**SESSION 2012**

# CAPES EXTERNE

## MATHÉMATIQUES 2

---

# Problème 1 : anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

**Eléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.**

**1.** Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned} a \text{ inversible dans } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times) &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}/\ \overline{a} \times \overline{u} = \overline{1} \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2/\ au = 1 - nv \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2/\ ua + vn = 1 \\ &\Leftrightarrow a \wedge n = 1 \text{ (d'après le théorème de Bézout).} \end{aligned}$$

**2.** • $\overline{1} \in \mathcal{I}_n$ et donc $\mathcal{I}_n$ n'est pas vide.
• On sait que le produit de deux classes inversibles est une classe inversible ou encore $\times$ est interne dans $\mathcal{I}_n$.
• On sait que la multiplication des classes est commutative.
• On sait que la multiplication des classes est associative.
• $\overline{1} \in \mathcal{I}_n$ et pour toute classe inversible $\overline{a}$, $\overline{a} \times \overline{1} = \overline{a}$.
• On sait que l'inverse d'une classe inversible est une classe inversible ou encore tout élément de $\mathcal{I}_n$ admet un inverse dans $\mathcal{I}_n$.

On a montré que $(\mathcal{I}_n, \times)$ est un groupe commutatif.

**3.**

| $\mathcal{I}_{10}$ | $\overline{1}$ | $\overline{3}$ | $\overline{7}$ | $\overline{9}$ |
|---|---|---|---|---|
| ordre | 1 | 4 | 4 | 2 |

Puisque l'élément $\overline{3}$ est d'ordre 4 et que $\text{card}(\mathcal{I}_{10}) = 4$, le groupe $(\mathcal{I}_{10}, \times)$ est cyclique.

**4.**

| $\mathcal{I}_{12}$ | $\overline{1}$ | $\overline{5}$ | $\overline{7}$ | $\overline{11}$ |
|---|---|---|---|---|
| ordre | 1 | 2 | 2 | 2 |

Puisque $\text{card}(\mathcal{I}_{12}) = 4$ et que $\mathcal{I}_{12}$ ne contient pas d'élément d'ordre 4, le groupe $(\mathcal{I}_{12}, \times)$ n'est pas cyclique.

**5. Algorithmes écrits avec Algobox.**

**5.1** Voir page suivante. On utilise cet agorithme en rentrant deux entiers $k$ et $n$ tels que $k \geqslant 0$ et $n > 1$.

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.

```
VARIABLES
    n EST DU TYPE NOMBRE
    k EST DU TYPE NOMBRE
    r EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
    LIRE n
    LIRE k
    Si k>=n ALORS
        DEBUT SI
            k PREND LA VALEUR k-floor(k/n)*n
        FIN SI
    r PREND LA VALEUR n%k
    TANT QUE (r!=0) FAIRE
        DEBUT TANT QUE
            n PREND LA VALEUR k
            k PREND LA VALEUR r
            r PREND LA VALEUR n%k
        FIN TANT QUE
    SI (k!=1) ALORS
        DEBUT SI
            AFFICHER "0"
        FIN SI
        SINON
            DEBUT SINON
                AFFICHER "1"
            FIN SINON
FIN ALGORITHME
```

**5.2**

```
VARIABLES
    n EST DU TYPE NOMBRE
    k EST DU TYPE NOMBRE
    r EST DU TYPE NOMBRE
    card EST DU TYPE NOMBRE
    a EST DU TYPE NOMBRE
    b EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
    LIRE n
    card PREND LA VALEUR 0
    POUR k ALLANT DE 1 A n-1
        DEBUT POUR
            a PREND LA VALEUR n
            b PREND LA VALEUR k
            r PREND LA VALEUR a%b
            TANT QUE (r!=0) FAIRE
                DEBUT TANT QUE
                    a PREND LA VALEUR b
                    b PREND LA VALEUR r
                    r PREND LA VALEUR a%b
                FIN TANT QUE
            SI (b==1) ALORS
                DEBUT SI
                    card PREND LA VALEUR card+1
                FIN SI
        FIN POUR
    AFFICHER "Le cardinal de In est "
    AFFICHER card
FIN ALGORITHME
```

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.

**5.3**

```
VARIABLES
    n EST DU TYPE NOMBRE
    k EST DU TYPE NOMBRE
    r EST DU TYPE NOMBRE
    a EST DU TYPE NOMBRE
    m EST DU TYPE NOMBRE
    ordre EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
    LIRE n
    LIRE k
    m PREND LA VALEUR n
    a PREND LA VALEUR k
    SI (k>=n) ALORS
        DEBUT SI
            k PREND LA VALEUR k-floor(k/n)*n
        FIN SI
    r PREND LA VALEUR n%k
    TANT QUE (r!=0) FAIRE
        DEBUT TANT QUE
            n PREND LA VALEUR k
            k PREND LA VALEUR r
            r PREND LA VALEUR n%k
        FIN TANT QUE
    SI (k!=1) ALORS
        DEBUT SI
            AFFICHER "Erreur"
        FIN SI
        SINON
            DEBUT SINON
                ordre PREND LA VALEUR 1
                TANT QUE (pow(a,ordre)-floor(pow(a,ordre)/m)*m!=1) FAIRE
                    DEBUT TANT QUE
                        ordre PREND LA VALEUR ordre+1
                    FIN TANT QUE
                AFFICHER "L'ordre de "
                AFFICHER a
                AFFICHER " est "
                AFFICHER ordre
            FIN SINON
FIN ALGORITHME
```

**Eléments non inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.**
**6.**

**6.1** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 non primaire. $n$ possède un facteur premier $p$. On note $\alpha \geqslant 1$ l'exposant de $p$ dans la décomposition primaire de $n$ et on pose $n_1 = p^\alpha$ puis $n_2 = \dfrac{n}{n_1}$ de sorte que $n_2$ est un entier tel que $n = n_1 n_2$. Puisque $n$ n'est pas primaire, $p^\alpha \neq n$ et donc $1 < n_1 < n$. L'entier $n_2$ est supérieur ou égal à 2 et n'admet plus $p$ pour facteur premier. Les entiers $n_1$ et $n_2$ n'ont pas de facteur premier commun et donc $n_1 \wedge n_2 = 1$.
On a montré qu'il existe deux entiers $n_1$ et $n_2$ tels que $n = n_1 n_2$ et $1 < n_1 < n_2$ et $n_1 \wedge n_2 = 1$.

