

*Partie I : Première approche de la constante d'Euler*

1) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est continue et décroissante sur  $]0, +\infty[$  et donc sur  $[p, p+1]$ . Donc pour tout réel  $t$  de  $[p, p+1]$ , on a  $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$ . D'après l'inégalité, on a

$$\frac{1}{p+1} = (p+1-p) \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq (p+1-p) \frac{1}{p} = \frac{1}{p}.$$

On en déduit que  $0 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \leq a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ .

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$0 \leq \sum_{p=1}^n a_p = S_n \leq \sum_{p=1}^n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{somme télescopique}) \\ \leq 1.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $S_n \leq 1$  et donc la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est majorée. D'autre part, pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0.$$

Donc la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Etant majorée par 1, cette suite converge vers un réel noté  $\gamma$ . Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq S_n \leq 1$ , par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

3) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . En posant  $x = t + p$ , on obtient

$$a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{1}{t+p} dt = \int_0^1 \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{t+p} \right) dt = \int_0^1 \frac{t}{p(t+p)} dt = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p} dt.$$

Soit  $p \geq 2$ . Pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$ , on a  $0 < p-1 \leq p+t \leq p+1$  et donc  $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t+p} \leq \frac{1}{p-1}$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{2p(p+1)} = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{p+1} dt \leq \int_0^1 \frac{t}{t+p} dt = a_p \leq \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{p-1} dt = \frac{1}{2p(p-1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right).$$

4) Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels tels que  $m > n \geq 1$ . Alors  $S_m - S_n = \sum_{p=n+1}^m a_p$ . D'après la question précédente,

pour  $p \geq n+1 \geq 2$ ,  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq a_p \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$ . En additionnant membre à membre ces encadrements, on obtient

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) \sum_{p=n+1}^m \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq S_m - S_n \leq \sum_{p=n+1}^m \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right),$$

(sommes télescopiques). En faisant tendre  $m$  vers  $+\infty$  à  $n$  fixé, on obtient  $\frac{1}{2(n+1)} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$

5) Par suite, pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{n}{n+1} \leq 2n(\gamma - S_n) \leq 1$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n(\gamma - S_n) = 1$  ou encore  $\gamma - S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$  ou enfin  $\gamma - S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Maintenant,  $S_n = H_n - \ln(n+1)$  et donc

$$H_n = \ln(n+1) + S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(\gamma - \frac{1}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Soit  $n \geq 1$ . D'après la question 4),  $\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n}$  et donc

$$0 \leq \gamma - S_n - \frac{1}{2n+2} = \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Soit  $n \geq 1$ .

$$0 \leq \gamma - T_n < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2n(n+1)} < 10^{-2} \Leftrightarrow n(n+1) > 50 \Leftrightarrow n = 7.$$

Ainsi,  $T_7$  est une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-2}$  près et donc

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \ln(8) \leq \gamma < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \ln(8) + 10^{-2}.$$

Ceci fournit encore  $0,575\dots < \gamma < 0,575\dots + 10^{-2}$  et donc

$$0,57 < \gamma < 0,59 \text{ ou encore } \gamma = 0,58 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

(Ce dernier encadrement n'est pas d'amplitude  $10^{-2}$  mais fournit une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-2}$  près).

## Partie II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

1) a) La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ . De plus,  $\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$  et en particulier,  $\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . On en déduit que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$  est une intégrale absolument convergente et donc convergente.

De même, la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  est continue sur  $[1, +\infty[$  et négligeable en  $+\infty$  devant  $\frac{1}{t^2}$ . Par suite, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  est une intégrale absolument convergente et donc convergente.

Mais alors l'intégrale  $\int_1^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$  est une intégrale convergente.

b) Quand  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \left( \frac{1}{1 - \frac{t}{2} + o\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right) = \frac{1}{t} \left( 1 + \frac{t}{2} + o\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \right) \\ = \frac{1}{2} + o(1).$$

Donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2}$ . On en déduit que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2}$ .

c) Ainsi, la fonction  $t \mapsto e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$  est continue sur  $]0, 1]$  et se prolonge par continuité en 0. Par suite, l'intégrale  $\int_0^1 e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$  est une intégrale convergente.

Puisque les intégrales  $\int_0^1 e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$  et  $\int_1^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$  sont des intégrales convergentes,  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$  est une intégrale convergente.

