r_1 et r_2 sont des involutions, ceci montre que s, r_1 et r_2 appartiennent à $G(\Gamma)$. On a montré que $G(\{A, A'\}) \subset G(\Gamma)$.

8. Figure.



9. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). Puisque $b < a$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \geqslant \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{1}{a^2}(x^2 + y^2)$ et donc

$$M \in \Gamma \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2) \leqslant 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leqslant a^2 \Rightarrow M \in \Delta.$$

On a montré que $\Gamma \subset \Delta$.

10. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y).

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma \cap \Lambda &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 & (1) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 & (1) \\ y^2\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right) = 0 & (1) - (2) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \end{array}\right. \quad \left(\text{car } \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \neq 0\right) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in \{(a, 0), (-a, 0)\} \Leftrightarrow M \in \{A, A'\}.
\end{aligned}$$

On a montré que $\Gamma \cap \Lambda = \{A, A'\}$.

11. Soient P et P' deux points de Γ. On note (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives des points P et P'.

(a)

$$\begin{aligned}
PP'^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2(xx' + yy') \\
&\leqslant x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2} \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant a^2 + a^2 + 2 \times a \times a \text{ (d'après la question 9)} \\
&= 4a^2,
\end{aligned}$$

et donc $PP' \leqslant 2a$.

(b) L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si chaque inégalité écrite est une égalité. En particulier, $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = a^2$ et donc P et P' appartiennent à Λ et Γ. D'après la question 10, on a nécessairement $\{P, P'\} = \{A, A'\}$. Réciproquement, $AA' = 2a$ et on a montré que $PP' = 2a \Leftrightarrow \{P, P'\} = \{A, A'\}$.

12. Soit f un élément de $G(\Gamma)$. Posons $P = f(A)$ et $P' = f(A')$. P et P' sont deux points de Γ. Puisque f est une isométrie, on a $PP' = AA' = 2a$ et donc $\{P, P'\} = \{A, A'\}$ d'après la question précédente. Par suite, $f \in G(\{A, A'\})$. Ceci montre que $G(\Gamma) \subset G(\{A, A'\})$. D'autre part, $G(\{A, A'\}) \subset G(\Gamma)$ d'après la question 7 et finalement,

$$\boxed{G(\Gamma) = G(\{A, A'\}).}$$

Partie C : étude d'isométries de l'espace

1.

1.1 Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathcal{E})$. Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM}$.

$$\left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{f(O)f(M)}\right\| = f(O)f(M) = OM = \|\overrightarrow{x}\|.$$

Donc $\overrightarrow{f} \in O(\mathcal{E})$.
1.2 Soit $(M, M') \in \mathcal{E}^2$.

$$M' = f(M) \Leftrightarrow M' = f(O) + \overrightarrow{f(O)f(M)} \Leftrightarrow M' = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) + f(O) \Leftrightarrow X' = AX + B.$$

1.3 Puisque $\overrightarrow{f} \in O(\mathcal{E})$ et que A est la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on sait que $A \in O(E_3)$. Ensuite, le déterminant de $\overrightarrow{f}$ est le déterminant de A c'est-à-dire 1 ou -1. Donc

$$\overrightarrow{f} \in \mathrm{Is}^+(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{f}\right) > 0 \Leftrightarrow \det(A) > 0 \Leftrightarrow \det(A) = 1 \Leftrightarrow A \in SO_3(\mathbb{R}).$$

2. Chacune des matrices proposées est diagonale et en particulier est égale à sa transposée. Donc, pour $i \in [\![0, 3]\!]$,

$${}^tA_iA_i = A_i{}^tA_i = A_i^2 = \mathrm{diag}\{(\pm1)^1, (\pm1)^2, (\pm1)^2\} = \mathrm{diag}(1, 1, 1) = I_3,$$

et donc $\forall i \in [\![0, 3]\!]$, $A_i \in O_3(\mathbb{R})$.

3. A_0, A_1 et A_2 sont dans $O_3(\mathbb{R})$ et A_3 est dans $O_3(\mathbb{R}) \setminus SO_3(\mathbb{R})$.

4. • t_λ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(0, 0, \lambda)$.
• ν est le demi-tour d'axe (Oz).
• s est le demi-tour d'axe (Ox).
• r est la réflexion par rapport au plan (Oxy).

