SESSION 2012

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Problème 1 : continuité uniforme

1. f n'est pas uniformément continue sur I si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0/ \ \forall \eta > 0, \ \exists (x, y) \in I^2/ \ (|x - y| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon).$$

2. Soit f une fonction k-lipschitzienne sur I avec $k > 0$. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Soient x et y deux réels de I tels que $|x - y| \leqslant \eta$. Alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \leqslant k\eta = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0/ \ \forall (x, y) \in I^2, \ (|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$ et donc f est uniformément continue sur I.

3.

3.1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| \pm |y|$ et donc $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. En appliquant ce résultat à y et x, on a aussi $|y| - |x| \leqslant |y - x|$. Comme $||x| - |y||$ est l'un des deux nombres $|x| - |y|$ ou $|y| - |x|$, on a montré que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

3.2 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{1 + |x|} - \frac{1}{1 + |y|} \right| = \frac{||x| - |y||}{(1 + |x|)(1 + |y|)} \leqslant \frac{||x| - |y||}{(1 + 0)(1 + 0)} = ||x| - |y||.$$

Donc, la fonction f est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et en particulier f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2.

4.

4.1 Soient x et y deux réels positifs.

$$\sqrt{x + y}^2 = x + y \leqslant x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2,$$

et donc, puisque les deux nombres $\sqrt{x + y}$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sont positifs, on en déduit que $\sqrt{x + y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$ par **stricte** croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}^+$.

Soient x et y deux réels positifs.

$$\sqrt{x} = \sqrt{y + x - y} \leqslant \sqrt{y + |x - y|} \leqslant \sqrt{y} + \sqrt{|y - x|},$$

et donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{|x - y|}$. En appliquant à y et x, on a aussi $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{|x - y|}$ et finalement $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.

4.2 Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta = \varepsilon^2 > 0$. Soient x et y deux réels positifs tels que $|x - y| \leqslant \eta$. Alors

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0/ \ \forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \ (|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon)$ et donc g est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

4.3 Il s'agit de prouver que l'ensemble $A = \left\{ \dfrac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|}, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ x \neq y \right\}$ n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$. Cet ensemble contient les nombres de la forme $\dfrac{|\sqrt{x} - \sqrt{0}|}{|x - 0|} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ où $x > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, l'ensemble A n'est pas majoré et donc la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

5.

5.1 Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Soit $\eta > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ puis $x_n = \sqrt{n+}$ et $y_n = \sqrt{n}$.

$$|x_n - y_n| \leqslant \eta \Leftarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \eta \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \eta \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} \leqslant \eta$$
$$\Leftarrow n \geqslant \frac{1}{4\eta^2}$$

On choisit alors $n = \mathrm{E}\left(\frac{1}{4\eta^2}\right) + 1$. D'après ce qui précède, on a $|x_n - y_n| \leqslant \eta$. D'autre part,

$$|x_n^2 - y_n^2| = x_n^2 - y_n^2 = n + 1 - n = 1 > \varepsilon.$$

On a montré que $\exists \varepsilon > 0/\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2/\ (|x - y| \leqslant \eta$ et $|h(x) - h(y)| > \varepsilon)$ et donc que la fonction h n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5.2 Puisque h n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, h n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ par contraposition de l'implication obtenue à la question 2.

6.

6.1 F est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. On peut donc appliquer la définition de l'uniforme continuité avec $\varepsilon = 1$ et on obtient

$$\exists \eta_1 > 0/\ \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ (|x - y| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant 1).$$

6.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{x_0}{n} \leqslant \eta_1 \Leftrightarrow \frac{x_0}{\eta_1} \leqslant n \Leftrightarrow n \geqslant \begin{cases} \mathrm{E}\left(\frac{x_0}{\eta_1}\right) + 1 \text{ si } \frac{x_0}{\eta_1} \notin \mathbb{N} \\ \frac{x_0}{\eta_1} \text{ si } \frac{x_0}{\eta_1} \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

On en déduit l'existence et l'unicité de n_0 : $n_0 = \begin{cases} 1 \text{ si } x_0 = 0 \\ \frac{x_0}{\eta_1} \text{ si } \frac{x_0}{\eta_1} \in \mathbb{N}^* \\ \mathrm{E}\left(\frac{x_0}{\eta_1}\right) + 1 \text{ si } \frac{x_0}{\eta_1} \notin \mathbb{N} \end{cases}$ (car $n_0 \in \mathbb{N}^*$).

