SESSION 2010

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Partie I : Première approche de la constante d'Euler

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[p, p+1]$. Donc pour tout réel t de $[p, p+1]$, on a $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$. D'après l'inégalité , on a

$$\frac{1}{p+1} = (p+1-p)\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\, dt \leqslant (p+1-p) = \frac{1}{p}.$$

On en déduit que $0 = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p} \leqslant a_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{p=1}^{n} a_p = S_n &\leqslant \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ (somme télescopique)} \\ &\leqslant 1. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $S_n \leqslant 1$ et donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0.$$

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croisante. Etant majorée par 1, cette suite converge vers un réel noté γ. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant S_n \leqslant 1$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = t + p$, on obtient

$$a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{1}{t+p}\, dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t+p}\right) dt = \int_0^1 \frac{t}{p(t+p)}\, dt = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t}{t+p}\, dt.$$

Soit $p \geqslant 2$. Pour tout réel t de $[0,1]$, on a $0 < p-1 \leqslant p+t \leqslant p+1$ et donc $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t+p} \leqslant \dfrac{1}{p-1}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2p(p+1)} = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t}{p+1}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t+p}\, dt = a_p \leqslant \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t}{p-1} = \frac{1}{2p(p-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4) Soient n et m deux entiers naturels tels que $m > n \geqslant 1$. Alors $S_m - S_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{m} a_p$. D'après la question précédente, pour $p \geqslant n+1 \geqslant 2$, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p}\right)$. En additionnant membre à membre ces encadrements, on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) \sum_{p=n+1}^{m} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant S_m - S_n \leqslant \sum_{p=n+1}^{m} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right),$$

(sommes télescopiques). En faisant tendre m vers $+\infty$ à n fixé, on obtient $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}.}$$

5) Par suite, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 2n(\gamma - S_n) \leqslant 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n(\gamma - S_n) = 1$ ou encore $\gamma - S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ ou enfin $\gamma - S_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Maintenant, $S_n = H_n - \ln(n+1)$ et donc

$$H_n = \ln(n+1) + S_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(\gamma - \frac{1}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

6) Soit $n \geqslant 1$. D'après la question 4), $\dfrac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - T_n \leqslant \dfrac{1}{2n}$ et donc

$$0 \leqslant \gamma - S_n - \frac{1}{2n+2} = \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Soit $n \geqslant 1$.

$$0 \leqslant \gamma - T_n < 10^{-2} \Leftarrow \frac{1}{2n(n+1)} < 10^{-2} \Leftarrow n(n+1) > 50 \Leftarrow n = 7.$$

Ainsi, T_7 est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près et donc

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \ln(8) \leqslant \gamma < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \ln(8) + 10^{-2}.$$

Ceci fournit encore $0,575\ldots < \gamma < 0,575\ldots + 10^{-2}$ et donc

$$\boxed{0,57 < \gamma < 0,59 \text{ ou encore } \gamma = 0,58 \text{ à } 10^{-2} \text{ près .}}$$

(Ce dernier encadrement n'est pas d'amplitude 10^{-2} mais fournit une valeur approchée de γ à 10^{-2} près).

Partie II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

1) a) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$. De plus, $\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$ et en particulier, $\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt$ est une intégrale absolument convergente et donc convergente.

De même, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est une intégrale absolument convergente et donc convergente.

Mais alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}\,dt - \frac{1}{t}\right)dt$ est une intégrale convergente.

b) Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{1 - \left(1 - t + \dfrac{t^2}{2} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right)} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{t}{2} + o\left(\dfrac{1}{t}\right)} - 1\right) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t}{2} + o\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right)$$
$$= \frac{1}{2} + o(1).$$

Donc $\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}$. On en déduit que $\lim_{t\to 0^+} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}$.

c) Ainsi, la fonction $t\mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0. Par suite, l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}\,dt-\frac{1}{t}\right)dt$ est une intégrale convergente.

Puisque les intégrales $\int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}\,dt-\frac{1}{t}\right)dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}\,dt-\frac{1}{t}\right)dt$ sont des intégrales convergentes, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}\,dt-\frac{1}{t}\right)dt$ est une intégrale convergente.

2) a) Soient x et y deux réels strictement positifs. Les fonctions $t\mapsto\frac{e^{-at}}{t}$ et $t\mapsto\frac{e^{-bt}}{t}$ sont continues sur $[x,y]$. Donc, chacune des intégrales proposées existe.
En posant $u=at$ dans la première intégrale (de sorte que $\frac{dt}{t}=\frac{du}{u}$) et $v=bt$ dans la deuxième intégrale, on obtient

$$\int_x^y\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\int_x^y\frac{e^{-at}}{t}\,dt-\int_x^y\frac{e^{-bt}}{t}\,dt=\int_{ax}^{ay}\frac{e^{-u}}{u}\,du-\int_{bx}^{by}\frac{e^{-v}}{v}\,dv=\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}\,dt-\int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

b) Soient a et b deux réels tels que $0<a\leqslant b$ et z un réel tel que $z>0$. Alors $0<az\leqslant bz$. Ensuite, pour tout réel t de $[az,bz]$, $e^{-bz}\leqslant e^{-t}\leqslant e^{-az}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$e^{-bz}\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\int_{az}^{bz}\frac{e^{-bz}}{t}\,dt\leqslant\int_{az}^{bz}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\leqslant\int_{az}^{bz}\frac{e^{-az}}{t}\,dt=e^{-az}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

c) Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $e^{-bx}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ et $e^{-ax}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ tendent vers $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

D'autre part, pour tout $y>0$, $0\leqslant\int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\leqslant e^{-ay}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ et comme $\lim_{y\to+\infty}e^{-ay}\ln\left(\frac{b}{a}\right)=0$, on en déduit que $\lim_{y\to+\infty}\int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=0$.

