ministère
éducation
nationale
jeunesse
vie associative

EBE MAT 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2012

CAPES
CONCOURS EXTERNE
TROISIEME CONCOURS
ET CAFEP CORRESPONDANTS

Section :
MATHÉMATIQUES
Section :
LANGUES RÉGIONALES : BRETON

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Problème 1 : continuité uniforme

Étant donnée une fonction f de variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide, on dit que f est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall (x,y) \in I^2\,,\ \Big(|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon\Big)$$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».
2. On rappelle qu'une fonction f est lipschitzienne de rapport k, où k est un réel strictement positif, si pour tout couple (x,y) d'éléments de I on a :

$$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$$

   Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.

3.

   3.1. Montrer que pour tous réels x et y on a :

$$\Big||y|-|x|\Big| \leqslant |y-x|$$

   3.2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

   Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

4.

   4.1. Montrer que pour tous réels positifs x et y on a :

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y} \qquad \text{et} \qquad \Big|\sqrt{x}-\sqrt{y}\Big| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$

   4.2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

   4.3. Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

5.

   5.1. En considérant les deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$, montrer que la fonction $h : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   5.2. La fonction h est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?

6. Soit F un application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$F(x) \leqslant ax+b$$

   6.1. Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \Big(|x-y| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |F(x)-F(y)| \leqslant 1\Big)$$

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

   6.2. Soit n_0 le plus petit entier tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.

6.3. Montrer que :

$$|F(x_0) - F(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|$$

6.4. Conclure.

7.

7.1. Les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}$?

7.2. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

8. **Théorème de Heine**

Soit $I = [a;b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer le théorème de Heine[1] : *si une fonction G est continue sur I alors elle est uniformément continue sur I.*

On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a;b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I.

8.1. Justifier qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon$$

8.2. Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ convergentes telles que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon$$

8.3. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$$

8.4. Conclure.

9. Soit J un intervalle d'intérieur non vide. Si une fonction G est uniformément continue sur tout intervalle $[a;b]$ inclus dans J, G est-elle nécessairement uniformément continue sur J ?

Problème 2 : marches aléatoires

Partie A : quelques résultats d'analyse

1. On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1.1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

1.2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

puis que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

1. Eduard Heine (1821-1881), mathématicien allemand

2. On considère la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Montrer, à l'aide des outils de terminale scientifique, que la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; on notera K la limite de cette suite (on ne demande pas de calculer K).

3. On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}$$

On admet la formule de Stirling [2] :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

4. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

5. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

6.
   6.1. Montrer que pour tous réels a et b on a : $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.
   6.2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}$$

7.
   7.1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}$$

   7.2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout entier $p \geqslant k$:

$$0 \leqslant a_p - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

   7.3. En déduire que, pour tout entier k non nul :

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

2. James Stirling (1692-1770) mathématicien écossais

Partie B : marche aléatoire sur une droite

Soit $(O; \vec{\imath})$ un axe gradué. Dans la suite du problème, tous les instants considérés sont des nombres entiers naturels.

Une particule située sur un point d'abscisse $k \in \mathbb{Z}$ saute à chaque instant sur le point d'abscisse $k+1$ ou sur le point d'abscisse $k-1$, avec la même probabilité.
Chaque saut est indépendant du précédent.

La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ $(n \geqslant 1)$.

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.
2. Pour tout $k \geqslant 1$, montrer que :
   2.1. $P(O_{2k+1} = 1) = 0$;
   2.2. $P(O_{2k} = 1) = \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k} = \dfrac{a_k}{\sqrt{k}}$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(U_n)$ de la variable aléatoire U_n et montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$E(U_n) = \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$$
4. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C : marche aléatoire sur un plan

Un plan est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Une particule située sur un point de coordonnées $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ saute à chaque instant sur l'un des points de coordonnées $(k+1, \ell+1)$, $(k+1, \ell-1)$, $(k-1, \ell+1)$ ou $(k-1, \ell-1)$ avec la même probabilité (c'est-à-dire qu'à chaque étape, la particule se déplace selon la diagonale d'un carré).
Chaque saut est indépendant du précédent.

La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ $(n \geqslant 1)$.

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.
2. Pour tout $k \geqslant 1$, calculer $P(O_{2k+1} = 1)$ et $P(O_{2k} = 1)$.
3. Montrer que l'espérance de U_n est donnée par :
$$E(U_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}$$
4. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a :
$$\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4\pi k^2} \leqslant \frac{a_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{\pi k}$$
5. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 3 : équation de Pell-Fermat

On se propose de déterminer s'il existe des entiers strictement positifs m et n ($m < n$) vérifiant l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k$$

1. Montrer que ce problème peut se ramener à la recherche d'entiers x, y, m et n ($0 < m < n$) tels que :

$$\begin{cases} x = 2n+1 \\ y = 2m \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

On note dans ce qui suit (E) l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On range les solutions de (E) dans l'ordre croissant des y.

2. Écrire un algorithme permettant d'obtenir les solutions de (E) pour $y \leqslant 100$.
3. Déterminer la plus petite (au sens de l'ordre choisi) solution de (E).
4.
   4.1. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier n non nul :

   $$(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$

   4.2. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

   4.3. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et tendent vers $+\infty$.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, (x_n, y_n) est solution de (E).

On se propose de montrer que l'ensemble $S = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (E).

On suppose qu'il existe des couples (x, y) d'entiers positifs solutions de (E) n'appartenant pas à S et on note (X, Y) le plus petit (au sens de l'ordre choisi) de ces couples.

6. Montrer qu'il existe un unique entier N tel que $y_N < Y < y_{N+1}$.
7. Justifier à l'aide de l'algorithme que $N \geqslant 2$.
8. Montrer que :

$$x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}$$

9. En déduire que :

$$x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X - 4Y) + (3Y - 2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}$$

10. Montrer que :

    10.1. $3X - 4Y > 0$;

    10.2. $3Y - 2X > 0$;

    10.3. $3Y - 2X < Y$;

    10.4. $(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ est solution de (E).
11. Conclure.
12. Donner les cinq premiers couples d'entiers (x, y) (au sens de l'ordre choisi) solutions de (E) puis les valeurs correspondantes de m et n .