6.3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \left(F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right) = F\left(\frac{n_0 x_0}{n_0}\right) - F(0) = F(x_0) - F(0)$ (somme télescopique). Par suite,

$$|F(x_0) - F(0)| = \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} \left(F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \left|F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|.$$

6.4 Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $\left|\frac{(k+1)x_0}{n_0} - \frac{kx_0}{n_0}\right| = \frac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$ et donc $\left|F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right| \leqslant 1$. Par suite,

$$|F(x_0) - F(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} 1 = n_0.$$

Maintenant, si $\frac{x_0}{\eta_1} \geqslant 1$, $n_0 = \mathrm{E}\left(\frac{x_0}{\eta_1}\right) \leqslant \frac{x_0}{\eta_1} + 1$ ce qui reste vrai dans le cas où $\frac{x_0}{\eta_1} < 1$. On en déduit que

$$F(x_0) \leqslant |F(x_0)| \leqslant |F(x_0) - F(0)| + |F(0)| \leqslant n_0 + |F(0)| \leqslant \frac{1}{\eta_1} x_0 + (1 + |F(0)|).$$

On a trouvé deux réels a et b (indépendants de x_0), à savoir $a = \frac{1}{\eta_1}$ et $b = 1 + |F(0)|$, tels que $F(x_0) \leqslant ax_0 + b$. On a montré que

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) \leqslant ax + b.$$

7. Soit F une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Alors F est en particulier une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) \leqslant ax+b$. Pour $x \geqslant 1$, on en déduit que $\dfrac{F(x)}{x} \leqslant a+\dfrac{b}{x} \leqslant a+b$. Ainsi, si F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, nécessairement la fonction $x \mapsto \dfrac{F(x)}{x}$ est majorée sur $[1,+\infty[$.

7.1) Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 2. On suppose sans perte de généralité, quite à remplacer P par $-P$, que $\mathrm{dom}(P) > 0$. On sait alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x} = +\infty$. D'après la remarque précédente, P n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

7.2 De même, puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées, la fonction exponentielle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

8. Théorème de Heine.

8.1 Puisque G n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$,

$$\exists \varepsilon > 0/\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in [a,b]^2/\ (|x-y| \leqslant \eta \text{ et } |G(x)-G(y)| > \varepsilon).$$

ε est ainsi dorénavant fixé. On applique cette définition aux cas particuliers $\eta = \dfrac{1}{n}$ où n est un entier naturel non nul donné et on obtient

$$\exists \varepsilon > 0/\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x_n,y) \in [a,b]^2/\ \left(|x_n-y_n| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } |G(x)-G(y)| > \varepsilon\right).$$

8.2 Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont à valeurs dans $[a,b]$ et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites réelles bornées. Le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer que l'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente. La suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est toujours bornée et on peut en extraire une sous-suite $(y_{\sigma}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente. La suite $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors une sous-suite convergente de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Enfin, la suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en tant que suite extraite de la suite convergente $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donc la suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une sous-suite convergente de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Il est connu que, puisque σ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même, on a en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n) \geqslant n$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\right| \leqslant \frac{1}{\sigma(n)} \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } \left|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})\right| > \varepsilon.$$

8.3 Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\right) = 0$. Puisque les suites $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes, on peut alors écrire

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} - \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} \left(x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\right) = 0,$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$.

8.4 Posons $x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant b$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ on obtient $a \leqslant x \leqslant b$. Puisque G est continue sur $[a,b]$ et en particulier en x, on doit avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})\right) = G(x) - G(x) = 0$. Ceci contredit le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})\right| > \varepsilon$. Il était donc absurde de supposer que G n'était pas uniformément continue sur $[a,b]$. Le théorème de Heine est démontré.