**6.2** Posons $d = (n_1 + n_2) \wedge n$.

$d$ divise $n_1 + n_2$ et $d$ divise $n = n_1 n_2$. Donc $d$ divise $(n_1+n_2)n_1 - n_1 n_2 = n_1^2$ et de même $d$ divise $(n_1+n_2)n_2 - n_1 n_2 = n_2^2$. Mais alors $d$ divise $n_1^2 \wedge n_2^2 = 1$ ($n_1$ et $n_2$ sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 n'ayant pas de diviseur premier commun et il en est de même de $n_1^2$ et $n_2^2$).
Finalement, $d$ divise 1 et donc $d = 1$. On a montré que $(n_1 + n_2) \wedge n = 1$.

**6.3** Puisque $n = n_1 n_2$, $n_1 \wedge n = n_1 > 1$. Puisque $n_1$ et $n$ ne sont pas premiers entre eux, $\overline{n_1} \notin \mathcal{I}_n$ d'après la question 1. De même, $n_2 \notin \mathcal{I}_n$.

**7.** Soit $k \in \mathbb{Z}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.

• Si $p$ divise $k$, alors $p$ divise $k \wedge p^\alpha$. Par suite, $k$ et $p^\alpha$ ne sont pas premiers entre eux et donc $\overline{k} \in \mathcal{N}_{p^\alpha}$.
• Si $p$ ne divise pas $k$, alors $k$ et $p^\alpha$ sont premiers entre eux (car $p$ est premier). Dans ce cas, $\overline{k} \notin \mathcal{N}_{p^\alpha}$.

On a montré que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\left(\overline{k} \in \mathcal{N}_{p^\alpha} \Leftrightarrow p|k\right)$.

**8.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Si $n$ n'est pas primaire, d'après la question 6, on peut écrire $n = n_1 n_2$ avec $n_1$ et $n_2$ entiers naturels tels que $1 < n_1 < n$ et $(n + 1 + n_2) \wedge n = 1$. La question 6.3 montre que $\overline{n_1}$ et $\overline{n_2}$ appartiennent à $\mathcal{N}_n$ et la question 6.2 montre que $\overline{n_1} + \overline{n_2}$ n'appartiennent pas à $\mathcal{N}_n$. Dans ce cas, $\mathcal{N}_n$ n'est pas stable pour $+$ et en particulier n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

• Supposons que $n$ soit un nombre primaire. Il existe un nombre premier $p$ et un entier naturel non nul $\alpha$ tel que $n = p^\alpha$. Les éléments de $\mathcal{N}_n$ sont les classes des entiers relatifs divisibles par $p$. Donc,
- $\overline{0}$ appartient à $\mathcal{N}_n$,
- la différence de deux éléments de $\mathcal{N}_n$ est encore un élément de $\mathcal{N}_n$.

Ceci montre que $\mathcal{N}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

On a montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ (\mathcal{N}_n \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \text{ si et seulement si } n \text{ est primaire}).}$$

# Problème 2 : isométries du plan et de l'espace

## Partie A : généralités

**1.** Soient $f$ une isométrie de $E$ et $F$ une partie non vide de $E$.
• Si $f \in G(F)$, alors $f(F) = F$. Mais alors,
- Si $M$ est un point de $F$, alors $f(M) \in f(F) = F$
- Si $M$ est un point de $F = f(F)$, $f^{-1}(M) \in f^{-1}(f(F)) = F$.

• Réciproquement, supposons que pour tout $M$ de $F$, $f(M)$ et $f^{-1}(M)$ soient dans $F$.
-Pour tout point $M$ un point de $F$, $f(M) \in F$. Ceci montre que $f(F) \subset F$.
-Soit $M'$ un point de $f(F)$. Il existe $M \in F$ tel que $M' = f(M)$ à savoir $M = f^{-1}(M')$. Puisque $M \in F$, $M' = f(M)$ est dans $F$. Ceci montre que $F \subset f(F)$ et finalement que $f(F) = F$.

On a montré que

$$\boxed{\forall f \in \mathrm{Is}(E),\ f \in G(F) \Leftrightarrow \forall M \in F,\ (f(M) \in F \text{ et } f^{-1}(M) \in F).}$$

**2.** • $G(F) \subset \mathrm{Is}(E)$.
• $\mathrm{Id}_E \in G(F)$ et en particulier $G(F) \neq \varnothing$.
• Soit $(f, g) \in (G(F))^2$. D'après 1), pour tout point $M$ de $F$,
- $g^{-1}(M) \in F$ puis $f(g^{-1}(M)) \in F$,
- $f^{-1}(M) \in F$ puis $g(f^{-1}(M)) \in F$ ou encore $(f \circ g^{-1})^{-1}(M) \in F$.

Toujours d'après la question précédente, on en déduit que $f \circ g^{-1} \in G(F)$. Ainsi, $\forall (f, g) \in (G(F))^2$, $f \circ g^{-1} \in G(F)$.

Ceci montre que

$$\boxed{G(F) \text{ est un sous-groupe de } (\mathrm{Is}(E), \circ).}$$

Dans la démonstration précédente, on remplace $G(F)$ par $G^+(F)$ et $\mathrm{Is}(E)$ par $\mathrm{Is}^+(E)$ et on obtient $G^+(F)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Is}^+(E), \circ)$. Puisque $\mathrm{Is}^+(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Is}(E), \circ)$,

$$\boxed{G^+(F) \text{ est un sous-groupe de } (\mathrm{Is}(E), \circ).}$$

**3.** Soit $s$ une symétrie qui est une isométrie. Alors $s^{-1} = s$ et d'après 1), $s \in G(F) \Leftrightarrow \forall M \in F,\ s(M) \in F$.