5. Les expressions analytiques respectives de $\nu \circ t_\lambda$ et $t_\lambda \circ \nu$ sont toutes deux $X' = A_1X + B_\lambda$ qui est l'expression analytique de ν_λ. Donc $\nu_\lambda = \nu \circ t_\lambda = t_\lambda \circ \nu$.
ν_λ est le vissage d'angle π autour de $\overrightarrow{k}$ et de vecteur $\overrightarrow{u}$.

6. Soit $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$. L'expression analytique de $\nu_\gamma \circ \nu_\delta$ est

$$X' = A_1(A_1X + B_\delta) + B_\gamma = A_1^2X + A_1B_\delta + B_\gamma = X + B_\delta + B_\gamma = X + B_{\gamma+\delta},$$

qui est aussi l'expression analytique de $t_{\gamma+\delta}$. Donc $\nu_\gamma \circ \nu_\delta = t_{\gamma+\delta}$.

L'expression analytique de $t_\gamma \circ \nu_\delta$ est

$$X' = (A_1X + B_\delta) + B_\gamma = A_1X + B_{\gamma+\delta},$$

qui est aussi l'expression analytique de $\nu_{\gamma+\delta}$. Donc $t_\gamma \circ \nu_\delta = \nu_{\gamma+\delta}$.

Partie D : un cylindre à base elliptique

1. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

• $t_\lambda(M)$ a pour coordonnées $(x', y', z') = (x, y, z + \lambda)$ et $t_\lambda^{-1}(M)$ a pour coordonnées $(x'', y'', z'') = (x, y, z - \lambda)$. Donc

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \Rightarrow t_\lambda(M) \in \mathcal{C} \text{ et } t_\lambda^{-1}(M) \in \mathcal{C}.$$

D'après la question 1 de la partie A, $t_\lambda \in \mathcal{C}$.

• $\nu_\lambda(M)$ a pour coordonnées $(x', y', z') = (-x, -y, z + \lambda)$ et $\nu_\lambda^{-1}(M)$ a pour coordonnées $(x'', y'', z'') = (-x, -y, z - \lambda)$. Donc

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \nu_\lambda(M) \in \mathcal{C} \text{ et } \nu_\lambda^{-1}(M) \in \mathcal{C}.$$

et donc $v_\lambda \in \mathcal{C}$.

• $s(M) = s^{-1}(M)$ a pour coordonnées $(x', y', z') = (x, -y, -z)$. Donc

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow s(M) \in \mathcal{C} \text{ et } s^{-1}(M) \in \mathcal{C}.$$

et donc $s \in \mathcal{C}$.

• $r(M) = r^{-1}(M)$ a pour coordonnées $(x', y', z') = (x, y, -z)$. Donc

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow r(M) \in \mathcal{C} \text{ et } r^{-1}(M) \in \mathcal{C}.$$

et donc $r \in \mathcal{C}$.

2. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = \cos\theta \\ \dfrac{y}{b} = \sin\theta \end{array} \right. \exists \theta \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}/ \ M \in d_\theta \Leftrightarrow M \in \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} d_\theta. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{C} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} d_\theta.}$$

3.

3.1 d_0 est la droite dont un système d'équations est $\left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = 0 \end{array} \right.$. d_0 est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{k}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite non parallèle à d_0 et soit $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Si $\alpha = \beta = 0$, alors $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$ puis $\mathcal{D}$ est parallèle à d_0 ce qui n'est pas. Donc l'un des deux réels α ou β n'est pas nul.

3.2 Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$.

3.3 Soit $(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathcal{D}$. Si $M \in \mathcal{C}$, alors

$$\frac{(x_0 + t\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + t\beta)^2}{b^2} = 1.$$

L'équation ci-dessus est une équation du second degré car le coefficient de t^2 à savoir $\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ n'est pas nul (puisque $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$). On sait que cette équation admet au plus deux solutions dans $\mathbb{R}$ ou encore $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en au plus deux points.

4. Soit $f \in G(\mathcal{C})$. On sait que $f(d_0)$ est une droite $\mathcal{D}$ car f est affine. Supposons $\mathcal{D}$ non parallèle à d_0. Alors $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en au plus deux points. Puisque $\mathcal{D}$ est infinie, il existe au moins un point de M' de $\mathcal{D}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{C}$. Soit M un point de d_0 tel que $f(M) = M'$. M est un point de d_0 et donc de $\mathcal{C}$ tel que $f(M)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}$. Ceci contredit le fait que $f \in G(\mathcal{C})$ et on a donc montré que $f(d_0)$ est parallèle à d_0.

