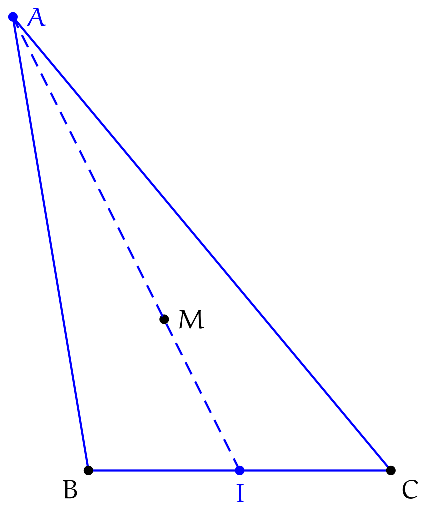
SESSION 2011

# CAPES EXTERNE

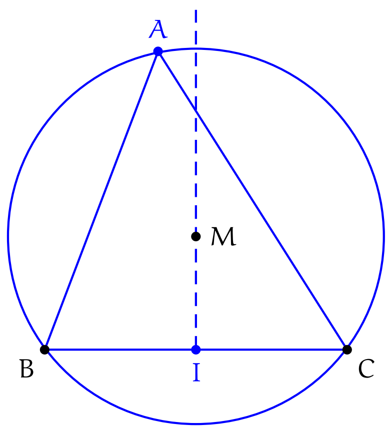
MATHÉMATIQUES 1

## Problème 1 : construction de triangles

**1.** On note I le milieu de [BC]. On sait que A est nécessairement l'image de M par l'homothétie de centre I et de rapport 3 ou encore A est nécessairement le point tel que $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IM}$. Réciproquement, soit A ainsi défini. A n'est pas sur la droite (BC) car sinon $M = I + \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ est sur (BC) ce qui n'est pas.
Ensuite, d'après le théorème du barycentre partiel, $M = \mathrm{bar}(A(1), I(2)) = \mathrm{bar}(A(1), B(1), C(1))$ et donc le point A convient. Il existe donc un point A et un seul tel que M est le centre de gravité du triangle ABC.




**2.** Si M n'est pas sur la médiatrice de [BC], le problème n'a pas de solution. Supposons dorénavant que le point M soit un point de la médiatrice de [BC] et distinct de I. Le cercle de centre M et de rayon MB passe par C. Le point A est nécessairement sur ce cercle et réciproquement tout point A de ce cercle, distinct de B et C convient. Ainsi, si M est sur la médiatrice de [BC], le problème a une infinité de solutions.



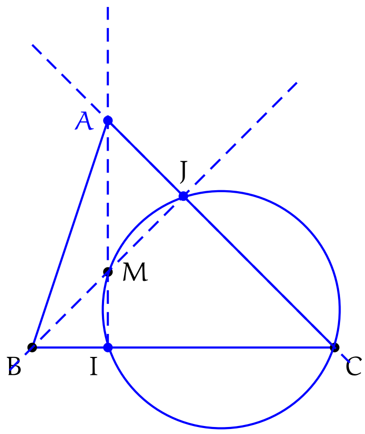

**3. 1er cas.** Si le triangle MBC est rectangle en M, le point M est l'orthocentre du triangle MBC ce qui assure l'existence d'un point A à savoir A = M. Réciproquement, si le point M est l'orthocentre du triangle ABC, on a nécessairement $(MC)\perp(AB)$ et donc $(AC)//(MC)$. Le point A est donc nécessairement sur la droite (MC). De même, le point A est nécessairement sur la droite (MB) et finalement A = M puisque les droites (MB) et (MC) sont sécantes en M. Ceci assure l'unicité du point A.

**2ème cas.** On suppose dorénavant que le triangle MBC n'est pas rectangle en M. Notons I, J et K les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C si un triangle ABC solution existe. Le point I est donc nécessairement le projeté orthogonal du point M sur la droite (BC).