2) a) Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs. Les fonctions  $t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}$  et  $t \mapsto \frac{e^{-bt}}{t}$  sont continues sur  $[x, y]$ . Donc, chacune des intégrales proposées existe.

En posant  $u = at$  dans la première intégrale (de sorte que  $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$ ) et  $v = bt$  dans la deuxième intégrale, on obtient

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_x^y \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-v}}{v} dv = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

b) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a \leq b$  et  $z$  un réel tel que  $z > 0$ . Alors  $0 < az \leq bz$ . Ensuite, pour tout réel  $t$  de  $[az, bz]$ ,  $e^{-bz} \leq e^{-t} \leq e^{-az}$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$e^{-bz} \ln \left( \frac{b}{a} \right) = \int_{az}^{bz} \frac{e^{-bz}}{t} dt \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-az}}{t} dt = e^{-az} \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

c) Quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures,  $e^{-bx} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$  et  $e^{-ax} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$  tendent vers  $\ln \left( \frac{b}{a} \right)$ . Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln \left( \frac{b}{a} \right)$ .

D'autre part, pour tout  $y > 0$ ,  $0 \leq \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-ay} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$  et comme  $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-ay} \ln \left( \frac{b}{a} \right) = 0$ , on en déduit que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0.$$

Quand  $0 < a \leq b$ , en faisant tendre  $x$  vers 0 puis  $y$  vers  $+\infty$  dans l'égalité de la question a), on obtient  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \left( \frac{b}{a} \right)$ . Cette égalité reste vraie si  $a > b$  en échangeant les rôles de  $a$  et  $b$  et on a donc montré que

$$\forall (a, b) \in ]0, +\infty[^2, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

### 3) Une première représentation intégrale de la constante d'Euler

a) Soit  $t > 0$ . On sait que pour tout réel  $q$  de l'intervalle  $] -1, 1[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$  et donc, puisque  $e^{-t} \in ]0, 1[ \subset ] -1, 1[$ ,

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}.$$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=0}^N (e^{-nt} - e^{-(n+1)t}) = 1 - e^{-(N+1)t}$  (somme télescopique). Maintenant,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-(N+1)t} = 0$  (car  $t > 0$ ).

On en déduit que la série numérique de terme général  $e^{-nt} - e^{-(n+1)t}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge et que  $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-nt} - e^{-(n+1)t}) = 1$  puis que

$$\frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) Mais alors

$$e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = e^{-t} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} \right).$$

c) La fonction  $t \mapsto e^{-t}$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée seconde à savoir la fonction  $t \mapsto e^{-t}$  est positive sur  $\mathbb{R}$ . Donc la fonction  $t \mapsto e^{-t}$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . Par suite, son graphe est au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0 ou encore  $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t} \geq 1 - t$ .

Si de plus  $t > 0$ , on a successivement  $t - (1 - e^{-t}) \geq 0$  puis  $1 - \frac{1 - e^{-t}}{t} \geq 0$  après division des deux membres par le réel strictement positif  $t$ .

d) Pour  $t > 0$ , posons  $u(t) = e^{-t} \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$  et pour  $t > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n(t) = e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}$ .

• Chaque fonction  $u_n, n \in \mathbb{N}$ , est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ . De plus, d'après la question précédente, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t > 0, u_n(t) = e^{-(n+1)t} \left( 1 - \frac{1 - e^{-t}}{t} \right) \geq 0$ . Donc chaque fonction  $u_n, n \in \mathbb{N}$ , est positive sur  $]0, +\infty[$ .

• La série de fonctions de terme général  $u_n, n \in \mathbb{N}$ , converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers la fonction  $u$  (d'après la question 3)b)) et la fonction  $u$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .

• Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $\int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} dt = \frac{1}{n+1} - \ln \left( \frac{n+2}{n+1} \right) = a_{n+1}$  (d'après

la question 2)c)). Par suite, pour  $n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^n \int_0^{+\infty} u_p(t) dt = \sum_{p=0}^n a_{p+1} = \sum_{p=1}^{n+1} a_p = S_{n+1}$ . D'après la partie I, la série

numérique de terme général  $\int_0^{+\infty} u_n(t) dt, n \in \mathbb{N}$ , converge et a pour somme  $\gamma$ .

