**SESSION 2011**

# CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

---

## Partie I - Cas d'un triangle équilatéral

**1. (a)** On sait que la courbe considérée est du genre ellipse si et seulement si $ab - c^2 > 0$. Ceci impose $ab > 0$ et en particulier $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Soit alors $\mathcal{E}$ une ellipse de centre $O$. Les abscisses intersection de $\mathcal{E}$ avec $(Ox)$ sont les solutions de l'équation $ax^2+dx+f=0$. Ces solutions devant être opposées, leur somme à savoir $-\dfrac{d}{a}$ est nulle et donc $d = 0$. De même, l'étude de $\mathcal{E} \cap (Oy)$ fournit $e = 0$.

**(b)** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ puis $\mathcal{E}$ l'ensemble d'équation $ax^2 + by^2 + 2cxy + f = 0$.

$$(I, J, K) \in (\mathcal{E})^3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+f=0 \\ \dfrac{a+3b-3c\sqrt{3}}{4}+f=0 \\ \dfrac{a+3b+3c\sqrt{3}}{4}+f=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-f \\ 3b-3c\sqrt{3}+3f=0 \\ 3b+3c\sqrt{3}+3f=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-f \\ b=-f \\ c=0 \end{array}\right. .$$

Les éventuelles ellipses contenant I, J et K ont donc une équation de la forme $f(x^2 + y^2 - 1) = 0$, $f \neq 0$ ce qui équivaut à $x^2 + y^2 = 1$. Ceci assure l'unicité de $\mathcal{E}$.
Réciproquement, $x^2 + y^2 = 1$ est une équation du cercle circonscrit au triangle IJK qui convient.

**2.** On note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC, $a$ la longueur d'un côté du triangle ABC et $h$ une hauteur. On a $R = \dfrac{2h}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ et donc

$$\mathscr{A} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3R}{2} \times R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

**3.** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \cos(y-x)=\cos x \\ \cos(y-x)=\cos y \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos y=\cos x \\ \cos(y-x)=\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/ \left\{\begin{array}{l} y=x+2k\pi \\ \cos x=1 \end{array}\right. \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/ \left\{\begin{array}{l} y=-x+2k\pi \\ \cos(2x)=\cos(x) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (2\pi\mathbb{Z})^2 \text{ ou } \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2/ \left\{\begin{array}{l} y=-x+2k\pi \\ 2x=x+2k'\pi \end{array}\right. \text{ ou } \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2/ \left\{\begin{array}{l} y=-x+2k\pi \\ 2x=-x+2k'\pi \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (2\pi\mathbb{Z})^2 \ \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2/ \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2k'\pi}{3} \\ y=-\dfrac{2k'\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $(2\pi\mathbb{Z})^2 \cup \left\{\left(\dfrac{2k\pi}{3}, -\dfrac{2k\pi}{3} + 2k'\pi\right),\ (k, k') \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Si de plus $0 < x < y < 2\pi$, on obtient un couple solution et un seul à savoir $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

**4. (a) i.** On note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} R(\cos\beta - 1) & R(\cos\gamma - 1) \\ R\sin\beta & R\sin\gamma \end{array}\right| = \frac{R^2}{2}(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta - \sin\gamma + \sin\beta) \\
&= \frac{R^2}{2}(\sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta).
\end{aligned}$$

 

**ii.** Soit $T = \{(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant 2\pi\}$. T est une intersection de trois demi-plans fermés (à savoir $P_1 = \{(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leqslant \beta\}$, $P_2 = \{(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 / \ \beta \leqslant \gamma\}$ et $P_3 = \{(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 / \ \gamma \leqslant 2\pi\}$) et donc T est un fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus T est borné car $\forall(\beta,\gamma) \in T^2$, $\|(\beta,\gamma)\|_\infty \leqslant 2\pi$. D'après le théorème de BOREL-LEBESGUE, T est un compact de $\mathbb{R}^2$.
L'application f est continue sur ce compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ et donc f admet sur T un minimum et un maximum. Le minimum de T est bien sûr 0 et est atteint en tout point du bord de T ( quand $\beta = 0$ ou $\gamma = 2\pi$ ou $\beta = \gamma$) et puisque f n'est pas la fonction nulle, le maximum de f est atteint à l'intérieur de T c'est-à-dire en un point $(\beta_0, \gamma_0)$ tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$.

**iii.** La fonction f est de classe $C^1$ sur l'intérieur de T qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc le point $(\beta_0,\gamma_0)$ est un point critique de f. Or, pour $(\beta,\gamma) \in (\overset{\circ}{T})^2$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \beta}(\beta,\gamma) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \gamma}(\beta,\gamma) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\gamma-\beta) = \cos\beta \\ \cos(\beta-\gamma) = \cos\gamma \end{cases} \Leftrightarrow (\beta,\gamma) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \text{ d'après la question 3.}$$

Donc f atteint son maximum en un unique point $(\beta_0,\gamma_0)$ de T à savoir $(\beta_0,\gamma_0) = \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$. Le triangle ABC correspondant est équilatéral.