5. Soit $f \in G(\mathcal{C})$. $f(d_0)$ est une droite parallèle à d_0 d'après la question précédente. Soient A et B les points de d_0 de coordonnées respectives $(a, 0, 0)$ et $(a, 0, 1)$. Soient A' et B' les images respectives des points A et B par f.

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Puisque $f(d_0)$ est une droite parallèle à d_0 et que A' et B' appartiennent à la droite $f(d_0)$, le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{k}$. Il existe donc un réel t tel que $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{k}\right) = t\overrightarrow{k}$. Puisque le vecteur $\overrightarrow{k}$ n'est pas nul, on a montré que $\overrightarrow{k}$ est un vecteur propre de $\overrightarrow{f}$.

6.

6.1 Soit $\varphi \in O(\mathcal{E})$ admettant $\overrightarrow{k}$ pour vecteur propre.

• Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = t\overrightarrow{k}$.

$$|t| \left\|\overrightarrow{k}\right\| = \left\|t\overrightarrow{k}\right\| = \left\|\varphi\left(\overrightarrow{k}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{k}\right\| \text{ (car } \varphi \in O(\mathcal{E})),$$

et donc $|t| = 1$ puisque $\left\|\overrightarrow{k}\right\| \neq 0$. Ainsi, ou bien $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{k}$, ou bien $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = -\overrightarrow{k}$. On pose dorénavant $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = \varepsilon\overrightarrow{k}$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. A ce stade, la matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 0 \end{pmatrix}$.

• On sait qu'un automorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité. Donc, l'image par φ d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{k}$ est encore un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{k}$. Ceci signifie que le plan vectoriel $\overrightarrow{P} = \text{Vect}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est stable par φ. A ce stade matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est de la forme de l'énoncé avec $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Mais alors, la restriction $\varphi_{/\overrightarrow{P}}$ est un endomorphisme de $\overrightarrow{P}$ qui conserve la norme ou encore un automorphisme orthogonal de $\overrightarrow{P}$. Puisque la famille $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{P}$ et que $\varphi_{/\overrightarrow{P}}$ est un automorphisme orthogonal de $\overrightarrow{P}$, la matrice M est une matrice orthogonale. La matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ a la forme désirée.

6.2 En développant le déterminant de φ suivant la dernière ligne, on obtient $\det(\varphi) = \varepsilon\det(M)$. Comme $\det(M) \in \{-1, 1\}$, on a $\det(M) = \dfrac{1}{\det(M)}$. L'égalité $\det(\varphi) = \varepsilon\det(M)$ s'écrit donc aussi $\varepsilon = \det(\varphi)\det(M)$.

7.

7.1 g est une application de Π dans Π qui conserve les distances et donc $g \in \text{Is}(\Pi)$.
f et g sont des bijections. Si M' est un point de Π et si $M = g^{-1}(M')$ alors M est un point de Π tel que $f(M) = g(M) = M'$ et donc $M = f^{-1}(M')$. Ceci montre que g^{-1} est la restriction de f^{-1} à Π.
Soit M un point de Γ. $g(M) = f(M)$ est un point de $\mathcal{C}$ appartenant au plan Π et donc $g(M) \in \Gamma$. De même, $g^{-1}(M) = f^{-1}(M)$ est un point de $\mathcal{C}$ appartenant au plan Π et donc $g^{-1}(M) \in \Gamma$. On a montré que $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

7.2 D'après la partie B, g est soit l'identité de Π, soit la symétrie centrale de centre O, soit la réflexion d'axe (Ox), soit la réflexion d'axe (Oy). Dans tous les cas, $f(O) = g(O) = O$.

7.3 Les matrices possibles de g dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de Π sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.4 D'après la question 6, en tenant compte du fait que $f \in G^+(\mathcal{C})$, les matrices correspondantes de f sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Mais alors, ou bien $f = Id$, ou bien $f = \nu$, ou bien $f = s$, ou bien $f = \nu \circ s$. On a montré que si $f \in G^+(\mathcal{C})$ et $f(O) \in \Pi$, il existe $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ tel que $f = \nu^i s^j$.

8.