9. La fonction exponentielle est continue sur tout segment contenu dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Heine, la fonction exponentielle est donc uniformément continue sur tout segment de $\mathbb{R}$. Mais d'après la question 7.2, la fonction exponentielle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. L'implication ((G uniformément continue sur tout segment contenu dans J)$\Rightarrow$(G uniformément continue sur J)) est donc une implication fausse.

Problème 2 : marches aléatoires

Partie A : quelques résultats d'analyse

1.

1.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[k,k+1]$. Par suite, pour tout réel t de $[k,k+1]$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$. D'après l'inégalité de la moyenne, on a alors

$$\frac{1}{k+1} = \frac{(k+1)-k}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{(k+1)-k}{k} = \frac{1}{k}.$$

1.2 Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{k}$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(n+1).$$

Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt = \ln(n),$$

puis en rajoutant 1 à chaque membre de l'inégalité, on obtient $H_n \leqslant 1 + \ln(n)$. Cette dernière inégalité reste vraie pour $n = 1$ car $H_1 = 1$ et on a donc montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).}$$

Soit $n \geqslant 2$. Alors $\ln(n) > 0$ et en divisant les deux membres de l'encadrement précédent par $\ln(n)$, on obtient $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$. Quand n tend vers $+\infty$, $1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$ tend vers 1 et d'autre part, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ tend vers 1 car $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\dfrac{H_n}{\ln(n)}$ tend vers 1 ou encore que

$$\boxed{H_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $K_{n+1} - K_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. Donc la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. D'autre part, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
K_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \times k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1) \times k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= 1 + 1 - \frac{1}{n} \text{ (somme télescopique)} \\
&\leqslant 2.
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$. Ainsi, la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 et donc la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. Déterminons un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\sqrt{n}}{4^n} \times \frac{(2n)!}{n!^2} \\
&\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{4^n} \times \frac{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\left(\dfrac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{2\pi n}\right)^2} = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \times \frac{n^{2n}}{(n^n)^2} \times \frac{(e^n)^2}{e^{2n}} \times 2^{2n} \times \frac{\sqrt{n}}{n} \times \frac{\sqrt{4\pi}}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \times \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \times \frac{4^n}{\sqrt{n}} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

puis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{\left(\sqrt{n}\right)^2 - 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + \left(\sqrt{n+1}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}.$$

5. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 > 0$ puis que $a_{n+1} > a_n$ (car $a_n > 0$). Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et tend vers $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ d'après la question 3. Mais alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

6.

6.1 Soient a et b deux réels.

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0,$$

et donc $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

6.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. De plus, d'après la question précédente, $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \geqslant 4\sqrt{n}\sqrt{n+1}$. Par suite,

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2 = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}.$$

7.

7.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sa it déjà que $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$. Ensuite,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a_n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = a_n \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \text{ (d'après la question 4)} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\times} \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}} \times \frac{1}{2\sqrt{n(n+1)}} \text{ (d'après les questions 5 et 6.2)} \\ &= \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}.}$$

7.2 L'inégalité est claire si $p = k$. Soient k et p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant< p$.

$$\begin{aligned} a_p - a_k &= \sum_{i=k}^{p-1} (a_{i+1} - a_i) \text{ (somme télescopique)} \\ &\leqslant \sum_{i=k}^{p-1} \frac{1}{8i(i+1)\sqrt{\pi}} \text{ (d'après la question 7.2)} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{i=k}^{p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{p}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &\leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

7.3 k étant fixé, on fait tendre p vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent. D'après la question 3, on obtient

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}.}$$

Partie B : marche aléatoire sur une droite

1. Pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \sum_{k=1}^{2n} O_k$.

2.

2.1 Soit $k \geqslant 0$. Une marche aléatoire de l'instant 0 à l'instant k s'identifie à un k-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}$. L'abscisse de la particule à l'instant k est $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ puis l'abscisse de la particule est $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} + x_{2k+1}$. Modulo 2, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} + x_{2k+1} \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 = 2k + 1 \equiv 1$. Ainsi, l'abscisse de la particule à l'instant 0 est un nombre impair et en particulier n'est jamais égale à 0. Donc $p\left(O_{2k+1} = 1\right) = 0$.