**(b)** D'après la question 2., l'aire maximale d'un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$ est $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

**Reamarque.** $f(\beta_0,\gamma_0) = \dfrac{R^2}{2}\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{3R^2}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\boxed{\text{L'aire maximale d'un triangle inscrit dans } \mathcal{C} \text{ est } \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.}$$

**5.** $\mathcal{A}_\mathcal{C} = \pi R^2$ et donc $\dfrac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} \geqslant \dfrac{\pi R^2}{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si ABC est équilatéral.

**6.** Soit $\mathcal{E}$ une ellipse circonscrite au triangle $\mathcal{T}_0 = IJK$. Il existe une affinité orthogonale f transformant $\mathcal{E}$ en un cercle $\mathcal{C}$. L'affinité f transforme le triangle $\mathcal{T}_0$ en un triangle $\mathcal{T} = ABC$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Puisqu'une affinité orthogonale conserve les rapports d'aires, on a

$$\frac{\mathcal{A}_\mathcal{E}}{\mathcal{A}_{\mathcal{T}_0}} = \frac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} \geqslant \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \ (*)$$

et donc $\mathcal{A}_\mathcal{E} \geqslant \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}\mathcal{A}_{\mathcal{T}_0} = \pi$ (d'après la question 3.). Maintenant, le cercle $\mathcal{C}_0$ circonscrit au triangle IJK est une ellipse circonscrite à ce triangle d'aire $\pi$ et donc fournissant un cas d'égalité de l'inégalité précédente. Par suite, il existe au moins une ellipse circonscrite au triangle IJK d'aire minimale à savoir le cercle circonscrit au triangle IJK.

Maintenant, d'après la question 5., l'inégalité $(*)$ est une égalité si et seulement si le triangle ABC est aussi équilatéral. Ceci équivaut au fait que f est une similitude. Une affinité orthogonale qui est aussi une similitude est une homothétie et donc $\mathcal{E}$ est nécessairement un cercle, circonscrit au triangle IJK c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle IJK. Ceci montre l'unicité de l'ellipse $\mathcal{E}$.

# Partie II - Etude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

**1.** Soit $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Déjà, D est une matrice symétrique réelle.
Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (]0, +\infty[)^n$ puis $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$${}^tXDX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i x_i^2 = 0$ ce qui équivaut à $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$. Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXDX > 0$ ou encore $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**2. (a)** Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On sait que les valeurs propres de A sont toutes réelles.
Soient $\lambda$ une valeur propre de A puis X un vecteur propre associé. Alors

$${}^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\|X\|_2^2.$$

 

Puisque X n'est pas nul, on a $\|X\|_2^2 > 0$ puis $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{\|X\|_2^2} > 0$. On a montré que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors toutes les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs.

**(b)** Le théorème spectral affirme que toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

**(c)** Soit A une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont des réels strictement positifs. Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telle que $A = {}^tPDP$. Puisque A et D sont semblables, les valeurs propres de D sont les valeurs propres de A et sont donc des réels strictement positifs. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'après la question 1.,

$$ {}^tXAX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)D(PX) \geqslant 0. $$

avec égalité si et seulement si $PX = 0$ ce qui équivaut à $X = 0$ puisque P est inversible. Ainsi, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, ${}^tXAX > 0$ et donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**3.** Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ à coefficients réels strictement positifs et une matrice orthogonale P telles que $A = {}^tPDP$. Posons $D' = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors $D = D'^2 = {}^tD'D'$ puis $A = {}^tP{}^t(D')D'P = {}^t(D'P)D'P$.
Si on pose $Q = D'P$, alors $A = {}^tQQ$. Enfin, $\det(A)$ est le produit des valeurs propres de A et donc $\det(A) \neq 0$. Par suite, $(\det Q)^2 = \det({}^tQQ) = \det(A) \neq 0$ puis $\det(Q) \neq 0$ et donc $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soient $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ puis $A = {}^tQQ$. D'une part, ${}^tA = {}^tQ{}^t({}^tQ) = {}^tQQ = A$ et donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'autre part, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$ {}^tXAX = {}^tX{}^tQQX = {}^t(QX)QX) = \|QX\|_2^2 \geqslant 0, $$

avec égalité si et seulement si $QX = 0$ ou encore $X = 0$ car Q est inversible. Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXAX > 0$ puis $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$ \boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) /\ A = {}^tQQ.} $$