D'après le théorème admis par l'énoncé en début de deuxième partie, on en déduit que la fonction  $u$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$\int_0^{+\infty} u(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \gamma.$$

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

#### 4) Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler

a) Soit  $y > 0$ . On a vu à la question II.1)a) que l'intégrale  $\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$  converge. De plus,

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = [\ln(1 - e^{-t})]_y^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-t}) - \ln(1 - e^{-y}) = -\ln(1 - e^{-y}).$$

Mais alors, quand  $y$  tend vers 0,

$$\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \ln y - \ln(1 - e^{-y}) = \ln \left( \frac{y}{1 - e^{-y}} \right) = \ln \left( \frac{y}{y + o(1)} \right) = \ln(1 + o(1)) = o(1).$$

Donc  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \right) = 0$ .

b) Soit  $y > 0$ . D'après la question 3)d),

$$\begin{aligned} \gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^y e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^y e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt. \end{aligned}$$

c) Par suite,  $\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt = \int_0^y e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \left( \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \right)$ .

Puisque  $\int_0^1 e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$  converge en 0, on en déduit que  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^y e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$ . D'autre part, d'après la question a),  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \right) = 0$  et finalement

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt \right) = 0.$$

d) La fonction  $t \mapsto e^{-t} \ln t$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et négligeable en  $+\infty$  devant  $\frac{1}{t^2}$  d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction  $t \mapsto e^{-t} \ln t$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

Quand  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures,  $e^{-t} \ln t \sim \ln t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ . On sait que la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  puisque  $\frac{1}{2} < 1$  et donc la fonction  $t \mapsto e^{-t} \ln t$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

Finalement la fonction  $t \mapsto e^{-t} \ln t$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Soient  $y$  et  $A$  deux réels tels que  $0 < y < A$ . Les deux fonctions  $t \mapsto -e^{-t}$  et  $t \mapsto \ln t$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $[y, A]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_y^A e^{-t} \ln t dt = [-e^{-t} \ln t]_y^A + \int_y^A \frac{e^{-t}}{t} dt = e^{-y} \ln y - e^{-A} \ln A + \int_y^A \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $\int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ . Quand  $y$  tend vers 0, on obtient  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$ .

e) Soit  $y > 0$ .

$$\gamma + \int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \left( \gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) + \left( \int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt - e^{-y} \ln y - \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) + (e^{-y} \ln y - \ln y).$$

D'après la question c),  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = 0$ .

D'après la question d),  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt - e^{-y} \ln y - \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = 0$ .

Enfin, quand  $y$  tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$e^{-y} \ln y - \ln y = (e^{-y} - 1) \ln y \sim -y \ln y,$$

et donc  $\lim_{y \rightarrow 0^+} (e^{-y} \ln y - \ln y) = 0$ . Finalement,  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \gamma + \int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt \right) = 0$  ou encore

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

### Partie III : Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1) a) D'après la question II.4.a),  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = -\ln(1-e^{-1})$ . D'autre part,

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt = [\ln t - \ln(1-e^{-t})]_0^1 = -\ln(1-e^{-1}) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \left( \frac{t}{1-e^{-t}} \right) = -\ln(1-e^{-1}).$$

Donc,  $\int_0^1 \left( \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = -\ln(1-e^{-1})$ .

b) D'après la question II.3)d) et au vu de la convergence de chacune des intégrales considérées,

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_0^1 e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_0^1 e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt + \int_0^1 \left( \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

2) a) Pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{H_k}{k!} \leq \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ . On en déduit que la série entière de somme  $F$  a un rayon de convergence infini et en particulier  $F$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus, la dérivée de  $F$  s'obtient par dérivation terme à terme.

b) Pour tout réel  $x > 0$ ,  $F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$  (car  $H_0 = 0$ ) et donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( H_k + \frac{1}{k+1} \right) x^k \\ &= F(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = F(x) + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = F(x) + \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = F(x) + \frac{e^x - 1}{x}. \end{aligned}$$

c) Soit  $x > 0$ . D'après ce qui précède,

$$(e^{-x}F)'(x) = e^{-x}(F'(x) - F(x)) = \frac{1-e^{-x}}{x}.$$

Maintenant, la fonction  $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$  est continue sur  $]0, x]$  et prolongeable par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur  $]0, x]$ . En intégrant sur  $]0, x]$ , on obtient

$$\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_0^x (e^{-t}F)'(t) dt = e^{-x}F(x) - e^0F(0) = e^{-x}F(x) - H_0 = e^{-x}F(x).$$