2.2 Soit $k \geqslant 1$. Le nombre total de $2k$-uplets d'éléments de $\{-1, 1\}$ est $2^{2k} = 4^k$. D'autre part, une marche aléatoire de l'instant 0 à l'instant $2k$ aboutissant en O s'identifie à un $2k$-uplet $(x_1, \ldots, x_{2k})$ d'éléments de $\{-1, 1\}$ tel que $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} = 0$ c'est-à-dire un $2k$-uplet $(x_1, \ldots, x_{2k})$ d'éléments de $\{-1, 1\}$ contenant de 1 que de -1. Il y a $\binom{2k}{k}$ tels $2k$-uplets, $\binom{2k}{k}$ étant le nombre de choix de l'emplacement de k nombres 1 dans $2k$ places. Finalement, $p\left(O_{2k} = 1\right) = \dfrac{\binom{2k}{k}}{4^k}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $E(O_{2k+1}) = 0 \times p(O_{2k+1} = 0) + 1 \times p(O_{2k+1} = 1) = 0$. D'autre part,

$$E(O_{2k}) = 0 \times p(O_{2k} = 0) + 1 \times p(O_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}.$$

L'espérance étant linéaire

$$E(U_n) = \sum_{k=1}^{2n} E(O_k) = \sum_{k=1}^{n} E(O_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}.$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $E(U_n) = \dfrac{2n+1}{4^n}\dbinom{2n}{n} - 1$.

- Pour $n = 1$, $E(U_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $\dfrac{2n+1}{4}\dbinom{2n}{n} - 1 = \dfrac{3}{4} \times 2 - 1 = \dfrac{1}{2}$. L'égalité est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $E(U_n) = \dfrac{2n+1}{4^n}\dbinom{2n}{n} - 1$.

$$\begin{aligned}
E(U_{n+1}) &= E(U_n) + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1 + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\left(4(2n+1)\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1}\right) - 1 = \frac{1}{4^{n+1}}\left(4(2n+1)\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} + 1\right)\binom{2n+2}{n+1} - 1 \\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\left(2(n+1)+1\right)\binom{2(n+1)}{n+1} - 1.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ E(U_n) = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1.}$$

4. $E(U_n) = \dfrac{2n+1}{\sqrt{n}}\dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n} - 1 = \dfrac{(2n+1)a_n}{\sqrt{n}} - 1$. D'après la question 3 de la partie A, $\dfrac{(2n+1)a_n}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2n}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}} = \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$. Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{E(U_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.}$$

Partie C : marche aléatoire sur un plan

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $U_n = \sum_{k=1}^{2n} O_k$.

2. • Soit $k \geqslant 0$. Si une marche dans le plan aboutit à l'origine à l'instant k, alors la projetée de cette marche sur l'axe (Ox) aboutit aussi à l'origine. D'après la partie B, la projetée de la particule sur (Ox) n'est jamais en O à l'instant $2k+1$ et donc la particule n'est jamais en O à l'instant $2k+1$. On en déduit que $p(O_{2k+1} = 1) = 0$.

• Soit $k \geqslant 1$. Une marche entre l'instant 0 et l'instant $2k$ aboutit en O si et seulement si ses projections sur (Ox) et (Oy) aboutissent en O. La probabilité demandée est donc

$$p(O_{2k} = 1) = \left(\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\right)^2 = \left(\frac{a_k}{\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{a_k^2}{k}.$$

3. La question précédente fournit aussi $\forall k \geqslant 0$, $E(O_{2k+1}) = 0$ et $\forall k \geqslant 1$, $E(O_{2k}) = \dfrac{a_k^2}{k}$.

Soit $n \geqslant 1$. $E(U_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} E(O_k) = \sum_{k=1}^{n} E(O_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}$.