**4.** Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs et $\det(A)$ est le produit de ces valeurs propres. Donc $\det(A) > 0$.
La réciproque de ce résultat est fausse. Par exemple, la matrice $-I_2$ est symétrique réelle de déterminant strictement positif car égal à 1, mais les valeurs propres de $-I_2$ à savoir $-1$ et $-1$ ne sont pas des réels strictement positifs ou encore $-I_2 \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

**5.** Le résultat est acquis si $k = n$ ou si $n = 1$. Soient $n \geqslant 2$ puis $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Déjà la matrice $A_k$ est symétrique. Vérifions que $\forall X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXA_kX > 0$.
Soient $X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ puis $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$. Y n'est pas nul et donc ${}^tYAY > 0$. Or

$$ {}^tYAY = \begin{pmatrix} {}^tX & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & \times \\ \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tXA_k & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = {}^tXA_kX, $$

et donc ${}^tXA_kX = {}^tYAY > 0$. Ainsi, la matrice $A_k$ est symétrique définie positive et donc d'après la question 4., $\det(A_k) > 0$.

$$ \boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \det(A_k) > 0.} $$

**6.** Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tQQ$. Par suite, puisque la matrice A est symétrique, la matrice A s'écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} {}^tQQ & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix}$ où $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $C = {}^tQ^{-1}C'$ de sorte que $C' = {}^tQC$ et ${}^tC' = {}^tCQ$. Alors

$$ \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tQ & {}^tQC \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tQQ & {}^tQC \\ {}^tCQ & \alpha \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} {}^tQQ & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix} = A. $$

**7. (a)** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En notant $C_1, \ldots, C_{m+1}$ les colonnes de M, on a

 

$$\det(M)=\det(C_1,\dots,C_m,C_{m+1})=\det\left(C_1,\dots,C_m,C_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}\alpha_kC_k\right)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \times & \dots & \dots & \times & \alpha-\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^2 \end{vmatrix}=\alpha-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^2.$$

**(b)** On suppose que $\det(M)=\alpha-\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^2>0$.

Soit $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant m+1}\in\mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}{}^tXMX&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m+1}m_{i,j}x_ix_j=\sum_{i=1}^{m}x_i^2+\alpha x_{m+1}^2+2\sum_{i=1}^{m}\alpha_ix_ix_{m+1}\\ &=\sum_{i=1}^{m}(x_i^2+2\alpha_ix_ix_{m+1})+\alpha x_{m+1}^2=\sum_{i=1}^{m}\left((x_i+\alpha_ix_{m+1})^2-\alpha_i^2x_{m+1}^2\right)+\alpha x_{m+1}^2\\ &=\sum_{i=1}^{m}(x_i+\alpha_ix_{m+1})^2+\left(\alpha-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2\right)x_{m+1}^2\\ &=\sum_{i=1}^{m}(x_i+\alpha_ix_{m+1})^2+\det(M)x_{m+1}^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\det(M)x_{m+1}^2=0$ et $\forall i\in[\![1,m]\!]$, $(x_i+\alpha_ix_{m+1})^2=0$ ou encore $x_{m+1}=0=x_1=\ldots=x_m$ car $\det(M)\neq 0$.

Ainsi, $\forall X\in\mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, ${}^tXMX>0$ et $M\in\mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.

**8.** D'après la question 5., on sait que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\Rightarrow\forall k\in[\![1,n]\!],\ \det(A_k)>0)$.

Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(\forall k\in[\![1,n]\!],\ \det(A_k)>0\Rightarrow A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$.

• Si $n=1$, soit $A=(a)\in\mathcal{S}_1(\mathbb{R})$ telle que $\forall k\in[\![1,1]\!],\ \det(A_k)>0$. Alors $a=\det(A)=\det(A_1)>0$. Mais alors pour $x\in\mathbb{R}^*$, ${}^t(x)A(x)=ax^2>0$ et donc $A\in\mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R})$.

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $\forall A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(\forall k\in[\![1,n]\!],\ \det(A_k)>0\Rightarrow A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$.
Soit $A\in\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall k\in[\![1,n+1]\!],\ \det(A_k)>0$. En particulier, $\det(A)=\det(A_{n+1})>0$. D'autre part, $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \det(A_k)>0$ et donc, par hypothèse de récurrence, $A_n\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
D'après la question 6., il existe $Q\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $C=(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que

$$A=\begin{pmatrix}{}^tQ & 0_{n,1}\\ 0_{1,n} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & C\\ {}^tC & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & 0_{n,1}\\ 0_{1,n} & 1\end{pmatrix}.$$

Posons $Q_1=\begin{pmatrix}Q & 0_{n,1}\\ 0_{1,n} & 1\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix}I_n & C\\ {}^tC & \alpha\end{pmatrix}$. $\det(Q_1)=\det(Q)\neq 0$ et donc $Q_1$ est inversible. On a ainsi écrit la matrice $A$ sous la forme $A={}^tQ_1MQ_1$ où $Q_1$ est une matrice inversible.
Ensuite, $\det(A)=\det({}^tQ_1)\det(M)\det(Q_1)=(\det(Q_1))^2\det(M)$ et donc $\det(M)=\dfrac{\det(A)}{(\det(Q_1))^2}>0$. La question 7.b) permet d'affirmer que la matrice $M$ est définie positive.