Quand $0<a\leqslant b$, en faisant tendre x vers 0 puis y vers $+\infty$ dans l'égalité de la question a), on obtient $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Cette égalité reste vraie si $a>b$ en échangeant les rôles de a et b et on a donc montré que

$$\boxed{\forall(a,b)\in]0,+\infty[^2,\ \int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\ln\left(\frac{b}{a}\right).}$$

3) Une première représentation intégrale de la constante d'Euler

a) Soit $t>0$. On sait que pour tout réel q de l'intervalle $]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$ et donc, puisque $e^{-t}\in]0,1[\subset]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-e^{-t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-t}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt}.$$

Soit $N\in\mathbb{N}$. $\sum_{n=0}^{N}\left(e^{-nt}-e^{-(n+1)t}\right)=1-e^{-(N+1)t}$ (somme télescopique). Maintenant, $\lim_{N\to+\infty}e^{-(N+1)t}=0$ (car $t>0$).

On en déduit que la série numérique de terme général $e^{-nt}-e^{-(n+1)t}$, $n\in\mathbb{N}$, converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-nt}-e^{-(n+1)t}\right)=1$ puis que

$$\frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) Mais alors

$$e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = e^{-t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\right).$$

c) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde à savoir la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Par suite, son graphe est au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0 ou encore $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t} \geqslant 1 - t$.

Si de plus $t > 0$, on a successivement $t - (1 - e^{-t}) \geqslant 0$ puis $1 - \dfrac{1 - e^{-t}}{t} \geqslant 0$ après division des deux membres par le réel strictement positif t.

d) Pour $t > 0$, posons $u(t) = e^{-t}\left(\dfrac{1}{1-e^{-t}} - \dfrac{1}{t}\right)$ et pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(t) = e^{-(n+1)t} - \dfrac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}$.

• Chaque fonction u_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. De plus, d'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, $u_n(t) = e^{-(n+1)t}\left(1 - \dfrac{1 - e^{-t}}{t}\right) \geqslant 0$. Donc chaque fonction u_n, $n \in \mathbb{N}$, est positive sur $]0, +\infty[$.

• La série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction u (d'après la question 3)b)) et la fonction u est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\, dt = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = a_{n+1}$ (d'après la question 2)c)). Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \int_0^{+\infty} u_p(t)\, dt = \sum_{p=0}^{n} a_{p+1} = \sum_{p=1}^{n+1} a_p = S_{n+1}$. D'après la partie I, la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt$, $n \in \mathbb{N}$, converge et a pour somme γ.

D'après le théorème admis par l'énoncé en début de deuxième partie, on en déduit que la fonction u est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} u(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt = \gamma.$$

$$\boxed{\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.}$$

4) Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler

a) Soit $y > 0$. On a vu à la question II.1)a) que l'intégrale $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt$ converge. De plus,

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt = \left[\ln(1-e^{-t})\right]_y^{+\infty} = \lim_{t \to +\infty} \ln(1-e^{-t}) - \ln(1-e^{-y}) = -\ln(1-e^{-y}).$$

Mais alors, quand y tend vers 0,

$$\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt = \ln y - \ln(1-e^{-y}) = \ln\left(\frac{y}{1-e^{-y}}\right) = \ln\left(\frac{y}{y + o(1)}\right) = \ln(1 + o(1)) = o(1).$$

Donc $\displaystyle\lim_{y \to 0^+}\left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt\right) = 0$.

b) Soit $y > 0$. D'après la question 3)d),

$$\begin{aligned}\gamma+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\\ &= \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_y^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\\ &= \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt.\end{aligned}$$

c) Par suite, $\gamma+\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{t}}{t}\,dt=\int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt+\left(\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt\right)$.