Finalement,

$$\forall x > 0, F(x) = e^x \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt.$$

3) Soit  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} \gamma + \ln x &= \left( \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) + \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_x^1 \frac{1}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= e^{-x}F(x) - \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = e^{-x}F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, \gamma + \ln x = e^{-x}F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

4) Soit  $k \geq an + 1$ . Alors  $H_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{k} \leq k$

$$\begin{aligned} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k &= \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{(an)! H_k}{k!} n^{k-(an+1)} \\ &\leq \frac{1}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{(an)! k}{k!} n^k = \frac{1}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{(an)!}{(k-1)!} n^k \\ &\leq \frac{1}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{1}{\underbrace{(an) \times \dots \times (an)}_{(k-1)-(an)}} n^k = \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{k-(an+1)} \\ &= \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{n^{an+1}}{(an)!} \frac{1}{1-\frac{1}{a}} \quad (\text{car } \left|\frac{1}{a}\right| < 1) \\ &\leq \frac{a}{a-1} \frac{n^{an+1}}{\left(\frac{na}{e}\right)^{an} \sqrt{2\pi an}} = \frac{a}{a-1} \frac{n}{\sqrt{2\pi an}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} = \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an}. \end{aligned}$$

5) Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $a$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. D'après la question 3),

$$\gamma + \ln n = e^{-n}F(n) - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k + e^{-n} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| &= \left| e^{-n} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right| \leq e^{-n} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &\leq \frac{a}{a-1} \frac{e^{-n} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{1}{n} \int_n^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{a}{a-1} \frac{e^{-n} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{e^{-n}}{n} \end{aligned}$$

6) On prend en particulier  $a = 3$  et on obtient pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\left| \gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{3n} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leq \frac{3}{2\sqrt{6\pi}} e^{-n} \sqrt{n} \left(\frac{e}{3}\right)^{3n} + \frac{e^{-n}}{n}.$$

La machine fournit  $\frac{3}{2\sqrt{6\pi}} e^{-21} \sqrt{21} \left(\frac{e}{3}\right)^{63} + \frac{e^{-21}}{21} < 10^{-10}$  et donc  $e^{-21} \sum_{k=1}^{63} \frac{H_k}{k!} 21^k - \ln(21)$  est une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-10}$  près.

### Partie IV : La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

1) a) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} v_p &= p \left( \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right) = p \left( \sum_{2^p \leq 2j < 2^{p+1}} \frac{1}{2j} - \sum_{2^p \leq 2j+1 < 2^{p+1}} \frac{1}{2j+1} \right) \\ &= p \left( \frac{1}{2} \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2j+1} \right) = p \left( \frac{1}{2} \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{j} - \left( \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h} - \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2j} \right) \right) \\ &= p \left( \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{j} - \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h} \right) = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p). \end{aligned}$$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\sum_{p=1}^n v_p = \sum_{p=1}^n p\sigma_{p-1} - \sum_{p=1}^n p\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)\sigma_p - \sum_{p=0}^n p\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} ((p+1) - p)\sigma_p - n\sigma_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} \left( \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h} \right) = \sum_{h=1}^{2^n-1} \frac{1}{h} = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d)

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n v_p &= \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n = H_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n(H_{2^{n+1}-1} - H_{2^n-1}) = H_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n \left( H_{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} - H_{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2^n) + \gamma - n(\ln(2^{n+1}) + \gamma - \ln(2^n) - \gamma) + o(1) = n \ln 2 - n \ln 2 + \gamma + o(1) = \gamma + o(1). \end{aligned}$$

Donc la série numérique de terme général  $v_p$ ,  $p \geq 1$ , converge et

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.}$$

2) a) Posons  $v_n = \frac{[\log_2 n]}{n}$ . Pour  $p \geq 1$ ,  $2^p = (1+1)^p = 1 + p + \dots > p$  et donc pour tout entier naturel non nul  $p$ ,

$$v_{2^p-1} - v_p = \frac{p-1}{2^p-1} - \frac{p}{2^p} = \frac{(p-1)2^p - p(2^p-1)}{2^p(2^p-1)} = \frac{p-2^p}{2^p(2^p-1)} < 0.$$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'est donc pas décroissante à partir d'un certain rang et on ne peut pas appliquer le critère spécial des séries alternées.

b) Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels tels que  $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$ .