**4.**

**4.1** Soit $f \in G^+(F)$. Alors $\varphi \circ f \in \mathrm{Is}^-(E)$ et d'autre part, pour tout point $M$ de $F$, $f(M) \in F$ puis $\varphi(f(M)) \in F$ et aussi $\varphi^{-1}(M) \in F$ puis $(\varphi \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(\varphi^{-1}(M)) \in F$. Ainsi, $\varphi \circ f \in G^-(M)$. $\Phi$ est une application bien définie.

**4.2** Soit $g \in G^-(F)$. Alors $\varphi \circ g \in \mathrm{Is}^+(E)$ et d'autre part, pour tout point $M$ de $F$, $g(M) \in F$ puis $\varphi(g(M)) \in F$ et aussi $\varphi^{-1}(M) \in F$ puis $(\varphi \circ g)^{-1}(M) = g^{-1}(\varphi^{-1}(M)) \in F$. Ainsi, $\varphi \circ g \in G^+(M)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.

On définit donc une application en posant $\begin{array}{rccc}\Psi : & G^-(F) & \rightarrow & G^+(F)\\ & g & \mapsto & \varphi \circ f\end{array}$. Il est immédiat que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{G^+(F)}$ et $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{G^-(F)}$. On sait alors que $\Phi$ est une bijection et que $\Psi = \Phi^{-1}$.

**5.** $G^+(F)$ n'est pas vide d'après la question 2.
• Si $G^-(F)$ est vide, alors $G(F) = G^+(F)$ puis $\mathrm{card}(G(F)) = \mathrm{card}(G^+(F))$.
• Si $G^-(F)$ n'est pas vide, $(G^+(F), G^-(F))$ est une partition de $G(F)$ et de plus, les ensembles $G^+(F)$ et $G^-(F)$ sont équipotents d'après la question précédente. Par suite, $\mathrm{card}(G(F)) = \mathrm{card}(G^+(F)) + \mathrm{card}(G^-(F)) = 2\mathrm{card}(G^+(F))$.

# Partie B : exemples dans le plan euclidien

**Un singleton.**

**1.**

**1.1** $f$ est une isométrie négative et l'identité est une isométrie positive. Donc $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Par suite, il existe un point $I \in \mathcal{P}$ tel que $f(I) \neq I$.

**1.2** Puisque $f$ est une isométrie, $\Omega I = f(\Omega)f(I) = \Omega f(I)$ et donc le point $\Omega$ appartient à la médiatrice du segment $[I, f(I)]$. On en déduit que $r(\Omega) = \Omega$.

$r \circ f$ est une isométrie positive en tant que composée de deux isométries négatives. De plus, $r \circ f$ admet les points $\Omega$ et $I$ pour points invariants. Puisque $f(\Omega) = \Omega$ et que $f(I) \neq I$, les points $\Omega$ et $I$ sont distincts. En résumé, $r \circ f$ est une isométrie positive ayant au moins deux points fixes distincts et donc $r \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ car $r \circ f$ ne peut être ni une rotation distincte de l'identité (qui n'a qu'un point invariant), ni une translation distincte de l'identité (qui n'a pas de point invariant).

**1.3** Mais alors $f = r^{-1} = r$ ou encore $f$ est la réflexion d'axe la médiatrice du segment $[I, f(I)]$.

**2.** • D'après la question précédente, un élément de $G^-(F)$ est nécessairement une réflexion d'axe passant par $\Omega$ et réciproquement une réflexion d'axe passant par $\Omega$ est un élément de $G^-(F)$. $G^-(F)$ est donc constitué des réflexions d'axe passant par $\Omega$.
• Soit $r$ une réflexion d'axe passant par $\Omega$ fixée. D'après la question 3), les éléments de $G^+(F)$ sont les $r \circ f$ où $f \in G^-(F)$. Il est connu que la composée de deux réflexions d'axe passant par $\Omega$ est une rotation de centre $\Omega$, éventuellement égale à l'identité. Réciproquement, les rotations de centre $\Omega$ sont dans $G^+(F)$ et donc $G^+(F)$ est constitué des rotations de centre $\Omega$.

On a montré que $G(F)$ est constitué des rotations de centre $\Omega$ (avec la convention que $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ est une rotation de centre $\Omega$) et des réflexions d'axe passant par $\Omega$.

**Une paire.**

**3.** $f \in G(\mathcal{U})$ et donc ou bien $f(P_1) = P_1$ et $f(P_2) = P_2$, ou bien $f(P_1) = P_2$ et $f(P_2) = P_1$. Dans les deux cas, l'image par $f$ du segment $[P_1, P_2]$ est le segment $[f(P_1), f(P_2)] = [P_1, P_2]$. Puisque $f$ est une application affine, l'image par $f$ du milieu de $[P_1, P_2]$ est le milieu de $[f(P_1), f(P_2)] = [P_1, P_2]$ ou encore $f(I) = I$.

**4.** Soit $f \in G^+(\mathcal{U})$ tel que $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. $f$ est une isométrie positive admettant $I$ pour point invariant et donc $f$ est une rotation de centre $I$. L'angle de $f$ est $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{f(P_1)f(P_2)}\right)$. Cet angle est soit $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)$ ou $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_1}\right)$. Donc $f$ est soit la rotation de centre $I$ et d'angle $0$ modulo $2\pi$ c'est-à-dire $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ ce qui est exclu, soit la rotation de centre $I$ et d'angle $\pi$ modulo $2\pi$ c'est-à-dire la symétrie centrale de centre $I$.
On a montré que si $f \in G^+(\mathcal{U})$ et $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, alors $f$ est la symétrie centrale de centre $I$.

**5.** Réciproquement, $s_I$ la symétrie centrale de centre $I$ est dans $G^+(\mathcal{U})$ et donc $G^+(\mathcal{U}) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, s_I\}$. D'après la question 4, $G^-(\mathcal{U})$ est équipotent à $G^+(\mathcal{U})$ et donc $\mathrm{card}(G^-(\mathcal{U})) = 2$. Comme la réflexion d'axe $(P_1P_2)$ et la réflexion d'axe la médiatrice de $[P_1, P_2]$ sont deux éléments distincts de $G^-(\mathcal{U})$, $G^-(\mathcal{U})$ est constitué de la réflexion d'axe $(P_1P_2)$ et la réflexion d'axe la médiatrice de $[P_1, P_2]$.