8.1 Le vecteur $\overrightarrow{f(O)O'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$. Ses coordonnées s'écrivent donc $(0, 0, \mu)$ où μ est un réel. De plus, le vecteur $\overrightarrow{f(O)O'}$ n'est pas nul car $O' \in \Pi$ et $f(O) \notin \Pi$. On en déduit que $\mu \neq 0$. Finalement, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $t = t_\mu$.

h est la composée de deux déplacements et donc h est un déplacement. $f(\mathcal{C} = \mathcal{C}$ puis $t(\mathcal{C}) = t_\mu(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ d'après la question 1. Finalement, $h(\mathcal{C}) = t(f(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$. Ceci montre que $h \in G^+(\mathcal{C})$.

Enfin, $h(O) = t(f(O)) = O'$ et donc $h(O) \in \Pi$.

8.2 D'après la question 7, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ et il existe $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ tels que $t_\mu \circ f = h = \nu^i s^j$ ou encore tels que $f = t_{-\mu} \circ \nu^i \circ s^j$. On a montré qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, à savoir $\lambda = -\mu$ et $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ tels que $f = t_\lambda \circ \nu^i \circ s^j$.

9.

9.1 Puisque $f \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$ et $r \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$, on a $r \circ f \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$. De plus, $r(f(\mathcal{C})) = r(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ d'après la question 1 et on a montré que $r \circ f \in G^+(\mathcal{C})$.

9.2 Mais alors d'après les questions 7 et 8, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ tels que $r \circ f = t_\lambda \circ \nu^i \circ s^j$ ou encore $f = r \circ t_\lambda \circ \nu^i \circ s^j$ car $r^{-1} = r$.

Partie E : une hélice

1. Soient $t \in \mathbb{R}$ puis M le point de $\mathcal{H}$ de coordonnées $(a\cos(t), b\sin(t), t)$.

$$\frac{(x_M)^2}{a^2}+\frac{(y_M)^2}{b^2}=\frac{(a\cos(t))^2}{a^2}+\frac{(b\sin(t))^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1,$$

et donc $M\in\mathcal{C}$. On a montré que tout point de $\mathcal{H}$ appartient à $\mathcal{C}$ et donc que

$$\boxed{\mathcal{H}\subset\mathcal{C}.}$$

2. La droite $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{H}$ et donc $\mathcal{C}$ en au moins trois points et donc la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à d_0 d'après la question 3 de la partie D. Ensuite, la droite $\mathcal{D}$ a au moins un point en commun avec $\mathcal{C}$. Notons le A. D'après la question 2 de la partie 3, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $A\in d_\theta$. Les droites $\mathcal{D}$ et d_θ sont toutes deux parallèles à la droite d_0 et donc les droites $\mathcal{D}$ et d_θ sont parallèles. Comme ces deux droites ont en commun le point A, on en déduit que $\mathcal{D}=d_\theta$. On a montré qu'il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D}=d_\theta$.

3. Un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{H}$ est $\left\{\begin{array}{l}x=a\cos(z)\\ y=b\sin(z)\end{array}\right.$.
Soit M de coordonnées $(a\cos\theta,b\sin\theta,t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de d_θ.

$$M\in\mathcal{H}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a\cos t=a\cos\theta\\ b\sin t=b\sin\theta\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos t=\cos\theta\\ \sin t=\sin\theta\end{array}\right.\Leftrightarrow e^{it}=e^{i\theta}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ t=\theta+2k\pi.$$

Donc, $d_\theta\cap\mathcal{H}=\{M(\theta+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}\}$.

4. Soit $f\in G(\mathcal{H})$ et soit $\theta\in\mathbb{R}$. D'après la question précédente, l'ensemble $d_\theta\cap\mathcal{H}$ contient les trois points $M(\theta)$, $M(\theta+2\pi)$ et $M(\theta+4\pi)$. Ces trois points sont deux à deux distincts car leurs côtes respectives sont deux à deux distinctes.
Puisque f est une bijection affine, $f(d_\theta)$ est une droite et d'autre part les trois points $f(M(\theta))$, $f(M(\theta+2\pi))$ et $f(M(\theta+4\pi))$ sont deux à deux distincts. Ainsi, $f(d_\theta)$ est une droite coupant la courbe $\mathcal{H}$ en au moins trois points deux à deux distincts. D'après la question 2, il existe $\omega\in\mathbb{R}$ tel que $f(d_\theta)=d_\omega$.