Puisque la suite  $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante, on sait que la valeur absolue de la somme  $\sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k}$  est majorée par la

valeur absolue de son premier terme à savoir  $\frac{(-1)^{2^{n+1}}}{2^{n+1}}$ . Donc

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{2^{n+1}}}{2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Pour  $2^{n+1} \leq k \leq m < 2^{n+2}$ , on a  $n+1 \leq \log_2(k) < n+2$  et donc  $[\log_2(k)] = n+1$ . Par suite,

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| = (n+1) \left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soient  $m$  un entier naturel supérieur ou égal à 4. Soit  $n$  l'entier naturel tel que  $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$  c'est-à-dire  $n = [\log_2 m] - 1$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m u_k &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} u_k + \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k = \sum_{p=0}^n p \left( \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right) + \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \\ &= \sum_{p=0}^n v_p + \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k. \end{aligned}$$

Mais alors

$$\left| \sum_{k=1}^m u_k - \sum_{p=0}^n v_p \right| = \left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| \leq \frac{n}{2^n} = \frac{[\log_2 m] - 1}{2^{[\log_2 m] - 1}} \leq \frac{\log_2 m}{2^{\log_2 m - 2}} = \frac{4 \log_2 m}{m}.$$



D'après un théorème de croissances comparées,  $\frac{4 \log_2 m}{m}$  tend vers 0 quand  $m$  tend vers  $+\infty$  et d'après la question 1)d),

$\sum_{p=0}^n v_p = \sum_{p=0}^{[\log_2 m]-1} v_p$  tend vers  $\gamma$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que la suite  $\left( \sum_{k=1}^m u_k \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\gamma$ .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

**3) a)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque la suite  $\left( \frac{1}{k} \right)_{k \geq 2^n}$  tend vers 0 en décroissant,  $r_n$  existe d'après le critère spécial aux séries alternées. De plus, on sait que la valeur absolue de  $r_n$  est majorée par la valeur absolue du premier terme de la somme égale à  $r_n$  et donc  $|r_n| \leq \left| \frac{(-1)^{2^n}}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$ .

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|r_n| \leq \frac{1}{2^n}$  et donc la série de terme général  $r_n$  est absolument convergente.

**b)** Soit  $k \in \mathbb{N}$ .  $v_k = k \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^j}{j} = k(r_k - r_{k+1})$ . Soit alors  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k(r_k - r_{k+1}) = \sum_{k=1}^n k r_k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)r_k = \sum_{k=1}^n r_k - n r_{n+1}$$

avec  $|n r_{n+1}| \leq \frac{n}{2^{n+2}}$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n r_{n+1} = 0$ . En tenant compte de  $v_0 = 0$ , on a donc  $\sum_{k=1}^{+\infty} r_k = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \gamma$ .

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right),$$

car si  $n \geq 1$ ,  $2^n$  est un nombre pair et donc  $(-1)^{2^n+j} = (-1)^j$ .

### Partie V : La formule de Gosper (1972)

**1)**  $\forall x \in \mathcal{F}$ ,  $\Delta(x) = \text{Id}_{\mathcal{F}}(x) - T(x)$  et donc  $\Delta = \text{Id}_{\mathcal{F}} - T$ .

Soit alors  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathcal{F}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Puisque les endomorphismes  $\text{Id}_{\mathcal{F}}$  et  $T$  commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\Delta^n(x)[k] = (\text{Id}_{\mathcal{F}} - T)^n(x)[k] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} \Gamma^p(x)[k] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} x_{k+p}.$$

**2) a)** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour  $n \geq p+1$

$$0 \leq \frac{\binom{n}{p}}{2^n} = \frac{1}{p!} \times \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{2^n} \leq \frac{1}{p!} \times \frac{n^p}{2^n}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p!} \times \frac{n^p}{2^n} = 0$  d'après un théorème de croissances comparées, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} = 0$ .