En résumé, $G^(\mathcal{U})$ est formé de quatre éléments : l'identité, la symétrie centrale de centre $I$ et deux réflexions.

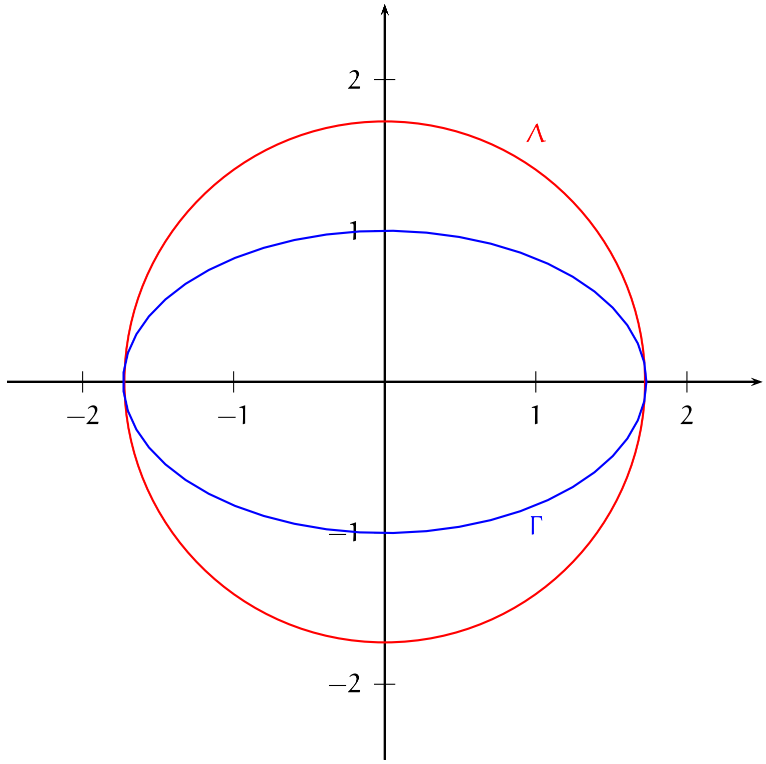
**Une ellipse.**

**6.** $s(M)$, $r_1(M)$ et $r_2(M)$ ont pour coordonnées respectives $(-x, -y)$, $(x, -y)$ et $(x, y)$.

**7.** Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{(\pm x)^2}{a^2} + \dfrac{(\pm y)^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, on en déduit que pour tout point $M$ du plan, $M \in \Gamma \Leftrightarrow s(M) \in \Gamma \Leftrightarrow r_1(M) \in \Gamma \Leftrightarrow r_2(M) \in \Gamma$. Comme $s$, $r_1$ et $r_2$ sont des involutions, ceci montre que $s$, $r_1$ et $r_2$ appartiennent à $G(\Gamma)$. On a montré que $G(\{A, A'\}) \subset G(\Gamma)$.

**8. Figure.**

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.




**9.** Soit $M$ un point du plan de coordonnées $(x,y)$. Puisque $b<a$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\geqslant\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{1}{a^2}(x^2+y^2)$ et donc

$$M\in\Gamma\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{1}{a^2}(x^2+y^2)\leqslant 1\Rightarrow x^2+y^2\leqslant a^2\Rightarrow M\in\Delta.$$

On a montré que $\Gamma\subset\Delta$.

**10.** Soit $M$ un point du plan de coordonnées $(x,y)$.

$$\begin{aligned}M\in\Gamma\cap\Lambda&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 & (1)\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & (2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 & (1)\\ y^2\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)=0 & (1)-(2)\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\ \dfrac{x^2}{a^2}=1\end{array}\right.\ \left(\text{car } \dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\neq 0\right)\\&\Leftrightarrow (x,y)\in\{(a,0),(-a,0)\}\Leftrightarrow M\in\{A,A'\}.\end{aligned}$$

On a montré que $\Gamma\cap\Lambda=\{A,A'\}$.

**11.** Soient $P$ et $P'$ deux points de $\Gamma$. On note $(x,y)$ et $(x',y')$ les coordonnées respectives des points $P$ et $P'$.

**(a)**

$$\begin{aligned}PP'^2&=(x-x')^2+(y-y')^2=x^2+y^2+x'^2+y'^2-2(xx'+yy')\\&\leqslant x^2+y^2+x'^2+y'^2+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}\ \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz})\\&\leqslant a^2+a^2+2\times a\times a\ \text{(d'après la question 9)}\\&=4a^2,\end{aligned}$$

et donc $PP'\leqslant 2a$.

**(b)** L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si chaque inégalité écrite est une égalité. En particulier, $x^2+y^2=x'^2+y'^2=a^2$ et donc $P$ et $P'$ appartiennent à $\Lambda$ et $\Gamma$. D'après la question 10, on a nécessairement $\{P,P'\}=\{A,A'\}$. Réciproquement, $AA'=2a$ et on a montré que $PP'=2a\Leftrightarrow\{P,P'\}=\{A,A'\}$.

**12.** Soit $f$ un élément de $G(\Gamma)$. Posons $P=f(A)$ et $P'=f(A')$. $P$ et $P'$ sont deux points de $\Gamma$. Puisque $f$ est une isométrie, on a $PP'=AA'=2a$ et donc $\{P,P'\}=\{A,A'\}$ d'après la question précédente. Par suite, $f\in G(\{A,A'\})$. Ceci montre que $G(\Gamma)\subset G(\{A,A'\})$. D'autre part, $G(\{A,A'\})\subset G(\Gamma)$ d'après la question 7 et finalement,

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.

$$\boxed{G(\Gamma) = G(\{A, A'\}).}$$

# Partie C : étude d'isométries de l'espace

**1.**

**1.1** Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathcal{E})$. Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM}$.

$$\left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{f(O)f(M)}\right\| = f(O)f(M) = OM = \|\overrightarrow{x}\|.$$

Donc $\overrightarrow{f} \in O(\mathcal{E})$.