D'après la question 3, il existe une matrice inversible $Q_2$ telle que $M={}^tQ_2Q_2$. Posons $Q_3=Q_2Q_1$. $Q_3$ est inversible en tant que produit de deux matrices inversibles et de plus $A={}^tQ_1{}^tQ_2Q_2Q_1={}^t(Q_2Q_1)Q_2Q_1={}^tQ_3Q_3$. Mais alors, toujours d'après la question 3, $A$ est définie positive.

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ (\forall k\in[\![1,n]\!],\ \det(A_k)>0\Leftrightarrow A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})).}$$

 

**9.** On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on définit l'application $\varphi_k : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}_k(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A_k \end{array}$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\varphi_k$ est linéaire. Puisque $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie, on en déduit que $\varphi_k$ est continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{S}_k(\mathbb{R})$. D'autre part, on sait que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_k(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$ est continue sur $\mathcal{S}_k(\mathbb{R})$. Par composition, on en déduit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det(A_k) \end{array}$ est continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Mais alors $\varphi_k^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue.

Maintenant, d'après la question 8., $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} \varphi_k^{-1}(]0, +\infty[)$ et donc $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection d'un nombre fini d'ouverts de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ muni d'une norme.}}$$

# Partie III - Inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

**III.1 Réduction simultanée**

**1.** • $\Phi_A$ est une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

• Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. Puisque $\Phi_A(X) \in \mathbb{R}$, $\Phi_A(Y, X) = {}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tXAY = \Phi_A(X, Y)$. Donc $\Phi_A$ est symétrique.

• Soient $(X_1, X_2, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Phi_A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = {}^t(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)AY = \lambda_1 {}^tX_1 AY + \lambda_2 {}^tX_2 AY = \lambda_1 \Phi_A(X_1, Y) + \lambda_2 \Phi_A(X_2, Y).$$

Donc $\Phi_A$ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\Phi_A(X, X) = {}^tXAX > 0$. Donc $\Phi_A$ est définie positive.

En résumé, $\Phi_A$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc $\Phi_A$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**2.** Notons $C_1$, ..., $C_n$ les colonnes de $P$ et $(AP)_1$, ..., $(AP)_n$ les colonnes de $AP$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de ${}^tPAP$ est

$${}^tC_i(AP)_j = {}^tC_i AC_j = \Phi_A(C_i, C_j) = \delta_{i,j},$$

qui est également le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de la matrice $I_n$. Donc ${}^tPAP = I_n$.

**3.** $\Phi_A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$,

$$\begin{aligned}\Phi_A(f(X), Y) &= {}^t(f(X))AY = {}^t(A^{-1}BX)AY = {}^tX{}^tB{}^tA^{-1}AY = {}^tXBA^{-1}AY = {}^tXBY = {}^tXAA^{-1}BY \\ &= \Phi_A(X, f(Y)).\end{aligned}$$

Donc $\Phi_A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, symétrique pour le produit scalaire $\Phi_A$.

La matrice de $f$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est bien sûr $A^{-1}B$.

**Remarque.** La matrice $A^{-1}B$ n'est pas nécessairement symétrique.

**4.** Puisque $\Phi_A$ est symétrique pour le produit scalaire $\Phi_A$, d'après le théorème spectral, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, orthonormée pour le produit scalaire $\Phi_A$, dans laquelle la matrice de $f$ est une matrice diagonale $D$.
Soit $P$ la matrice carrée dont les colonnes sont les vecteurs de cette base orthonormale. $P$ est donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$. D'après la question 2., ${}^tPAP = I_n$ ou encore $A = {}^tQQ$ où $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$. Maintenant, les formules de changement de bases fournissent $D = P^{-1}A^{-1}BP = QQ^{-1}{}^tQ^{-1}BQ^{-1} = {}^tQ^{-1}BQ^{-1}$ et donc $B = {}^tQBQ$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}),\ \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) /\ A = {}^tQQ \text{ et } B = {}^tQDQ.}$$

Les coefficients diagonaux de $D$ sont les valeurs propres de $A^{-1}B$ qui en particulier sont des réels.