5. Soit $f\in G(\mathcal{H})$. La question 1 de la partie A montre que $f^{-1}\in G(\mathcal{H})$.
D'après la question 2 de la partie D, $f(\mathcal{C})=f\left(\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}}d_\theta\right)=\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}}f(d_\theta)$. La question précédente montre que chaque $f(d_\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$, est contenue dans $\mathcal{C}$ et donc que $f(\mathcal{C}\subset\mathcal{C}$. Par suite, pour chaque point M de $\mathcal{C}$, $f(M)\in\mathcal{C}$.
En appliquant ce résultat à f^{-1}, on a aussi : pour chaque point M de $\mathcal{C}$, $f^{-1}(M)\in\mathcal{C}$ et finalement $f\in G(\mathcal{C})$ d'après la question 1 de la partie A. On a montré que $G(\mathcal{H}\subset G(\mathcal{C})$.

6. Soit $k\in\mathbb{Z}$. $t_{2k\pi}$ est une isométrie. Soit alors $t\in\mathbb{R}$. Le point $t_{2k\pi}(M(t))$ a pour coordonnées $(a\cos t,b\sin t,t)+(0,0,2k\pi)=(a\cos t,b\sin t,t+2k\pi)=(a\cos(t+2k\pi),b\sin(t+2k\pi),t+2k\pi)$. Par suite, $t_{2k\pi}(M(t))=M(t+2k\pi)$. Ceci démontre que pour tout point M de $\mathcal{H}$, le point $t_{2k\pi}(M)$ appartient à $\mathcal{H}$.
En appliquant ce résultat à l'entier relatif $k'=-k$, on a aussi : pour tout point M de $\mathcal{H}$, le point $t_{2k\pi}^{-1}(M)$ appartient à $\mathcal{H}$ et finalement $t_{2k\pi}\in G(\mathcal{H})$.

7. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $t_\lambda\in G(\mathcal{H})$. Le point $M(0)$ de coordonnées $(a,0,0)$ appartient à $\mathcal{H}$ et il en est de même de $t_\lambda(M(0))$ dont les coordonnées sont $(a,0,\lambda)$.
Par suite, il existe un réel t tel que $t_\lambda(M(0))=M(t)$ ce qui fournit $\left\{\begin{array}{l}a\cos t=a\\ b\sin t=0\\ t=\lambda\end{array}\right.$. Les deux premières équations montrent qu'il existe un entier relatif k tel que $t=2k\pi$ et la troisième fournit alors $t=2k\pi$. On a montré que les translations éléments de $G(\mathcal{H}$ sont les $t_{2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$.

8. Soit $t\in\mathbb{R}$. $s(M(t))=s^{-1}(M(t))$ est le point $M(-t)$ de $\mathcal{H}$ et donc $s\in G(\mathcal{H}$.
$v_{-\pi}(M(t))$ a pour coordonnées $(-a\cos t,-b\sin t,t-\pi)$ ou encore $(a\cos(t-\pi),b\sin(t-\pi),t-\pi)$ et est donc le point $M(t-\pi)$ de $\mathcal{H}$. De même, $v_{-\pi}^{-1}(M(t))=v_\pi(M(t))$ est le point $M(t+\pi)$ de $\mathcal{H}$. Donc, $v_{-\pi}\in G(\mathcal{H})$.

9. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $v_\lambda\in G(\mathcal{H})$. Le point $v_\lambda(M(0))$ a pour coordonnées $(-a,0,\lambda)$ et est un élément de $\mathcal{H}$. Par suite, il existe un réel t tel que $\left\{\begin{array}{l}a\cos t=-a\\ b\sin t=0\\ t=\lambda\end{array}\right.$. Les deux premières équations montrent qu'il existe un entier relatif k tel que $t=(2k+1)\pi$ et la dernière montre que $\lambda=(2k+1)\pi$. On a montré que si $v_\lambda\in G(\mathcal{H})$, alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\lambda=(2k+1)\pi$.
10. $\Leftarrow$ / D'après la question 8, $s\in G^+(\mathcal{H})$. D'après la question 6, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $t_{2k\pi}\in G^+(\mathcal{H})$. D'après la question 8, $v_{-\pi}\in G^+(\mathcal{H})$. Comme $(G^+(\mathcal{H}),\circ)$ est un groupe d'après la question 2 de la partie A, on en déduit que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $v_{(2k+1)\pi}=v_{-\pi}\circ t_{2(k+1)\pi}\in G^+(\mathcal{H}$ puis $v_{(2k+1)\pi}\circ s\in G(\mathcal{H})$ et $t_{2k\pi}\circ s\in G^+(\mathcal{H})$.
On a montré que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, pour tout $i\in\{0,1\}$, les transformations $t_{2k\pi}\circ s^i$ et $v_{(2k+1)\pi}\circ s^i$ sont dans $G^+(\mathcal{H})$.