**1.2** Soit $(M, M') \in \mathcal{E}^2$.

$$M' = f(M) \Leftrightarrow M' = f(O) + \overrightarrow{f(O)f(M)} \Leftrightarrow M' = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) + f(O) \Leftrightarrow X' = AX + B.$$

**1.3** Puisque $\overrightarrow{f} \in O(\mathcal{E})$ et que $A$ est la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on sait que $A \in O(E_3)$. Ensuite, le déterminant de $\overrightarrow{f}$ est le déterminant de $A$ c'est-à-dire $1$ ou $-1$. Donc

$$\overrightarrow{f} \in \mathrm{Is}^+(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{f}\right) > 0 \Leftrightarrow \det(A) > 0 \Leftrightarrow \det(A) = 1 \Leftrightarrow A \in SO_3(\mathbb{R}).$$

**2.** Chacune des matrices proposées est diagonale et en particulier est égale à sa transposée. Donc, pour $i \in [\![0, 3]\!]$,

$${}^tA_iA_i = A_i{}^tA_i = A_i^2 = \mathrm{diag}\{(\pm 1)^1, (\pm 1)^2, (\pm 1)^2\} = \mathrm{diag}(1, 1, 1) = I_3,$$

et donc $\forall i \in [\![0, 3]\!]$, $A_i \in O_3(\mathbb{R})$.

**3.** $A_0$, $A_1$ et $A_2$ sont dans $O_3(\mathbb{R})$ et $A_3$ est dans $O_3(\mathbb{R}) \setminus SO_3(\mathbb{R})$.

**4.** • $t_\lambda$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(0, 0, \lambda)$.
• $\nu$ est le demi-tour d'axe $(Oz)$.
• $s$ est le demi-tour d'axe $(Ox)$.
• $r$ est la réflexion par rapport au plan $(Oxy)$.

**5.** Les expressions analytiques respectives de $\nu \circ t_\lambda$ et $t_\lambda \circ \nu$ sont toutes deux $X' = A_1X + B_\lambda$ qui est l'expression analytique de $\nu_\lambda$. Donc $\nu_\lambda = \nu \circ t_\lambda = t_\lambda \circ \nu$.
$\nu_\lambda$ est le vissage d'angle $\pi$ autour de $\overrightarrow{k}$ et de vecteur $\overrightarrow{u}$.

**6.** Soit $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$. L'expression analytique de $\nu_\gamma \circ \nu_\delta$ est

$$X' = A_1(A_1X + B_\delta) + B_\gamma = A_1^2X + A_1B_\delta + B_\gamma = X + B_\delta + B_\gamma = X + B_{\gamma+\delta},$$

qui est aussi l'expression analytique de $t_{\gamma+\delta}$. Donc $\nu_\gamma \circ \nu_\delta = t_{\gamma+\delta}$.

L'expression analytique de $t_\gamma \circ \nu_\delta$ est

$$X' = (A_1X + B_\delta) + B_\gamma = A_1X + B_{\gamma+\delta},$$

qui est aussi l'expression analytique de $\nu_{\gamma+\delta}$. Donc $t_\gamma \circ \nu_\delta = \nu_{\gamma+\delta}$.

# Partie D : un cylindre à base elliptique

**1.** Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

• $t_\lambda(M)$ a pour coordonnées $(x', y', z') = (x, y, z + \lambda)$ et $t_\lambda^{-1}(M)$ a pour coordonnées $(x'', y'', z'') = (x, y, z - \lambda)$. Donc

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \Rightarrow t_\lambda(M) \in \mathcal{C} \text{ et } t_\lambda^{-1}(M) \in \mathcal{C}.$$

D'après la question 1 de la partie A, $t_\lambda \in \mathcal{C}$.

• $\nu_\lambda(M)$ a pour coordonnées $(x', y', z') = (-x, -y, z + \lambda)$ et $\nu_\lambda^{-1}(M)$ a pour coordonnées $(x'', y'', z'') = (-x, -y, z - \lambda)$. Donc

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \nu_\lambda(M) \in \mathcal{C} \text{ et } \nu_\lambda^{-1}(M) \in \mathcal{C}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.

et donc $v_\lambda \in \mathcal{C}$.

- $s(M) = s^{-1}(M)$ a pour coordonnées $(x', y', z') = (x, -y, -z)$. Donc

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow s(M) \in \mathcal{C} \text{ et } s^{-1}(M) \in \mathcal{C}.$$

et donc $s \in \mathcal{C}$.

- $r(M) = r^{-1}(M)$ a pour coordonnées $(x', y', z') = (x, y, -z)$. Donc

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow r(M) \in \mathcal{C} \text{ et } r^{-1}(M) \in \mathcal{C}.$$

et donc $r \in \mathcal{C}$.

**2.** Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = \cos\theta \\ \dfrac{y}{b} = \sin\theta \end{array} \right. \quad \exists \theta \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}/ \ M \in d_\theta \Leftrightarrow M \in \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} d_\theta.$$

$$\boxed{\mathcal{C} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} d_\theta.}$$

**3.**

**3.1** $d_0$ est la droite dont un système d'équations est $\left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = 0 \end{array} \right.$. $d_0$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{k}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite non parallèle à $d_0$ et soit $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Si $\alpha = \beta = 0$, alors $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$ puis $\mathcal{D}$ est parallèle à $d_0$ ce qui n'est pas. Donc l'un des deux réels $\alpha$ ou $\beta$ n'est pas nul.

**3.2** Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$.

**3.3** Soit $(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathcal{D}$. Si $M \in \mathcal{C}$, alors

$$\frac{(x_0 + t\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + t\beta)^2}{b^2} = 1.$$

L'équation ci-dessus est une équation du second degré car le coefficient de $t^2$ à savoir $\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ n'est pas nul (puisque $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$). On sait que cette équation admet au plus deux solutions dans $\mathbb{R}$ ou encore $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en au plus deux points.

**4.** Soit $f \in G(\mathcal{C})$. On sait que $f(d_0)$ est une droite $\mathcal{D}$ car $f$ est affine. Supposons $\mathcal{D}$ non parallèle à $d_0$. Alors $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en au plus deux points. Puisque $\mathcal{D}$ est infinie, il existe au moins un point de $M'$ de $\mathcal{D}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{C}$. Soit $M$ un point de $d_0$ tel que $f(M) = M'$. $M$ est un point de $d_0$ et donc de $\mathcal{C}$ tel que $f(M)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}$. Ceci contredit le fait que $f \in G(\mathcal{C})$ et on a donc montré que $f(d_0)$ est parallèle à $d_0$.