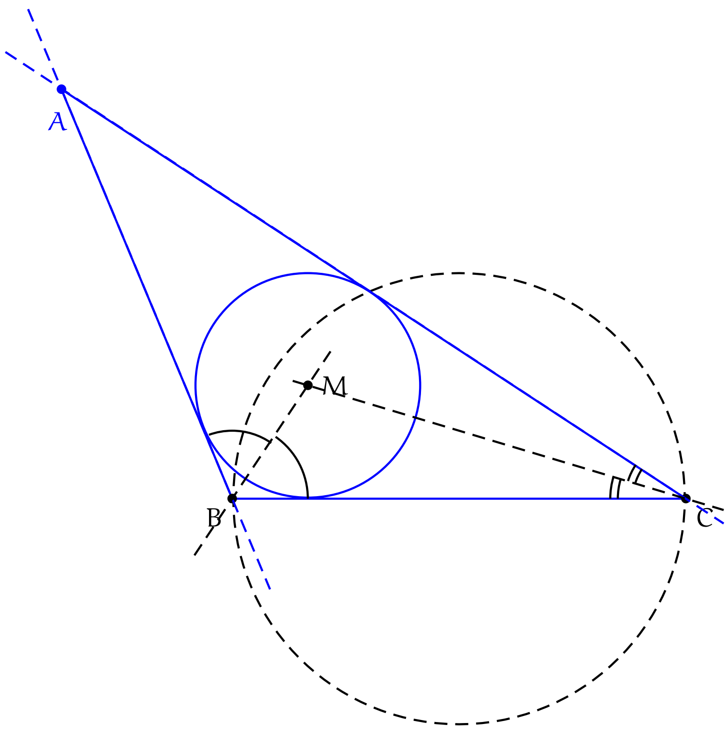
 

Si $M$ est l'orthocentre du triangle $ABC$, puisque le triangle $MBC$ n'est pas rectangle en $M$, le point $M$ ne peut être le point $J$. Puisque la droite $(MJ) = (BJ)$ est perpendiculaire à la droite $(AC) = (JC)$, le point $J$ est nécessairement sur le cercle de diamètre $[MC]$ et aussi sur la droite $(BM)$. Le point $J$ est donc nécessairement le point d'intersection distinct de $M$ du cercle de diamètre $[MC]$ et de la droite $(MB)$. Ceci assure l'unicité d'un point $J$ tel que $(BM)\perp(CJ)$. Réciproquement, le cercle de diamètre $[MC]$ et la droite $(MB)$ ont le point $M$ en commun. S'ils n'ont que le point $M$ en commun, la droite $(MB)$ est tangente en $M$ au cercle diamètre $[MC]$ et donc la droite $(MB)$ est perpendiculaire à la droite $(MC)$ ce qui n'est pas. Donc la droite $(MB)$ coupe le cercle de diamètre $[MC]$ et en un point $J$ distinct de $M$. Ce point d'intersection n'est pas le point $C$ car les points $M$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. Ainsi, le point $J$ est tel que $(BM)\perp(CJ)$. En résumé, il existe un point $J$ et un seul tel que $(BM)\perp(CJ)$.
Le point $A$ est nécessairement sur la droite $(MI)$ et sur la droite $(CJ)$. Si ces droites sont parallèles, la droite $(CJ)$ est perpendiculaire à la droite $(BC)$ et à la droite $(BJ)$. On en déduit que les droites $(BJ)$ et $(BC)$ sont parallèles puis confondes. En particulier, le point $M$ est sur la droite $(BC)$ ce qui n'est pas.
Donc les droites $(CJ)$ et $(MI)$ sont sécantes ce qui assure l'unicité du point $A$. Réciproquement, le point $A$ ainsi défini est tel que $(MA)\perp(BC)$ et $(MB)\perp(AC)$. Donc le point $M$ est l'orthocentre du triangle $ABC$. Ceci assure l'existence du point $A$.

Dans tous les cas, il existe un point $A$ et un seul tel que $M$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.




**4. Unicité.** On sait que $M$ doit être le point de concours des bissectrices du triangle $ABC$. Soient $(D_B)$ et $(D_C)$ les symétriques respectives de la droite $(BC)$ par rapport aux droites $(MB)$ et $(MC)$. Le point $A$ est nécessairement sur $(D_B)$ et $(D_C)$. Maintenant, ces deux droites ne sont pas confondues.
En effet, dans le cas contraire, puisque $B \in (D_B)$ et $C \in (D_C)$, on aurait $s_{(MB)}((BC)) = (D_B) = (BC)$ et donc $M \in (BC)$ ce qui n'est pas. Donc, $(D_B)$ et $(D_C)$ sont ou bien strictement parallèles, ou bien sécantes ce qui assure l'unicité du point $A$.




**Existence.** Puisque le point $M$ doit être le point de concours des bissectrices du triangle $ABC$, on doit avoir

$$0 < \widehat{CBM} + \widehat{BCM} = \frac{1}{2}\left(\widehat{CBA} + \widehat{BCA}\right) = 90° - \frac{\widehat{BAC}}{2} < 90°.$$

Cette condition équivaut à $90° < \widehat{BMC} < 180°$ ou encore $M$ est strictement à l'intérieur du cercle de diamètre $[BC]$. Si cette condition n'est pas réalisée, le problème n'a pas de solution. Supposons dorénavant que $M$ est strictement intérieur au cercle de diamètre $[BC]$.
Dans ce cas, les droites $(D_B)$ et $(D_C)$ sont sécantes en un point $A$ et le point $M$ est intérieur au triangle $ABC$. Puisque $M$ est le point de concours de deux des trois bissectrices du triangle $ABC$, $M$ est le centre du cercle inscrit au triangle $ABC$. Ceci assure l'existence de $A$ quand la condition « $M$ est strictement intérieur au cercle de diamètre $[BC]$ » est réalisée.