**b)** Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \geq k$ ,  $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $k$  est dorénavant fixé. Pour  $n \geq k$ ,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p \right| &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} |u_p| = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k-1} \binom{n}{p} |u_p| + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k}^n \binom{n}{p} |u_p| \\
&< \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k-1} \binom{n}{p} |u_p| + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k}^n \binom{n}{p} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k-1} \binom{n}{p} |u_p| + \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| + \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{(1+1)^n}{2^n} \\
&= \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la question 1),  $\forall p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| = 0$  (somme d'un nombre fixe de suites de limites nulles). Par suite, il existe  $n_0 \geq k$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $\sum_{p=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Pour  $n \geq n_0$ , on a alors  $\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p < \varepsilon$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = 0$ .

c) Supposons maintenant que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un certain réel  $\ell$ . Alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. D'après la question b), il en est de même de la suite  $\left( \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} v_p \right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Maintenant, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} v_p &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (u_p - \ell) = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p - \left( \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \right) \ell \\
&= \left( \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p \right) - \frac{(1+1)^n}{2^n} \ell = \left( \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p \right) - \ell.
\end{aligned}$$

Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = \ell$ .

**3) a)** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}
V_N &= \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} x_p \right) \quad (\text{d'après la question V.1}) \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (u_p - u_{p-1}) \right) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p - \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_{p-1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p - \sum_{p=-1}^{n-1} \binom{n}{p+1} u_p \right) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p - \sum_{p=0}^n \binom{n}{p+1} u_p \right) \\
&\quad (\text{car } u_{-1} = 0 \text{ et } \binom{n}{n+1} = 0) \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^n \left( \binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) u_p \right) = \sum_{p=0}^N \left( \sum_{n=p}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left( \binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) \right) u_p \\
&= \sum_{p=0}^N \left( \sum_{n=p}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left( \left( \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1} \right) - \binom{n}{p+1} \right) \right) \quad (\text{car } \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}) \\
&= \sum_{p=0}^N \sum_{n=p}^N \left( \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{p+1} - \frac{1}{2^n} \binom{n}{p+1} \right) u_p = \sum_{p=0}^N \left( \frac{1}{2^{N+1}} \binom{N+1}{p+1} - \frac{1}{2^p} \binom{p}{p+1} \right) u_p \quad (\text{somme télescopique}) \\
&= \sum_{p=0}^N \frac{1}{2^{N+1}} \binom{N+1}{p+1} u_p.
\end{aligned}$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, V_N = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

b) Posons  $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \lim_{j \rightarrow +\infty} U_j$ . Pour tout entier naturel  $N$ ,

$$\sum_{k=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{p=0}^N \binom{N+1}{p+1} u_p = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N+1}{k} u_{k-1} = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} u_{k-1}.$$

Puisque  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{k-1} = S$ , la question 2)c) permet d'affirmer que la suite  $\left( \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} u_{k-1} \right)_{N \in \mathbb{N}}$  converge et que

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} u_{k-1} = S$  ou encore la série numérique de terme général  $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.$$

4) a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
\Delta^m(x)[0] &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{2^n + k} = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} x^{2^n+k-1} \right) dx = \int_0^1 x^{2^n-1} \left( \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} x^k \right) dx \\
&= \int_0^1 x^{2^n-1} (1-x)^m dx = \frac{(2^n-1)! m!}{(2^n+m)!} \quad (\text{d'après le résultat admis par l'énoncé}) \\
&= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\frac{(2^n+m)!}{(2^n)! m!}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, \Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}}.$$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque la suite  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} = \left( \frac{1}{2^n + j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 en décroissant, la série de terme général  $(-1)^j x_j$  converge d'après le critère spécial aux séries alternées. Mais alors la question précédente permet d'affirmer que la série de terme général  $\frac{\Delta^m[x](0)}{2^{m+1}}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  converge et que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} = \sum_{j=0}^n (-1)^j x_j = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Delta^m[x](0)}{2^{m+1}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}}.$$

Mais alors la question IV.3)b) permet d'affirmer que

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}}.$$

c) Par suite, la suite double positive  $\left( \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}} \right)_{n \geq 1, m \geq 0}$  est sommable et

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \sum_{m+n=p} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}} \right) = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left( \sum_{k+n=p} \frac{1}{2^{k+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + k}{k}} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k} + k}{k}} \right). \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k} + k}{k}} \right).$$