**5.** Soit $f \in G(\mathcal{C})$. $f(d_0)$ est une droite parallèle à $d_0$ d'après la question précédente. Soient $A$ et $B$ les points de $d_0$ de coordonnées respectives $(a, 0, 0)$ et $(a, 0, 1)$. Soient $A'$ et $B'$ les images respectives des points $A$ et $B$ par $f$.

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Puisque $f(d_0)$ est une droite parallèle à $d_0$ et que $A'$ et $B'$ appartiennent à la droite $f(d_0)$, le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{k}$. Il existe donc un réel $t$ tel que $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{k}\right) = t\overrightarrow{k}$. Puisque le vecteur $\overrightarrow{k}$ n'est pas nul, on a montré que $\overrightarrow{k}$ est un vecteur propre de $\overrightarrow{f}$.

**6.**

**6.1** Soit $\varphi \in O(\mathcal{E})$ admettant $\overrightarrow{k}$ pour vecteur propre.

- Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = t\overrightarrow{k}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.

$$|t|\left\|\overrightarrow{k}\right\| = \left\|t\overrightarrow{k}\right\| = \left\|\varphi\left(\overrightarrow{k}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{k}\right\| \text{ (car } \varphi \in O(\mathcal{E})\text{)},$$

et donc $|t| = 1$ puisque $\left\|\overrightarrow{k}\right\| \neq 0$. Ainsi, ou bien $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{k}$, ou bien $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = -\overrightarrow{k}$. On pose dorénavant $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = \varepsilon\overrightarrow{k}$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. A ce stade, la matrice de $\varphi$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 0 \end{pmatrix}$.

• On sait qu'un automorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité. Donc, l'image par $\varphi$ d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{k}$ est encore un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{k}$. Ceci signifie que le plan vectoriel $\overrightarrow{P} = \text{Vect}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est stable par $\varphi$. A ce stade matrice de $\varphi$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est de la forme de l'énoncé avec $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Mais alors, la restriction $\varphi_{/\overrightarrow{P}}$ est un endomorphisme de $\overrightarrow{P}$ qui conserve la norme ou encore un automorphisme orthogonal de $\overrightarrow{P}$. Puisque la famille $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{P}$ et que $\varphi_{/\overrightarrow{P}}$ est un automorphisme orthogonal de $\overrightarrow{P}$, la matrice $M$ est une matrice orthogonale. La matrice de $\varphi$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ a la forme désirée.

**6.2** En développant le déterminant de $\varphi$ suivant la dernière ligne, on obtient $\det(\varphi) = \varepsilon\det(M)$. Comme $\det(M) \in \{-1, 1\}$, on a $\det(M) = \dfrac{1}{\det(M)}$. L'égalité $\det(\varphi) = \varepsilon\det(M)$ s'écrit donc aussi $\varepsilon = \det(\varphi)\det(M)$.

**7.**

**7.1** $g$ est une application de $\Pi$ dans $\Pi$ qui conserve les distances et donc $g \in \text{Is}(\Pi)$.
$f$ et $g$ sont des bijections. Si $M'$ est un point de $\Pi$ et si $M = g^{-1}(M')$ alors $M$ est un point de $\Pi$ tel que $f(M) = g(M) = M'$ et donc $M = f^{-1}(M')$. Ceci montre que $g^{-1}$ est la restriction de $f^{-1}$ à $\Pi$.
Soit $M$ un point de $\Gamma$. $g(M) = f(M)$ est un point de $\mathcal{C}$ appartenant au plan $\Pi$ et donc $g(M) \in \Gamma$. De même, $g^{-1}(M) = f^{-1}(M)$ est un point de $\mathcal{C}$ appartenant au plan $\Pi$ et donc $g^{-1}(M) \in \Gamma$. On a montré que $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

**7.2** D'après la partie B, $g$ est soit l'identité de $\Pi$, soit la symétrie centrale de centre $O$, soit la réflexion d'axe $(Ox)$, soit la réflexion d'axe $(Oy)$. Dans tous les cas, $f(O) = g(O) = O$.

**7.3** Les matrices possibles de $g$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de $\Pi$ sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**7.4** D'après la question 6, en tenant compte du fait que $f \in G^+(\mathcal{C})$, les matrices correspondantes de $f$ sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Mais alors, ou bien $f = Id$, ou bien $f = \nu$, ou bien $f = s$, ou bien $f = \nu \circ s$. On a montré que si $f \in G^+(\mathcal{C})$ et $f(O) \in \Pi$, il existe $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ tel que $f = \nu^i s^j$.

**8.**

**8.1** Le vecteur $\overrightarrow{f(O)O'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$. Ses coordonnées s'écrivent donc $(0, 0, \mu)$ où $\mu$ est un réel. De plus, le vecteur $\overrightarrow{f(O)O'}$ n'est pas nul car $O' \in \Pi$ et $f(O) \notin \Pi$. On en déduit que $\mu \neq 0$. Finalement, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $t = t_\mu$.

$h$ est la composée de deux déplacements et donc $h$ est un déplacement. $f(\mathcal{C} = \mathcal{C}$ puis $t(\mathcal{C}) = t_\mu(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ d'après la question 1. Finalement, $h(\mathcal{C}) = t(f(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$. Ceci montre que $h \in G^+(\mathcal{C})$.

Enfin, $h(O) = t(f(O)) = O'$ et donc $h(O) \in \Pi$.

**8.2** D'après la question 7, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ et il existe $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ tels que $t_\mu \circ f = h = \nu^i s^j$ ou encore tels que $f = t_{-\mu} \circ \nu^i \circ s^j$. On a montré qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, à savoir $\lambda = -\mu$ et $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ tels que $f = t_\lambda \circ \nu^i \circ s^j$.

**9.**

**9.1** Puisque $f \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$ et $r \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$, on a $r \circ f \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$. De plus, $r(f(\mathcal{C})) = r(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ d'après la question 1 et on a montré que $r \circ f \in G^+(\mathcal{C})$.