**5. (a)** Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$.
Soient $\lambda$ une valeur propre de $A^{-1}B$ et $X$ un vecteur propre associé. Alors, $A^{-1}BX = \lambda X$ puis $BX = \lambda AX$ puis ${}^tXBX = \lambda{}^tXAX$. Maintenant, $X$ est non nul et donc on en déduit déjà que ${}^tXAX > 0$ et ${}^tXBX > 0$ puis $\lambda = \dfrac{{}^tXBX}{{}^tXAX} > 0$. D'autre part,

 

$$\lambda = \frac{\Phi_B(X)}{\Phi_A(X)} = \Phi_B\left(\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}}\right).$$

Maintenant, $\Phi_A\left(\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}}\right) = \frac{\Phi_A(X)}{\Phi_A(X)} = 1$ et donc $\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}} \in \mathcal{E}_A$. Mais alors $\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}} \in \mathcal{E}_B$ ou encore $\lambda = \Phi_B\left(\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}}\right) \leqslant 1$.

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ \mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B \Rightarrow \mathrm{Sp}(A^{-1}B) \subset ]0,1].}$$

**(b)** Si de plus $\mathcal{E}_B \subset \mathcal{E}_A$, les valeurs propres de $B^{-1}A = (A^{-1}B)^{-1}$ sont inférieures ou égales à $1$ (et strictement positives). Puisque ces valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de $A^{-1}B$, les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont aussi supérieurs ou égales à $1$ et finalement, les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont égales à $1$. On en déduit que $A^{-1}B$ est semblable à $I_n$ et donc égale à $I_n$ puis que $A = B$.

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ \mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B \Leftrightarrow A = B.}$$

### III.2 Convexité

**1.** Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux parties convexes de $E$. Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \varnothing$, alors $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est convexe. Sinon, soient $(u_1, u_2) \in (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^2$ et $t \in [0,1]$.
$u_1$ et $u_2$ sont dans $\mathcal{C}_1$ et donc $tu_1 + (1-t)u_2$ est dans $\mathcal{C}_1$. De même, $tu_1 + (1-t)u_2$ est dans $\mathcal{C}_2$ et finalement $tu_1 + (1-t)u_2$ est dans $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Dans tous les cas, on a montré que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est convexe.

**2. (a)** L'application $\varphi$ est continue sur le compact $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc $\varphi$ admet un minimum et un maximum sur $\mathcal{C}$. Supposons que le minimum de $\varphi$ soit atteint en deux points distincts $u_1$ et $u_2$ de $\mathcal{C}$. Alors, $\varphi\left(\frac{1}{2}(u_1+u_2)\right) < \frac{1}{2}\varphi(u_1) + \frac{1}{2}\varphi(u_2) = \varphi(u_1)$ ce qui contredit le fait que $\varphi(u_1)$ est le minimum de $\varphi$. Donc $\varphi$ atteint son minimum en un unique point de $\mathcal{C}$.

**(b)** On a déjà dit que $\varphi$ admet un maximum.

On note $D$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. L'application $\varphi\ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$ est strictement convexe sur $D$ (d'après l'inégalité triangulaire) et $D$ est un compact convexe de $\mathbb{R}^2$. De plus, $\varphi$ atteint son maximum en tout point du bord de $D$ et donc en une infinité de points. Il est donc possible qu'une application strictement convexe sur un convexe compact atteigne son maximum en un nombre infini de points.

### III.3 Volume d'un ellipsoïde

**1.** Déterminons $k_2$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique de sorte que la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est orthormée. Soit $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. On considère l'ellipse $(e)$ d'équation ${}^tXAX = 1$. On sait que le théorème spectral permet de réduire la forme quadratique $X \mapsto {}^tXAX$ en base orthonormée et plus précisément qu'il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle $(e)$ a pour équation $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$ où $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les valeurs propres de $A$.
Maintenant, on sait que « l'aire d'une ellipse » est $\pi ab$ où $a$ et $b$ sont le demi petit axe et le demi grand axe de cette ellipse. Comme $a$ et $b$ sont $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, l'aire de l'ellipse est encore $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}$. Donc $k_2 = \pi$.

De même en dimension 3, le volume de l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en base orthonormée est $\frac{4\pi}{3}abc$ et donc $k_3 = \frac{4\pi}{3}$.

$$\boxed{k_2 = \pi \text{ et } k_3 = \frac{4\pi}{3}.}$$

**2.** Soient $A$ et $B$ deux élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$. D'après la question III.1.3., les valeurs propres de la matrice $A^{-1}B$ sont réelles et d'après la question III.1.5.(b), ces valeurs propres sont des réels strictement positifs et inférieurs à $1$. Le déterminant de $A^{-1}B$ qui est le produit de ces valeurs propres est donc inférieur à $1$ puis, comme $\det(A) > 0$ et $\det(B) > 0$

 

$$\det(A^{-1}B) \leqslant 1 \Rightarrow \frac{\det(B)}{\det(A)} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\det(B)}} \Rightarrow \nu(A) \leqslant \nu(B).$$