# Problème 2 : autour du théorème des valeurs intermédiaires

**Partie I : préliminaires**

**1.** Soit $w$ une suite réelle décroissante, convergente de limite $\ell$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $w_{n_0} < \ell$. Puisque la suite $w$ est décroissante, pour $n \geqslant n_0$ on a $w_n \leqslant w_{n_0} < \ell$. Par passage à la limite quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $\ell \leqslant w_{n_0} < \ell$ ce qui est impossible. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant \ell$.

**2. Théorème des suites adjacentes**

**2.1** La suite $u$ est croissante et donc la suite $-u$ est décroissante puis la suite $v - u$ est décroissante en tant que somme de deux suites décroissantes.

**2.2** La suite $v - u$ est décroissante et converge vers $0$. Donc d'après la question 1, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$.

**2.3** Pour tout entier $n$, $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$. Donc la suite $v$ est décroissante et minorée par $u_0$. On en déduit que la suite $v$ converge. De même, la suite $u$ est croissante et majorée par $v_0$ et donc converge.

**2.4** Puisque les suites $u$ et $v$ convergent, on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

**3. Suite et application continue**

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f$ est continue en $\ell$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in X$, $(|x - \ell| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon)$. Puisque la suite $u$ converge vers $\ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \alpha$.
Pour $n \geqslant n_0$, $u_n$ est un élément de $X$ tel que $|u_n - \ell| < \alpha$ et donc tel que $|f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon)$$

et donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

**Partie II : propriété des valeurs intermédiaires**

**1. Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires**

**1.1** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant a_n \leqslant b$ et $a \leqslant b_n \leqslant b$.
• Puisque $a_0 = a$ et $b_0 = b$, ces encadrements sont vrais quand $n = 0$.
Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $a \leqslant a_n \leqslant b$ et $a \leqslant b_n \leqslant b$.
Alors, $a = \dfrac{a + a}{2} \leqslant \dfrac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1} \leqslant \dfrac{b + b}{2} = b$. Donc, si $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ ou si $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $a_{n+1} = a_n$, on a $a \leqslant a_{n+1} \leqslant b$ et $a \leqslant b_{n+1} \leqslant b$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [a, b]$ et $b_n \in [a, b]$.

**1.2** Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans le premier cas, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ et dans le deuxième cas, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

**1.3** Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. Il reste à vérifier que la suite $a$ est croissante et la suite $b$ est décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} - a_n = 0$ ou $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b - a}{2^{n+1}} \geqslant 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ et donc la suite $a$ est croissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $b_{n+1} - b_n = 0$ ou $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n = -\dfrac{b_n - a_n}{2} \leqslant 0$. Donc la suite $b$ est décroissante.

Finalement, les suites $a$ et $b$ sont adjacentes.

**1.4** Le résultat est immédiat si $\lambda = f(a)$ ($c = a$ convient) ou si $\lambda = b$ ($c = b$ convient). On suppose dorénavant $f(a) < \lambda < f(b)$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < \lambda$ et $f(b_n) \geqslant \lambda$.
• Puisque $f(a_0) = f(a) < \lambda < f(b) = f(b_0)$, l'encadrement est vrai quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $f(a_n) < \lambda$ et $f(b_n) \geqslant \lambda$.
Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda$, alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et donc $f(a_{n+1}) < \lambda$. Sinon, $a_{n+1} = a_n$ et donc $f(a_{n+1}) < \lambda$.

De même, si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$, alors $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et donc $f(b_{n+1}) \geqslant \lambda$. Sinon, $b_{n+1} = b_n$ et donc $f(b_{n+1}) \geqslant \lambda$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Puisque les suites $a$ et $b$ sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune que l'on note $c$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant a_n \leqslant c \leqslant b_n \leqslant b$. Puisque $f$ est continue sur $[a, b]$, les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers $f(c)$.
Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(a_n) < \lambda \leqslant f(b_n)$. Quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $f(c) \leqslant \lambda \leqslant f(c)$ et donc $f(c) = \lambda$. Ainsi, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

**2. Application 1 : un théorème de point fixe**

Pour $x \in [a, b]$, posons $g(x) = f(x) - x$. $g$ est continue sur $[a, b]$ et de plus $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ (car $f(a) \in [a, b]$) et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$ ou encore tel que $f(c) = c$.