**9.2** Mais alors d'après les questions 7 et 8, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ tels que $r \circ f = t_\lambda \circ \nu^i \circ s^j$ ou encore $f = r \circ t_\lambda \circ \nu^i \circ s^j$ car $r^{-1} = r$.

# Partie E : une hélice

**1.** Soient $t \in \mathbb{R}$ puis $M$ le point de $\mathcal{H}$ de coordonnées $(a\cos(t), b\sin(t), t)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.

$$\frac{(x_M)^2}{a^2}+\frac{(y_M)^2}{b^2}=\frac{(a\cos(t))^2}{a^2}+\frac{(b\sin(t))^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1,$$

et donc $M\in\mathcal{C}$. On a montré que tout point de $\mathcal{H}$ appartient à $\mathcal{C}$ et donc que

$$\boxed{\mathcal{H}\subset\mathcal{C}.}$$

**2.** La droite $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{H}$ et donc $\mathcal{C}$ en au moins trois points et donc la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à $d_0$ d'après la question 3 de la partie D. Ensuite, la droite $\mathcal{D}$ a au moins un point en commun avec $\mathcal{C}$. Notons le A. D'après la question 2 de la partie 3, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $A\in d_\theta$. Les droites $\mathcal{D}$ et $d_\theta$ sont toutes deux parallèles à la droite $d_0$ et donc les droites $\mathcal{D}$ et $d_\theta$ sont parallèles. Comme ces deux droites ont en commun le point $A$, on en déduit que $\mathcal{D}=d_\theta$. On a montré qu'il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D}=d_\theta$.

**3.** Un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{H}$ est $\left\{\begin{array}{l}x=a\cos(z)\\ y=b\sin(z)\end{array}\right.$.
Soit $M$ de coordonnées $(a\cos\theta,b\sin\theta,t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de $d_\theta$.

$$M\in\mathcal{H}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a\cos t=a\cos\theta\\ b\sin t=b\sin\theta\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos t=\cos\theta\\ \sin t=\sin\theta\end{array}\right.\Leftrightarrow e^{it}=e^{i\theta}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ t=\theta+2k\pi.$$

Donc, $d_\theta\cap\mathcal{H}=\{M(\theta+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}\}$.

**4.** Soit $f\in G(\mathcal{H})$ et soit $\theta\in\mathbb{R}$. D'après la question précédente, l'ensemble $d_\theta\cap\mathcal{H}$ contient les trois points $M(\theta)$, $M(\theta+2\pi)$ et $M(\theta+4\pi)$. Ces trois points sont deux à deux distincts car leurs côtes respectives sont deux à deux distinctes.
Puisque $f$ est une bijection affine, $f(d_\theta)$ est une droite et d'autre part les trois points $f(M(\theta))$, $f(M(\theta+2\pi))$ et $f(M(\theta+4\pi))$ sont deux à deux distincts. Ainsi, $f(d_\theta)$ est une droite coupant la courbe $\mathcal{H}$ en au moins trois points deux à deux distincts. D'après la question 2, il existe $\omega\in\mathbb{R}$ tel que $f(d_\theta)=d_\omega$.

**5.** Soit $f\in G(\mathcal{H})$. La question 1 de la partie A montre que $f^{-1}\in G(\mathcal{H})$.
D'après la question 2 de la partie D, $f(\mathcal{C})=f\left(\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}}d_\theta\right)=\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}}f(d_\theta)$. La question précédente montre que chaque $f(d_\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$, est contenue dans $\mathcal{C}$ et donc que $f(\mathcal{C}\subset\mathcal{C}$. Par suite, pour chaque point $M$ de $\mathcal{C}$, $f(M)\in\mathcal{C}$.
En appliquant ce résultat à $f^{-1}$, on a aussi : pour chaque point $M$ de $\mathcal{C}$, $f^{-1}(M)\in\mathcal{C}$ et finalement $f\in G(\mathcal{C})$ d'après la question 1 de la partie A. On a montré que $G(\mathcal{H}\subset G(\mathcal{C})$.

**6.** Soit $k\in\mathbb{Z}$. $t_{2k\pi}$ est une isométrie. Soit alors $t\in\mathbb{R}$. Le point $t_{2k\pi}(M(t))$ a pour coordonnées $(a\cos t,b\sin t,t)+(0,0,2k\pi)=(a\cos t,b\sin t,t+2k\pi)=(a\cos(t+2k\pi),b\sin(t+2k\pi),t+2k\pi)$. Par suite, $t_{2k\pi}(M(t))=M(t+2k\pi)$. Ceci démontre que pour tout point $M$ de $\mathcal{H}$, le point $t_{2k\pi}(M)$ appartient à $\mathcal{H}$.
En appliquant ce résultat à l'entier relatif $k'=-k$, on a aussi : pour tout point $M$ de $\mathcal{H}$, le point $t_{2k\pi}^{-1}(M)$ appartient à $\mathcal{H}$ et finalement $t_{2k\pi}\in G(\mathcal{H})$.

**7.** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $t_\lambda\in G(\mathcal{H})$. Le point $M(0)$ de coordonnées $(a,0,0)$ appartient à $\mathcal{H}$ et il en est de même de $t_\lambda(M(0))$ dont les coordonnées sont $(a,0,\lambda)$.
Par suite, il existe un réel $t$ tel que $t_\lambda(M(0))=M(t)$ ce qui fournit $\left\{\begin{array}{l}a\cos t=a\\ b\sin t=0\\ t=\lambda\end{array}\right.$. Les deux premières équations montrent qu'il existe un entier relatif $k$ tel que $t=2k\pi$ et la troisième fournit alors $t=2k\pi$. On a montré que les translations éléments de $G(\mathcal{H}$ sont les $t_{2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$.

**8.** Soit $t\in\mathbb{R}$. $s(M(t))=s^{-1}(M(t))$ est le point $M(-t)$ de $\mathcal{H}$ et donc $s\in G(\mathcal{H}$.
$\nu_{-\pi}(M(t))$ a pour coordonnées $(-a\cos t,-b\sin t,t-\pi)$ ou encore $(a\cos(t-\pi),b\sin(t-\pi),t-\pi)$ et est donc le point $M(t-\pi)$ de $\mathcal{H}$. De même, $\nu_{-\pi}^{-1}(M(t))=\nu_\pi(M(t))$ est le point $M(t+\pi)$ de $\mathcal{H}$. Donc, $\nu_{-\pi}\in G(\mathcal{H})$.