**3.** L'application $d\ :\ A \mapsto \det(A)$ est continue sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et l'application $r\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc, par composition, l'application $\nu = r \circ d$ est continue sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**4. (a)** Soit $t \in ]0, 1[$. Pour $\lambda \in ]0, +\infty[$, posons $\psi(\lambda) = \ln(t + (1-t)\lambda) - (1-t)\ln\lambda$. Pour tout $\lambda > 0$, on a $t + (1-t)\lambda > 0$ et donc $\psi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et de plus, pour $\lambda > 0$,

$$\psi'(\lambda) = \frac{1-t}{t + (1-t)\lambda} - \frac{1-t}{\lambda} = \frac{t(1-t)(\lambda - 1)}{t + (1-t)\lambda}.$$

La fonction $\psi'$ est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$. Donc la fonction $\psi$ admet un minimum local strict en $1$ et ce minimum est $\psi(1) = \ln(t + 1 - t) - (1-t)\ln(1) = 0$. Donc la fonction $\psi$ est strictement positive sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ et s'annule en $0$ ou encore $\forall \lambda \in ]0, +\infty[$, $\ln(t + (1-t)\lambda) \geqslant (1-t)\lambda$ avec égalité si et seulement si $\lambda = 1$.

**Remarque.** On sait que la fonction ln est strictement concave sur $]0, +\infty[$.

**(b)** De même, la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in [0, 1]$, $e^{ta + (1-t)b} \leqslant te^a + (1-t)e^b$.

**(c) i.** Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $t \in [0, 1]$. Tout d'abord, on sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en particulier que $tA + (1-t)B$ est une matrice symétrique réelle. Ensuite, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tX(tA + (1-t)B)X = t\,{}^tXAX + (1-t)\,{}^tXBX \geqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $t\,{}^tXAX = (1-t)\,{}^tXBX = 0$. Comme $t$ et $1-t$ ne sont pas tous deux nuls, ceci impose ${}^tXAX = 0$ ou ${}^tXBX = 0$ et donc $X = 0$. Par suite, $tA + (1-t)B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est un convexe de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

**ii.** Soient $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ et $t \in ]0, 1[$. Avec les notations de la question III.1.4. et en posant $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on a $\det(A) = \det({}^tQQ) = (\det(Q))^2$ puis $\det(B) = \det({}^tQDQ) = (\det(Q))^2\det(D) = (\det(Q))^2 \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et enfin

$$\det(tA + (1-t)B) = \det({}^tQ(tI_n + (1-t)D)Q) = (\det(Q))^2\det(tI_n + (1-t)D) = (\det(Q))^2 \prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i).$$

**iii.** On suppose de plus $A \neq B$. Par suite, $D \neq I_n$ et donc l'un au moins des $\lambda_i$ n'est pas égal à $1$.
D'après la question 4.(a), pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $\ln(t + (1-t)\lambda_i) \geqslant (1-t)\ln\lambda_i$, l'une au moins de ces inégalités étant stricte.

En additionnant ces inégalités, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(t + (1-t)\lambda_i) > (1-t)\sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i$ puis $-\dfrac{1}{2}\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i)\right) < -\dfrac{1}{2}(1-t)\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$. En prenant l'exponentielle des deux membres et en utilisant la question 4.(b), on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i)}} &= \exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i)\right)\right) \\
&< \exp\left(-\frac{1}{2}(1-t)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\right) = \exp\left(t \times 0 + (1-t)\left(-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\right) \\
&\leqslant t\exp(0) + (1-t)\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\right) = t + (1-t)\frac{1}{\sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}}
\end{aligned}$$

 

En résumé, $\dfrac{1}{\sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t+(1-t)\lambda_i)}} < t+(1-t)\dfrac{1}{\sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}}$. On multiplie alors les deux membres de cette inégalité par le réel strictement positif $\dfrac{1}{\text{det}Q}$ et on obtient $\dfrac{1}{\sqrt{(\text{det}Q)^2\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t+(1-t)\lambda_i)}} < \dfrac{t}{\sqrt{(\text{det}Q)^2}} + (1-t)\dfrac{1}{\sqrt{(\text{det}Q)^2\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}}$ ou encore $\dfrac{1}{\sqrt{\text{det}(tA+(1-t)B)}} < \dfrac{t}{\sqrt{\text{det}A}} + \dfrac{1-t}{\sqrt{\text{det}B}}$ ou enfin $\nu(tA+(1-t)B) < t\nu(A)+(1-t)\nu(B)$. On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } \nu \text{ est strictement convexe sur } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

**5.** Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{E}_A &\Leftrightarrow {}^tXAX \leqslant 1 \Leftrightarrow {}^t(M^{-1}MX)A(M^{-1}MX) \leqslant 1 \Leftrightarrow {}^t(MX)({}^tM^{-1}AM^{-1})(MX) \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow MX \in \mathcal{E}_B \text{ où } B = {}^tM^{-1}AM^{-1}. \end{aligned}$$

Maintenant, B est symétrique réelle car ${}^tB = {}^tM^{-1}{}^tA{}^t({}^tM^{-1}) = {}^tM^{-1}AM^{-1} = B$. De plus, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXBX = {}^tX{}^tM^{-1}AM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)A(M^{-1}X) \geqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $M^{-1}X = 0$ ou encore $X = 0$. Donc B est un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{E}_B = M(\mathcal{E}_A)$. D'après la question III.1.5.(b), B est unique.