**3. Application 2 : première formule de la moyenne**

$g$ est continue et positive sur $[a, b]$ et donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $g$ est nulle.

Si $g$ est nulle, $c = a$ convient. Sinon, $g$ est non nulle et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$. $f$ est continue sur le segment $[a, b]$ et donc admet un minimum $m$ et un maximum $M$ sur ce segment. Pour tout réel $x$ de $[a, b]$, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$ puis $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$ puisque $g$ est positive sur $[a, b]$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle m\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$ et donc, puisque $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$,

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Puisque $m$ et $M$ sont des valeurs prises par la fonction $f$, continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx} = f(c)$ et donc tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.

**4. Application 3**

**4.1** Le résultat est immédiat si $n = 1$ car $c_1 = 0$ convient. On suppose dorénavant $n \geqslant 2$.
Puisque $f$ est continue sur $[0, 1]$, la fonction $f_n$ définie dans l'énoncé est continue sur $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$. Ensuite,

$$0 = f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right).$$

Si l'un des termes de la somme précédente est nulle, alors il existe $c_n \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que $f_n(c_n) = 0$. Sinon, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_n\left(\dfrac{k}{n}\right) \neq 0$ et puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, les $f_n\left(\dfrac{k}{n}\right)$ ne peuvent être tous de même signe. Dans ce cas, la fonction $f_n$ prend au moins une valeur strictement négative et une valeur strictement positive sur $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$. Etant de plus continue sur cet intervalle, la fonction $f_n$ s'annule au moins une fois sur cet intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
Dans tous les cas, il existe $c_n \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que $f_n(c_n) = 0$ ou encore tel que $f_n(c_n) = f_n\left(c_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

**4.2** Soit $\alpha \in ]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$. Avec la fonction $f$ de l'énoncé, on a $f(0) = f(1) = 1$. De plus, $f$ est continue sur $[0, 1]$.
Maintenant, pour $x \in [0, 1 - \alpha]$,

$$f(x + \alpha) - f(x) = (-x - \alpha + x)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right] = \alpha\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)\right].$$

Maintenant, $\dfrac{1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}$ et donc $\cos\left(\dfrac{2\pi}{\alpha}\right) \neq 1$ puis $\alpha\left[1 - \cos\left(\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)\right] \neq 0$. Ainsi, $f$ est un exemple de fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et $\forall x \in [0, 1 - \alpha]$, $f(x + \alpha) \neq f(x)$.

**Partie III : réciproque du théorème des valeurs intermédiaires**

**1. Un exemple**

La suite $\left(\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ puis la suite $\left(f\left(\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $1$ qui n'est pas $f(0)$. Le théorème de la question 3 de la partie I montre que $f$ ne peut être continue en $0$.

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a<b$. Si $0\notin[a,b]$, $f$ est continue sur $5a,b]$ et vérifie donc la propriété $\mathcal{P}$. Supposons maintenant que $0\in[a,b]$. Vérifions que $f([a,b])=[-1,1]$. Puisque la fonction $f$ est impaire, on supposera sans perte de généralité que $a\leqslant 0<b$.

Soient $\alpha\in[-1,1]$ puis $\theta=\text{Arcsin}\,\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. La suite $\left(\dfrac{1}{\theta+2n\pi}\right)_{n\geqslant 1}$ est strictement positive et tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Il existe donc $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $a\leqslant 0<\dfrac{1}{\theta+2n_0\pi}\leqslant b$. Soit $x=\dfrac{1}{\theta+2n_0\pi}$. Alors $x\in[a,b]$ et $f(x)=\sin(\theta+2n_0\pi)=\sin(\theta)=\sin(\text{Arcsin}\,\alpha)=\alpha$.

En résumé, $\forall\alpha\in[-1,1]$, $\exists x\in[a,b]/\ f(x)=\alpha$. En particulier, puisque $-1\leqslant f(a)\leqslant 1$ et $-1\leqslant f(b)\leqslant 1$, pour tout réel $\lambda$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$. Donc, $f$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ bien que n'étant pas continue en $0$.

**2. Une classe de fonctions qui vérifient $\mathcal{P}$ : un théorème de Darboux**

**2.1** $f$ est continue sur le segment $[a,b]$ et il en est de même de la fonction $g$. Par suite, $g$ admet un minimum sur $[a,b]$ ou encore il existe $c\in[a,b]$ tel que $g(c)=\inf\limits_{x\in[a,b]}g(x)$.