4. Soit $k \geqslant 1$. D'après la question 7.3 de la partie A, $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \dfrac{1}{8k\sqrt{\pi}}$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} - \dfrac{1}{8k\sqrt{\pi}} \leqslant a_k \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ puis $\dfrac{1}{k\pi}\left(1 - \dfrac{1}{8k}\right)^2 \leqslant \dfrac{a_k^2}{k} \leqslant \dfrac{1}{k\pi}$. D'autre part,

$$\left(1 - \frac{1}{8k}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4k} + \frac{1}{64k^2} \geqslant 1 - \frac{1}{4k},$$

et donc $a_k \geqslant \dfrac{1}{k\pi}\left(1 - \dfrac{1}{8k}\right)^2 \geqslant \dfrac{1}{k\pi}\left(1 - \dfrac{1}{4k}\right) = \dfrac{1}{k\pi} - \dfrac{1}{4\pi k^2}$. On a montré que

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4\pi k^2} \leqslant \frac{a_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{k\pi}.}$$

5. Soit $n \geqslant 1$. On somme les égalités précédentes et on obtient :

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{8\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant E(U_n) \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

ou encore

$$\frac{H_n}{\pi} - \frac{K_n}{8\pi} \leqslant E(U_n) \leqslant \frac{H_n}{\pi}. \quad (*)$$

D'après les questions 1 et 2 de la partie A, $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ alors que la suite (K_n) converge. On divise les trois membres de $(*)$ par le réel strictement positif H_n et le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $E(U_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{H_n}{\pi}$ puis, toujours d'après la question 1 de la partie A.

$$\boxed{E(U_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\pi}.}$$

Problème 3 : équation de Pell-Fermat

1. Soient m et n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant m < n$.

$$\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k \Leftrightarrow \frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} \Leftrightarrow 2m^2 = n^2 + n \Leftrightarrow 4n^2 + 4n - 8m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1 \Leftrightarrow \exists (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ / \ \left\{\begin{array}{l} x = 2n+1 \\ y = 2m \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{array}\right. .$$

2. Algorithme écrit avec Algobox.

```
VARIABLES
    x EST DU TYPE NOMBRE
    y EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
    POUR y ALLANT DE 1 A 100
        DEBUT POUR
        SI (sqrt(1+2*pow(y,2))==floor(sqrt(1+2*pow(y,2)))) ALORS
            DEBUT SI
                x PREND LA VALEUR sqrt(1+2*pow(y,2))
                AFFICHER "("
                AFFICHER x
                AFFICHER ","
                AFFICHER y
                AFFICHER ")"
            FIN SI
        FIN POUR
FIN ALGORITHME
```

Le programme retourne les couples $(3,2)$, $(17,12)$ et $(99,70)$.

3. La plus petite solution est $(3,2)$.

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule du binôme de Newton fournit

$$\begin{aligned}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \left(2\sqrt{2}\right)^k 3^{n-k} = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}} \binom{2k}{n} \left(2\sqrt{2}\right)^{2k} 3^{n-2k} + \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}} \binom{2k+1}{n} \left(2\sqrt{2}\right)^{2k+1} 3^{n-2k-1} \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}} \binom{2k}{n} 2^{3k} 3^{n-2k} + \sqrt{2} \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}} \binom{2k+1}{n} 2^{3k+1} 3^{n-2k-1}.\end{aligned}$$

Si on pose $x_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}} \binom{2k}{n} 2^{3k} 3^{n-2k}$ et $y_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}} \binom{2k+1}{n} 2^{3k+1} 3^{n-2k-1}$, x_n et y_n sont deux entiers naturels non nuls tels que $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(x_n + y_n\sqrt{2}\right) = (3x_n + 4y_n) + \sqrt{2}(2x_n + 3y_n).$$

De plus, $\sqrt{2}$ est irrationnel et donc la famille $\left(1, \sqrt{2}\right)$ est $\mathbb{Q}$-libre. Par identification, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{array}\right. .}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 4y_n > 0$ et $y_{n+1} - y_n = 2x_n + 3y_n > 0$. Donc les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$ et un calcul conjugué fournit $\left(3-2\sqrt{2}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{2}$. En additionnant ou en retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right) \text{ et } y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right).$$

Puisque $3+2\sqrt{2} > 1$ et $0 < 3-2\sqrt{2} < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_n^2 - 2y_n^2 = \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{2}\right) = \left(3+2\sqrt{2}\right)^n\left(3-2\sqrt{2}\right)^n = (9-8)^n = 1.$$

Donc, (x_n, y_n) est solution de (E).