$\Rightarrow$ / Soit $f\in G^+(\mathcal{H})$.

D'après la question 5, $G^+(\mathcal{H}) \subset G^+(\mathcal{C})$. D'après la question 8.2 de la partie D, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in \{0,1\}$ tel que $f = t_\lambda \circ \nu^j \circ s^i$.

• Si $i = j = 0$, la question 7 montre que nécessairement $\lambda = 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $f = t_{2k\pi} \circ s^0$.

• Si $j = 1$ et $i = 0$, $f = t_\lambda \circ \nu = \nu_\lambda$. La question 9 montre que $\lambda = (2k+1)\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $f = \nu_{(2k+1)\pi} \circ s^0$.

• Si $j = 0$ et $i = 1$, $f = t_\lambda \circ s$. Puisque $s \in G^+(\mathcal{H})$ et que $(G^+(\mathcal{H}), \circ)$ est un groupe, $f \circ s = t_\lambda$ est un élément de $G^+(\mathcal{H})$ et donc encore une fois $\lambda = 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f = t_{2k\pi} \circ s^1$.

• Si $i = j = 1$, $f = t_\lambda \circ \nu \circ s = \nu_\lambda \circ s$. Le cas $j = 1$ et $i = 0$ montre que $\lambda = (2k+1)\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f = \nu_{(2k+1)\pi} \circ s^1$.

On a montré que $\forall f \in \text{Is}(\mathcal{E}),\ g \in G^+(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists i \in \{0,1\}/ \left\{\begin{array}{c} f = t_{2k\pi} \circ s^i \\ \text{ou} \\ f = \nu_{(2k+1)\pi} \circ s^i \end{array}\right.$.

11. Supposons $G^-(\mathcal{H}) \neq \varnothing$.

11.1 D'après la question 5, $G^-(\mathcal{H}) \subset G^-(\mathcal{C})$. D'après la question 9 de la partie D, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in \{0,1\}^2$ tel que $r \circ t_\lambda \circ \nu^j \circ s^i \in G^-(\mathcal{H})$.

11.2 $r \circ t_\lambda \circ \nu^j \circ s^i$ et $\nu^j \circ s^i$ sont dans $G(\mathcal{H})$. Donc, $r \circ t_\lambda \circ \nu^j \circ s^i \circ \nu^j \circ s^i = r \circ t_\lambda$ est encore dans $G(\mathcal{H})$. De plus, r est une isométrie négative et t_λ est une isométrie positive. Donc, $r \circ t_\lambda \in G^-(\mathcal{H})$. On a montré qu'il existe un réel μ tel que $r \circ t_\mu \in G^-(\mathcal{H})$.

11.3 Les coordonnées de $t_\mu(M(0))$ sont $(a, 0, \mu)$ et donc les coordonnées de $r(t_\mu(M(0)))$ sont $(a, 0, -\mu)$.

11.4 Comme à la question 7, si le point $(a, 0, -\mu)$ appartient à $\mathcal{H}$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu = 2m\pi$. Pour cet entier relatif m, $r \circ t_{2m\pi} \in G^-(\mathcal{H})$.

11.5 $t_{2m\pi}$ est dans $G^+(\mathcal{H})$ et donc, omme à la question 11.3, $r \circ t_{2m\pi} \circ t_{2m\pi} = r$ est dans $G^-(\mathcal{H})$.

11.6 Le point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées $\left(0, b, \dfrac{\pi}{2}\right)$ et donc le point $r\left(M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ a pour coordonnées $\left(0, b, -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

11.7 Si $r\left(M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ est un point de $\mathcal{H}$, il s'agit nécessairement du point $M\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (à partir de la troisième coordonnée). Mais le point $M\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées $\left(0, -b, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ et n'est pas le point $r\left(M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. Donc $r\left(M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ n'est pas un point de $\mathcal{H}$ puis $r \notin G^-(\mathcal{H})$. Il était absurde de supposer $G^-(\mathcal{H}) \neq \varnothing$ et on a donc montré que $G^-(\mathcal{H}) = \varnothing$ ou encore $G(\mathcal{H}) = G^+(\mathcal{H})$.