**2.2** Si $c=a$, alors pour tout réel $x$ de $]a,b]$, $f(x)-\lambda x=g(x)\geqslant g(a)=f(a)-\lambda a$ puis $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant\lambda$. Quand $x$ tend vers $a$, on obtient $f'(a)\geqslant\lambda$ ce qui n'est pas. Donc $c\neq a$.

De même, si $c=a$, alors pour tout réel $x$ de $[a,b[$, $f(x)-\lambda x\geqslant f(b)-\lambda b$ puis $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}\leqslant\lambda$ puis $f'(b)\leqslant\lambda$ ce qui n'est pas. Donc $c\neq b$.

**2.3** La fonction $g$ est dérivable sur $[a,b]$ et atteint son minimum en $c\in]a,b[$. On sait alors que $g'(c)=0$ ce qui fournit $f'(c)=\lambda$.

**2.4** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0\text{ si }x\neq 0\\ 1\text{ si }x=0\end{cases}$. $f$ prend les valeurs $0$ et $1$ mais ne prend aucune valeur dans $]0,1[$. Puisqu'une fonction dérivée vérifie la propriété $\mathcal{P}$, $f$ ne peut être la dérivée d'une certaine fonction $F$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

**3. Une condition pour qu'une fonction qui vérifie $\mathcal{P}$ soit continue**

On note tout d'abord que, puisque les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, la propriété $\mathcal{P}$ équivaut à la propriété « l'image d'un intervalle par $f$ est un intervalle ».

Soient $x_0\in I$ et $\varepsilon>0$. Soient $F=f^{-1}(\{f(x_0)-\varepsilon\})$ et $F'=f^{-1}(\{f(x_0)+\varepsilon\})$. Par hypothèse, $F$ et $F'$ sont deux fermés de $I$ et ces deux fermés ne contiennent pas $x_0$. Donc $x_0$ est dans $U=(I\setminus F)\cap(I\setminus F')$. Puisque $F$ et $F'$ sont deux fermés de I, $I\setminus F$ et $I\setminus F'$ sont deux ouverts de I et il en est de même de $U$. Par suite, il existe un réel $\alpha>0$ tel que $I\cap]x_0-\alpha,x_0+\alpha[\subset U$. $I\cap]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ est un intervalle non vide contenant $x_0$ et puisque $f$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, $f(I\cap]x_0-\alpha,x_0+\alpha[)$ est un intervalle. Maintenant, $f(I\cap]x_0-\alpha,x_0+\alpha[)$ contient $f(x_0)$ et ne contient pas $f(x_0)-\varepsilon$ et $f(x_0)+\varepsilon$. Par suite, $f(I\cap]x_0-\alpha,x_0+\alpha[)/\mathrm{subset}]f(x_0-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon[$.

On a montré que $\forall x_0\in I$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\alpha>0/\ (\forall x\in I)$, $(|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$ et donc $f$ est continue sur I

# Problème 3 : quelques propriétés des polynômes de Laguerre

**Partie I : étude de la famille $(L_n)$**

**1.** Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $h_n$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $h_n$ est $n$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc $L_n$ est bien défini.

**2.** Pour tout réel $x$, $h_0(x)=e^{-x}$ puis $L_0(x)=e^xe^{-x}=1$.
Pour tout réel $x$, $h_1(x)=xe^{-x}$ puis $h_1'(x)=-xe^{-x}+e^{-x}$ puis $L_1(x)=e^x(-xe^{-x}+e^{-x})=-x+1$.
D'après la formule de Leibniz, pour tout réel $x$, $h_2''(x)=x^2e^{-x}-4xe^{-x}+2e^{-x}$ et donc $L_2(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$.

**3. Programme en Maple.**

```
restart ; P :=(n,x)-> if n=0 then 1 else exp(x)/n !*diff(x)^n*exp(-x),x$n end if ;
    P ;
    P(n,x) ;
    poly :=proc(n)
    local i :
    for i from 1 to n do
    L[i](x)=sort(expand(P(i,x)),x) ;
    end do ;
    end proc ;
```

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(n-k)}(e^{-x})^{(k)} = \frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}x^k(-1)^k e^{-x} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}X^k.}$$

En particulier, $L_n$ est un polynôme de degré $n$.