6. Puisque la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, $N+1$ est nécessairement le premier entier p tel que $y_p > Y$. Ceci assure l'unicité de N.

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Donc l'ensemble $A = \{p \in \mathbb{N}^*/\ y_p > Y\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (et même de $\mathbb{N}^*$). A admet donc un plus petit élément que l'on note $N+1$ où N est un entier naturel. Par définition de N, $y_N \leqslant Y < y_{N+1}$. Enfin, si $y_N = Y$, alors $x_N = \sqrt{1+2Y_N^2} = \sqrt{1+2Y^2} = X$ (car $x_N \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$) et donc $(X, Y) = (x_N, y_N) \in \mathcal{S}$ ce qui n'est pas. Finalement, $y_N < Y < y_{N+1}$.

7. D'après la question 3, $y_1 = 2$. L'algorithme montre que $y_2 = 12$ et que $Y > 12$. Mais alors $N \geqslant 2$.

8. Puisque $y_N < Y < y_{N+1}$ $(*)$, on a encore $\sqrt{1+2y_N^2} < \sqrt{1+2Y^2} < \sqrt{1+2y_{N+1}^2}$ car stricte croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0, +\infty[$. Mais alors $x_N < X < x_{N+1}$ $(**)$.
En additionnant $(*)$ et $(**)$, on obtient $x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}$.

9. L'encadrement précédent s'écrit aussi $\left(3+2\sqrt{2}\right)^N < X + Y\sqrt{2} < \left(3+2\sqrt{2}\right)^{N+1}$. En multipliant les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif $3-2\sqrt{2}$et en tenant compte de $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right) = 1$, on obtient $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{N-1} < \left(X+Y\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right) < \left(3+2\sqrt{2}\right)^N$ ou encore

$$x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X-4Y) + (3Y-2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}.$$

10. a) Puisque $X^2 - 2Y^2 = 1$ et $X > 0$, on a

$$3X = 3\sqrt{1+2Y^2} > 3\sqrt{2}Y > 4Y,$$

et donc $3X - 4Y > 0$.

b) Puisque $X^2 - 2Y^2 = 1$ et $Y \geqslant 12$ d'après la question7, on a

$$2X = 2\sqrt{1+2Y^2} \leqslant 2\sqrt{\frac{Y^2}{12} + 2Y^2} = \frac{5}{\sqrt{3}}Y < 3Y,$$

et donc $3Y - 2X > 0$.

c) $X = \sqrt{1+2Y^2} > \sqrt{Y^2} = Y$ et donc $2Y - 2X < 0$ puis $3Y - 2X < Y$.

d) $(3X-4Y)^2 - 2(3Y-2X)^2 = X^2 - 2Y^2 = 1$ et donc le couple $(3X-4Y, 3Y-2X)$ est une solution de (E).

11. On a trouvé un couple $(X', Y') = (3X-4Y, 3Y-2X)$ d'entiers naturels non nuls d'après 10.1 et 10.2, solution de (E) d'après 10.4 et tel que $Y' < Y$ d'après 10.3. Ceci contredit la définition de (X, Y) et il était donc absurde de supposer qu'il existait une solution n'appartenant pas à S. Finalement,

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } S.}$$

12. • $(x_1, y_1) = (3, 2)$ fournit $m = 1$ et $n = 1$.
• $\left(3+2\sqrt{2}\right)^2 = 17 + 12\sqrt{2}$ fournit $(x_2, y_2) = (17, 12)$ puis $m = 6$ et $n = 8$.
• $\left(3+2\sqrt{2}\right)^3 = \left(17+12\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) = 99 + 70\sqrt{2}$ fournit $(x_3, y_3) = (99, 70)$ puis $m = 35$ et $n = 49$.
• $\left(3+2\sqrt{2}\right)^4 = \left(99+70\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) = 577 + 408\sqrt{2}$ fournit $(x_4, y_4) = (577, 408)$ puis $m = 204$ et $n = 288$.
• $\left(3+2\sqrt{2}\right)^5 = \left(577+408\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) = 2547 + 2378\sqrt{2}$ fournit $(x_5, y_5) = (2547, 2378)$ puis $m = 1189$ et $n = 1273$.