Notons $V(\mathcal{E})$ le volume d'un ellipsoïde $\mathcal{E}$. Alors,

$$V(\mathcal{E}_B) = \frac{k_n}{\sqrt{\text{det}(B)}} = \frac{k_n}{\sqrt{(\text{det}(M^{-1}))^2\text{det}(A)}} = \text{det}(M)\frac{k_n}{\sqrt{\text{det}(A)}} = \text{det}(M)V(\mathcal{E}_A).$$

### III.4 Inclusion dans un ellipsoïde

**1. (a)** On note $N_A$ la norme associée au produit scalaire $\Phi_A$. Soient $(X,Y) \in (\mathcal{E}_A)^2$ et $t \in [0,1]$.

$$\sqrt{{}^t(tX+(1-t)Y)A(tX+(1-t)Y)} = N_A(tX+(1-t)Y) \leqslant tN_A(X)+(1-t)N_A(Y) \leqslant t+1-t = 1$$

et donc ${}^t(tX+(1-t)Y)A(tX+(1-t)Y) \leqslant 1$ ou encore $tX+(1-t)Y \in \mathcal{E}_A$.

**(b)** Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \mathcal{E}_A \Rightarrow {}^tXAX \leqslant 1 \Rightarrow {}^t(-X)A(-X) \leqslant 1 \Rightarrow -X \in \mathcal{E}_A$.

**(c)** Soit $X \in B(0,\varepsilon)$. $X_0+X$ est dans $B(X_0,\varepsilon)$ et donc dans $\mathcal{E}_A$. De même, $-X$ est dans $B(0,\varepsilon)$ et donc $X_0-X$ est dans $\mathcal{E}_A$. D'après la question précédente, $-X_0+X$ est aussi dans $\mathcal{E}_A$. Enfin, puisque $\mathcal{E}_A$ est convexe, $\dfrac{1}{2}(X_0+X)+\dfrac{1}{2}(-X_0+X) = X$ est dans $\mathcal{E}_A$. Finalement,

$$\boxed{B(0,\varepsilon) \subset \mathcal{E}_A.}$$

**(d)** Soient $\lambda$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Alors $X_0 = \dfrac{\varepsilon X}{\|X\|}$ est dans $B(0,\varepsilon)$ et donc dans $\mathcal{E}_A$. On en déduit que $N_A(X_0)^2 \leqslant 1$. Maintenant,

$$N_A(X_0)^2 = {}^t\left(\frac{\varepsilon X}{\|X\|}\right)A\left(\frac{\varepsilon X}{\|X\|}\right) = \frac{\varepsilon^2}{\|X\|^2}{}^tXAX = \frac{\varepsilon^2}{\|X\|^2}{}^tX(\lambda X) = \lambda\varepsilon^2.$$

Par suite, $\lambda\varepsilon^2 \leqslant 1$ et donc $\lambda \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

**(e)** Soit $\lambda$ la plus grande valeur propre de A. Puisque les valeurs propres de A sont positives, $\lambda^2$ est la plus grande valeur propre de $A^2$.

Puisque $A^2$ est une matrice symétrique, on sait que $\displaystyle\sup_{X\neq 0}\frac{{}^tXA^2X}{{}^tXX} = \lambda^2$. Maintenant, $\displaystyle\sup_{X\neq 0}\frac{{}^tXA^2X}{{}^tXX} = \sup_{X\neq 0}\frac{{}^t(AX)AX}{{}^tXX} = \sup_{X\neq 0}\frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} = |||A|||^2$. Donc, $|||A||| = \lambda \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

**2.** K est un compact de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc est une partie bornée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par suite, il existe un réel $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$. Maintenant, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

 

$$X \in B(0,R) \Leftrightarrow {}^tXX \leqslant R^2 \Leftrightarrow {}^tX\frac{1}{R^2}I_nX \leqslant 1 \Leftrightarrow X \in \mathcal{E}_{\frac{1}{R^2}I_n} \text{ avec } \frac{1}{R^2}I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Par suite, il existe au moins un ellipsoïde $\mathcal{E}$ contenant $K$.