**5.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

**5.1** Pour tout réel $x$, $h_n^{(n)}(x) = n!e^{-x}L_n(x)$ puis $h_n^{(n+1)}(x) = n!(-L_n(x) + L_n'(x))e^{-x}$.

**5.2** Pour tout réel $x$, $h_{n+1}(x) = xh_n(x)$.

**5.3** Pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= \frac{e^x}{(n+1)!}h_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(n+1)!}(xh_n)^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(n+1)!}(xh_n^{(n+1)}(x) + (n+1)h_n^{(n)}(x)) \\ &= \frac{e^x}{(n+1)!}(xn!e^{-x}(-L_n(x) + L_n'(x)) + (n+1)n!e^{-x}L_n(x)) = \frac{x}{n+1}(-L_n(x) + L_n'(x)) + L_n(x) \\ &= \frac{x}{n+1}L_n'(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} = \frac{X}{n+1}L_n' + \left(1 - \frac{X}{n+1}\right)L_n.}$$

**6.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $x$,

$$(h_{n+1}^{(n+1)})'(x) = (n+1)!(e^{-x}L_{n+1})'(x) = (n+1)!(-L_{n+1}(x) + L_{n+1}'(x))e^{-x}.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} (h_{n+1}^{(n+1)})'(x) &= (h_{n+1}')^{(n+1)}(x) = (-x^{n+1}e^{-x} + (n+1)x^ne^{-x})^{n+1}(x) = (-h_{n+1} + (n+1)h_n)^{(n+1)}(x) \\ &= -(n+1)!e^{-x}L_{n+1}(x) + (n+1) \times n!(-L_n(x) + L_n'(x))e^{-x}. \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient $-L_{n+1} + L_{n+1}' = -L_{n+1} - L_n + L_n'$ et donc $L_{n+1}' = L_n' - L_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1}' = L_n' - L_n.}$$

**7.** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions 5.3 et 6, on a $L_n' - L_n = L_{n+1}' = \dfrac{X}{n+1}L_n'' + \dfrac{1}{n+1}L_n' - \dfrac{1}{n+1}L_n + \left(1 - \dfrac{X}{n+1}\right)L_n'$ et donc $\dfrac{X}{n+1}L_n'' + \dfrac{1-X}{n+1}L_n' + \dfrac{n}{n+1}L_n = 0$ ou encore $XL_n'''' + (1-X)L_n' + nL_n = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ XL_n'' + (1-X)L_n' + nL_n = 0.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 5.3,

$$(n+1)L_{n+1} + (X-n-1)L_n = XL'_n \text{ et aussi } nL_n + (X-n)L_{n-1} = XL'_{n-1}.$$

On retranche membre à membre ces deux égalités et d'après la question 6, on obtient

$$(n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n - (X-n)L_{n-1} = X(L'_n - L'_{n-1}) = -XL_{n-1},$$

et donc $(n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + nL_{n-1} = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + nL_{n-1} = 0.}$$

**Partie II : application à un calcul de somme de coefficients binomiaux**

**1.** On a vu à la question 4. de la partie I que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}X^k.}$$

**2.**

**2.1** $f(x) \underset{x\to 0,\ x\neq 0}{=} x^{n+2}\sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) \underset{x\to 0,\ x\neq 0}{=} x^{n+2}O(1) \underset{x\to 0,\ x\neq 0}{=} o(x^{n+1})$ et en tenant compte de $f(0)=0$,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+1}).}$$

Maintenant, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = (n+2)x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) - (n+1)\cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right).$$

D'autre part, $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+1})$ et puisque $n+1 \geqslant 1$, on a en particulier, $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Ainsi, $f$ admet en $0$ un développement limité d'ordre $1$. On en déduit que $f$ est dérivable en $0$ puis que $f'(0)=0$.

Finalement, $f$ est dérivable que $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$, $f'(x) = \begin{cases} (n+2)x^{n+1}\sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) - (n+1)\cos\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Vérifions maintenant que $f'$ n'admet pas un développement limité d'ordre $0$ en $0$ ou encore, vérifions que $f'$ n'a pas de limite réelle en $0$.

Puisque $\left|(n+2)x^{n+1}\sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)\right| \leqslant (n+2)|x|^{n+1}$, on a $\lim\limits_{x\to 0}(n+2)x^{n+1}\sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0,\ x\neq 0} f'(x)$ existe si et seulement si la fonction $g\ :\ x \mapsto -(n+1)\cos\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$ a une limite réelle en $0$.

Les deux suites $u_p = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{2p\pi}}$ et $v_p = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{\dfrac{\pi}{2} + 2p\pi}}$ tendent vers $0$ quand $p$ tend vers $+\infty$. De plus,

$g(u_p) = -(n+1) \underset{p\to+\infty}{\to} -(n+1)$ et $g(v_p) = 0 \underset{p\to+\infty}{\to} 0 \neq -(n+1)$.
On en déduit que la fonction $g$ n'a pas de limite en $0$ puis que la fonction $f'$ n'a pas de limite réelle en $0$. Finalement, la fonction $f'$ n'admet pas un développement limité d'ordre $0$ en $0$.