**9.** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\nu_\lambda\in G(\mathcal{H})$. Le point $\nu_\lambda(M(0))$ a pour coordonnées $(-a,0,\lambda)$ et est un élément de $\mathcal{H}$. Par suite, il existe un réel $t$ tel que $\left\{\begin{array}{l}a\cos t=-a\\ b\sin t=0\\ t=\lambda\end{array}\right.$. Les deux premières équations montrent qu'il existe un entier relatif $k$ tel que $t=(2k+1)\pi$ et la dernière montre que $\lambda=(2k+1)\pi$. On a montré que si $\nu_\lambda\in G(\mathcal{H})$, alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\lambda=(2k+1)\pi$.
**10.** $\Leftarrow$ / D'après la question 8, $s\in G^+(\mathcal{H})$. D'après la question 6, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $t_{2k\pi}\in G^+(\mathcal{H})$. D'après la question 8, $\nu_{-\pi}\in G^+(\mathcal{H})$. Comme $(G^+(\mathcal{H}),\circ)$ est un groupe d'après la question 2 de la partie A, on en déduit que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\nu_{(2k+1)\pi}=\nu_{-\pi}\circ t_{2(k+1)\pi}\in G^+(\mathcal{H}$ puis $\nu_{(2k+1)\pi}\circ s\in G(\mathcal{H})$ et $t_{2k\pi}\circ s\in G^+(\mathcal{H})$.
On a montré que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, pour tout $i\in\{0,1\}$, les transformations $t_{2k\pi}\circ s^i$ et $\nu_{(2k+1)\pi}\circ s^i$ sont dans $G^+(\mathcal{H})$.

$\Rightarrow$ / Soit $f\in G^+(\mathcal{H})$.

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.

D'après la question 5, $G^+(\mathcal{H}) \subset G^+(\mathcal{C})$. D'après la question 8.2 de la partie D, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \{0, 1\}$ tel que $f = t_\lambda \circ v^j \circ s^i$.

- Si $i = j = 0$, la question 7 montre que nécessairement $\lambda = 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $f = t_{2k\pi} \circ s^0$.

- Si $j = 1$ et $i = 0$, $f = t_\lambda \circ v = v_\lambda$. La question 9 montre que $\lambda = (2k+1)\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $f = v_{(2k+1)\pi} \circ s^0$.

- Si $j = 0$ et $i = 1$, $f = t_\lambda \circ s$. Puisque $s \in G^+(\mathcal{H})$ et que $(G^+(\mathcal{H}), \circ)$ est un groupe, $f \circ s = t_\lambda$ est un élément de $G^+(\mathcal{H})$ et donc encore une fois $\lambda = 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f = t_{2k\pi} \circ s^1$.

- Si $i = j = 1$, $f = t_\lambda \circ v \circ s = v_\lambda \circ s$. Le cas $j = 1$ et $i = 0$ montre que $\lambda = (2k + 1)\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f = v_{(2k+1)\pi} \circ s^1$.

On a montré que $\forall f \in \text{Is}(\mathcal{E})$, $g \in G^+(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists i \in \{0, 1\}/ \left\{\begin{array}{c} f = t_{2k\pi} \circ s^i \\ \text{ou} \\ f = v_{(2k+1)\pi} \circ s^i \end{array}\right.$.

**11.** Supposons $G^-(\mathcal{H}) \neq \varnothing$.

**11.1** D'après la question 5, $G^-(\mathcal{H}) \subset G^-(\mathcal{C})$. D'après la question 9 de la partie D, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ tel que $r \circ t_\lambda \circ v^j \circ s^i \in G^-(\mathcal{H})$.

**11.2** $r \circ t_\lambda \circ v^j \circ s^i$ et $v^j \circ s^i$ sont dans $G(\mathcal{H})$. Donc, $r \circ t_\lambda \circ v^j \circ s^i \circ v^j \circ s^i = r \circ t_\lambda$ est encore dans $G(\mathcal{H})$. De plus, $r$ est une isométrie négative et $t_\lambda$ est une isométrie positive. Donc, $r \circ t_\lambda \in G^-(\mathcal{H})$. On a montré qu'il existe un réel $\mu$ tel que $r \circ t_\mu \in G^-(\mathcal{H})$.

**11.3** Les coordonnées de $t_\mu(M(0))$ sont $(a, 0, \mu)$ et donc les coordonnées de $r(t_\mu(M(0)))$ sont $(a, 0, -\mu)$.

**11.4** Comme à la question 7, si le point $(a, 0, -\mu)$ appartient à $\mathcal{H}$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu = 2m\pi$. Pour cet entier relatif $m$, $r \circ t_{2m\pi} \in G^-(\mathcal{H})$.

**11.5** $t_{2m\pi}$ est dans $G^+(\mathcal{H})$ et donc, omme à la question 11.3, $r \circ t_{2m\pi} \circ t_{2m\pi} = r$ est dans $G^-(\mathcal{H})$.

**11.6** Le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées $\left(0, b, \frac{\pi}{2}\right)$ et donc le point $r\left(M\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ a pour coordonnées $\left(0, b, -\frac{\pi}{2}\right)$.

**11.7** Si $r\left(M\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ est un point de $\mathcal{H}$, il s'agit nécessairement du point $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (à partir de la troisième coordonnée). Mais le point $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées $\left(0, -b, -\frac{\pi}{2}\right)$ et n'est pas le point $r\left(M\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Donc $r\left(M\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ n'est pas un point de $\mathcal{H}$ puis $r \notin G^-(\mathcal{H})$. Il était absurde de supposer $G^-(\mathcal{H}) \neq \varnothing$ et on a donc montré que $G^-(\mathcal{H}) = \varnothing$ ou encore $G(\mathcal{H}) = G^+(\mathcal{H})$.

 © Jean-Louis Rouget, 2011. Tous droits réservés.