**3. (a)** Soit $A \in \mathcal{M}$. Alors $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc les valeurs propres de $A$ sont des réels positifs. De plus, $\det(A) \geqslant \det(A_0) > 0$ et donc les valeurs propres de $A$ sont des réels strictement positifs. Par suite, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a montré que $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**(b)** Soit $A \in \mathcal{M}$. Pour $X \in K$, on a $0 \leqslant {}^tXAX \leqslant 1$ et donc $X \in \mathcal{E}_A$. Par suite, $A$ est un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $K \subset \mathcal{E}_A$. La question III.4.1.(d) permet d'affirmer que $|||A||| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}$. Ainsi, $\forall A \in \mathcal{M}$, $|||A||| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}$ et donc $\mathcal{M}$ est une partie bornée de $\mathcal{M}$.

**(c)** • Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices symétriques positives. On pose $A = \lim\limits_{p\to+\infty} A_p$. Déjà $A$ est symétrique car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Ensuite, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXA_pX \geqslant 0$ et par passage à la limite quand $p$ tend vers $+\infty$, on obtient $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$. Donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Finalement, toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $F_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/ \det(A) \geqslant \det(A_0)\}$. Alors $F_1 = \det^{-1}([\det(A_0), +\infty[)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.

• Soit $F_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/ \forall X \in K,\ 0 \leqslant {}^tXAX \leqslant 1\}$. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $F_2$. Alors $\forall X \in K$, $0 \leqslant {}^tXA_pX \leqslant 1$. On pose $A = \lim\limits_{p\to+\infty} A_p$. Par passage à la limite quand $p$ tend vers $+\infty$, on obtient $0 \leqslant {}^tXAX \leqslant 1$. $F_2$ est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Mais alors $\mathcal{M} = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap F_1 \cap F_2$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**(d)** D'après la question III.4.1.(a), $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})/ \nu(A) \leqslant \nu(A_0) \text{ et } \forall X \in K,\ 0 \leqslant {}^tXAX \leqslant 1\}$. Soient $(A_1, A_2) \in \mathcal{M}$ et $t \in [0,1]$.

• D'après la question III.3.4.(c).i, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe et donc $tA_1 + (1-t)A_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

• D'après la question III.3.4.(c).iii, la fonction $\nu$ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc $\nu(tA_1 + (1-t)A_2) \leqslant t\nu(A_1) + (1-t)\nu(A_2) \leqslant t\nu(A_0) + (1-t)\nu(A_0) = \nu(A_0)$.

• Pour $X \in K$, ${}^tX(tA_1 + (1-t)A_2)X = t{}^tXA_AX + (1-t){}^tXA_2X$ et donc $0 \leqslant {}^tX(tA_1 + (1-t)A_2)X \leqslant t + 1 - t = 1$.

Ainsi, $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}^2$, $\forall t \in [0,1]$, $tA_1 + (1-t)A_2 \in \mathcal{M}$ et donc $\mathcal{M}$ est convexe.

**4.** $\mathcal{M}$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. D'autre part, $\mathcal{M}$ est convexe et la fonction $\nu$ est strictement convexe sur $\mathcal{M}$. D'après la question III.2.(a), la fonction $\nu$ admet un minimum, atteint en un unique point de $\mathcal{M}$. Soit $A$ l'élément de $\mathcal{M}$ en lequel ce minimum est atteint.
Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. $K \subset \mathcal{E}_B \Leftrightarrow \forall X \in K,\ X \in \mathcal{E}_B \Leftrightarrow \forall X \in K,\ 0 \leqslant {}^tXBX \leqslant 1$. En particulier, $\mathcal{E}_A$ est un ellipsoïde contenant $K$.
**1er cas.** Si $0 < \det(B) < \det(A_0)$, alors $V(\mathcal{E}_B) = \dfrac{k_n}{\sqrt{\det(B)}} > \dfrac{k_n}{\sqrt{\det(A_0)}} \geqslant \dfrac{k_n}{\sqrt{\det(A)}} = V(\mathcal{E}_A)$.

**2ème cas.** Si $\det(A_0) \leqslant \det(B)$, alors $V(\mathcal{E}_B) = k_n\nu(B) \geqslant k_n\nu(A) = V(\mathcal{E}_A)$ avec égalité si et seulement si $B = A$.

En résumé, il existe un ellipsoïde de volume minimum contenant $K$ et cet ellipsoïde est unique.

**5. (a)** $\overset{\circ}{K} = \varnothing$.

**(b)** On munit $\mathbb{R}^2$ de son repère canonique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ellipse $\mathcal{E}_n$ d'équation $\dfrac{x^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1$ contient $K$. Son aire est $\dfrac{\pi}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Or $\operatorname{Inf}_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\pi}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Par suite, s'il existe une ellipse d'aire minimale contenant $K$, son aire est nulle ce qui est impossible. Donc il n'existe pas d'ellipse d'aire minimale contenant $K$.

 