**2.2** Si $f$ est $n$ fois dérivable en $0$, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(n-k)}$ est $k$ fois dérivable en $0$ et en particulier, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(n-k)}$ admet un développement limité d'ordre $k$ en $0$, son développement de TAYLOR-YOUNG. On note que la partie régulière du développement limité à l'ordre $k$ en $0$ de $f^{(n-k)}$ s'obtient en dérivant $n-k$ fois la partie régulière du développement limité à l'ordre $n$ en $0$ de la fonction $f$.

**3.**

**3.1** $h_n$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier, $h_n$ admet un développement limité à tout ordre en $0$. Ensuite,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \underset{x\to 0}{=} x^n\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{x^k}{k!} + o(x^N)\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{x^{k+n}}{k!} + o(x^{n+N}).$$

**3.2** En dérivant $n$ fois, on obtient

$$h_n^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{(n+k)!}{k!}\frac{x^k}{k!} + o(x^N).$$

**3.3** Ensuite,

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}h_n^{(n)}(x)\underset{x\to0}{=}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{(n+k)!}{k!}\frac{x^k}{k!}+o(x^N)\right)\underset{x\to0}{=}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{k!}+o(x^N)\right)$$
$$\underset{x\to0}{=}\sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n+k}{k}\frac{1}{(p-k)!}\right)x^p+o(x^N)\underset{x\to0}{=}\sum_{p=0}^{N}\left(\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n+k}{k}\binom{p}{k}\right)x^p+o(x^N).$$

**3.4** On impose de plus $N\geqslant n$. On a vu que $L_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p!}\binom{n}{p}X^p$. En particulier,

$$L_n(x)\underset{x\to0}{=}\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p!}\binom{n}{p}x^p+o(x^N)\text{ (car }N\geqslant n).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit que $\forall p\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n+k}{k}\binom{p}{k}=\frac{(-1)^p}{p!}\binom{n}{p}$ si $p\leqslant n$ et $\displaystyle\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n+k}{k}\binom{p}{k}=0$ si $p>n$. Finalement

$$\boxed{\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n+k}{k}\binom{p}{k}=\begin{cases}(-1)^p\dbinom{n}{p}\text{ si }p\leqslant n\\ 0\text{ si }p>n\end{cases}.}$$

**Partie III : étude des polynômes de Laguerre comme base orthonormée**

**1.** Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$. La fonction $x\mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, d'après un théorème de croissances comparées, $P(x)Q(x)e^{-x}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}P(x)Q(x)e^{-x}\,dx$ est absolument convergente et donc convergente puis que $\varphi(P,Q)$ existe dans $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $\varphi$ est bien définie sur $(\mathbb{R}[X])^2$.

**2.** • D'après la question précédente, $\varphi$ est une application de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$. $\varphi(P,Q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(x)Q(x)e^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}Q(x)P(x)e^{-x}\,dx=\varphi(Q,P)$. Donc $\varphi$ est symétrique.

• Soient $(P_1,P_2,Q)\in(\mathbb{R}[X])^3$ et $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$. Puisque les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}P_1(x)Q(x)e^{-x}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}P_2(x)Q(x)e^{-x}\,dx$ sont convergentes, on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\lambda_1P_1(x)Q(x)e^{-x}+\lambda_2P_2(x)Q(x)e^{-x})\,dx$ est convergente puis, par linéarité de l'intégrale

$$\lambda_1\varphi(P_1,Q)+\lambda_2\varphi(P_2,Q)=\lambda_1\int_0^{+\infty}P_1(x)Q(x)e^{-x}\,dx+\lambda_2\int_0^{+\infty}P_2(x)Q(x)e^{-x}\,dx$$
$$=\int_0^{+\infty}(\lambda_1P_1(x)+\lambda_2P_2(x))Q(x)e^{-x}\,dx=\varphi(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2,Q).$$

Donc $\varphi$ est linéaire par rapport à sa première variable puis, par symétrie, $\varphi$ est bilinéaire. En résumé, $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique sur $(\mathbb{R}[X])^2$.

• Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Par positivité de l'intégrale, $\varphi(P,P)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P^2(x)\,dx\geqslant0$. De plus,

$$\varphi(P,P)=0\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}P^2(x)e^{-x}\,dx=0\Leftrightarrow\forall x\in[0,+\infty[,\ P^2(x)e^{-x}=0\text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}$$
$$\Leftrightarrow\forall x\in[0,+\infty[,\ P(x)=0\Leftrightarrow P=0\text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}$$

Finalement, $\varphi$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur $\mathbb{R}[X]$ et donc $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

**3.** Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\varphi(L_0,X^n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $A>0$. Les deux fonctions $x\mapsto x^{n+1}$ et $x\mapsto e^{-x}$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^A x^{n+1}e^{-x}\,dx = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}\,dx = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}\,dx.$$

D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim_{A\to+\infty} A^{n+1}e^{-A} = 0$ et donc, quand $A$ tend vers $+\infty$, on obtient $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$ et donc, en tenant compte de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$, on en déduit par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $I_n = n!$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(L_0, X^n) = n!.}$$

**4. 4.1** Soit $n \in \mathbb{N}$. Le résultat est clair quand $n = 0$ avec $Q_0 = 1$. On suppose dorénavnt $n \geqslant 1$.

Montrons par récurrence finie que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\exists Q_k \in \mathbb{R}[X]/\ \forall x \in \mathbb{R}$, $h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}e^{-x}Q_k(x)$.

- Pour tout réel $x$, $h_n^{(0)}(x) = h_n(x) = x^n e^{-x} = x^{n-0}e^{-x} \times 1$. Le résultat est donc vrai pour $k = 0$ avec $Q_0 = 1$.
- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $\exists Q_k \in \mathbb{R}[X]/\ \forall x \in \mathbb{R}$, $h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}e^{-x}Q_k(x)$. Alors, pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned}h_n^{(k+1)}(x) &= (n-k)x^{n-k-1}e^{-x}Q_k(x) - x^{n-k}e^{-x}Q_k(x) + x^{n-k}e^{-x}Q_k'(x) = x^{n-k-1}e^{-x}((n-k-x)Q_k(x) + xQ_k'(x))\\ &= x^{n-(k+1)}e^{-x}Q_{k+1}(x)\end{aligned}$$

avec $Q_{k+1} = (n-k-X)Q_k + xQ_k' \in \mathbb{R}[X]$.

Le résultat est démontré par récurrence.

**4.2** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $n = 0$, $\varphi(L_0, P) = \int_0^{+\infty} L_0(x)P(x)e^{-x}\,dx = \frac{(-1)^0}{0!}\int_0^{+\infty} h_0^{(0)}(x)P^{(0)}(x)\,dx$. Le résultat est donc vrai quand $n = 0$. On suppose dorénavant $n \geqslant 1$.

Montrons par récurrence que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)\,dx$.

- $\varphi(L_n, P) = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{n!}h_n^{(n)}(x)P(x)e^{-x}\,dx = \frac{(-1)^0}{n!}h_n^{(n-0)}(x)P(x)\,dx$. Le résultat est donc vrai quand $p = 0$.
- Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)\,dx$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $h_n^{(n-p-1)}$ et $P^{(p)}$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^p}{n!}\int_0^A h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)\,dx &= \frac{(-1)^p}{n!}\left(\left[h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p)}(x)\right]_0^A - \int_0^A h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p+1)}(x)\,dx\right)\\ &= \frac{(-1)^p}{n!}\left(A^{p+1}e^{-A}Q_{n-p-1}(A) - 0^{p+1}e^0Q_{n-p-1}(0) - \int_0^A h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p+1)}(x)\,dx\right) \text{ (d'après 4.1)}\\ &= \frac{(-1)^p}{n!}\left(A^{p+1}e^{-A}Q_{n-p-1}(A) - \int_0^A h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p+1)}(x)\,dx\right) \text{ (car } p+1 \geqslant 1).\end{aligned}$$

Maintenant, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{A\to+\infty} A^{p+1}e^{-A}Q_{n-p-1}(A) = 0$ et donc, quand $A$ tend vers $+\infty$, on obtient

$$\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \times \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p+1)}(x)\,dx = \frac{(-1)^{p+1}}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-(p+1))}(x)P^{(p+1)}(x)\,dx.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

**5.** En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)P^{(n)}(x)\,dx$.

Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels tels que $m < n$. Alors, puisque $L_m$ est un polynôme de degré $m < n$, $\varphi(L_n, L_m) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)L_m^{(n)}(x)\,dx = 0$. On en déduit que les polynômes $L_n$ sont deux à deux orthogonaux.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question II.1, $L_n$ est un polynôme unitaire de degré $n$ et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$. Donc

$$\begin{aligned}\varphi(L_n, L_n) &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)L_n^{(n)}(x)\ dx = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \times n! \times \frac{(-1)^n}{n!}\ dx \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx = 1 \text{ (d'après la question III.3).}\end{aligned}$$

Finalement, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\varphi(L_n, L_m) = \delta_{n,m}$ et donc

$\boxed{(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille orthonormée de } (\mathbb{R}[X], \varphi).}$