Puisque $\int_0^{1} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt$ converge en 0, on en déduit que $\lim_{y\to 0^+}\int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt=0$. D'autre part, d'après la question a), $\lim_{y\to 0^+}\left(\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt\right)=0$ et finalement

$$\boxed{\lim_{y\to 0^+}\left(\gamma+\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{t}}{t}\,dt\right)=0.}$$

d) La fonction $t\mapsto e^{-t}\ln t$ est continue sur $]0,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t\mapsto e^{-t}\ln t$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $e^{-t}\ln t\sim\ln t=o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. On sait que la fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ puisque $\frac{1}{2}<1$ et donc la fonction $t\mapsto e^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,1]$.
Finalement la fonction $t\mapsto e^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soient y et A deux réels tels que $0<y<A$. Les deux fonctions $t\mapsto -e^{-t}$ et $t\mapsto\ln t$ sont de classe C^1 sur le segment $[y,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_y^{A} e^{-t}\ln t\,dt=\left[-e^{-t}\ln t\right]_y^{A}+\int_y^{A}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=e^{-y}\ln y-e^{-A}\ln A+\int_y^{A}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\int_y^{+\infty} e^{-t}\ln t\;dt=e^{-y}\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Quand y tend vers 0, on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt=\lim_{y\to 0^+}\left(e^{-y}\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)$.

e) Soit $y>0$.

$$\gamma+\int_y^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt=\left(\gamma+\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)+\left(\int_y^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt-e^{-y}\ln y-\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)+(e^{-y}\ln y-\ln y).$$

D'après la question c), $\lim_{y\to 0^+}\left(\gamma+\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)=0$.
D'après la question d), $\lim_{y\to 0^+}\left(\int_y^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt-e^{-y}\ln y-\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)=0$.
Enfin, quand y tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$e^{-y}\ln y-\ln y=(e^{-y}-1)\ln y\sim -y\ln y,$$

et donc $\lim_{y\to 0^+}(e^{-y}\ln y-\ln y)=0$. Finalement, $\lim_{y\to 0^+}\left(\gamma+\int_y^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt\right)=0$ ou encore

$$\boxed{\gamma=-\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt.}$$

Partie III : Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1) a) D'après la question II.4.a), $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt = -\ln(1-e^{-1})$. D'autre part,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt\right) = \left[\ln t - \ln(1-e^{-t})\right]_0^1 = -\ln(1-e^{-1}) - \lim_{t\to 0^+} \ln\left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right) = -\ln(1-e^{-1}).$$

Donc, $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt = -\ln(1-e^{-1})$.

b) D'après la question II.3)d) et au vu de la convergence de chacune des intégrales considérées,

$$\begin{aligned}
\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt = \int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt \\
&= \int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right) dt + \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \text{ (d'après la question précédente)} \\
&= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.}$$

2) a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{H_k}{k!} \leqslant \dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$. On en déduit que la série entière de somme F a un rayon de convergence infini et en particulier F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, la dérivée de F s'obtient par dérivation terme à terme.

b) Pour tout réel $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$ (car $H_0 = 0$) et donc

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right) x^k \\
&= F(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = F(x) + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = F(x) + \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = F(x) + \frac{e^x - 1}{x}.
\end{aligned}$$

c) Soit $x > 0$. D'après ce qui précède,

$$(e^{-x}F)'(x) = e^{-x}(F'(x) - F(x)) = \frac{1-e^{-x}}{x}.$$

Maintenant, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur $]0, x]$. En intégrant sur $]0, x]$, on obtient

$$\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt = \int_0^x (e^{-t}F)'(t)\,dt = e^{-x}F(x) - e^0F(0) = e^{-x}F(x) - H_0 = e^{-x}F(x).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x > 0,\ F(x) = e^x \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt.}$$

3) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\gamma + \ln x &= \left(\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right) + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt + \int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \\
&= e^{-x}F(x) - \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = e^{-x}F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \gamma + \ln x = e^{-x}F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\ dt.}$$

4) Soit $k \geqslant an+1$. Alors $H_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{k} \leqslant k$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!}n^k &= \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{(an)!H_k}{k!}n^{k-(an+1)} \\
&\leqslant \frac{1}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{(an)!k}{k!}n^k = \frac{1}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{(an)!}{(k-1)!}n^k \\
&\leqslant \frac{1}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{1}{\underbrace{(an)\times\ldots\times(an)}_{(k-1)-(an)}}n^k = \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{k-(an+1)} \\
&= \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{n^{an+1}}{(an)!} \frac{1}{1-\frac{1}{a}}\ \left(\text{car } \left|\frac{1}{a}\right| < 1\right) \\
&\leqslant \frac{a}{a-1} \frac{n^{an+1}}{\left(\frac{na}{e}\right)^{an}\sqrt{2\pi an}} = \frac{a}{a-1}\frac{n}{\sqrt{2\pi an}}\left(\frac{e}{a}\right)^{an} = \frac{a}{a-1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{e}{a}\right)^{an}.
\end{aligned}$$

5) Soient n un entier naturel non nul et a un entier naturel supérieur ou égal à 2. D'après la question 3),

$$\gamma + \ln n = e^{-n}F(n) - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\ dt = e^{-n}\sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!}n^k + e^{-n}\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!}n^k - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\ dt,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left|\gamma + \ln n - e^{-n}\sum_{k=0}^{an}\frac{H_k}{k!}n^k\right| &= \left|e^{-n}\sum_{k=an+1}^{+\infty}\frac{H_k}{k!}n^k - \int_n^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\ dt\right| \leqslant e^{-n}\sum_{k=an+1}^{+\infty}\frac{H_k}{k!}n^k + \int_n^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\ dt \\
&\leqslant \frac{a}{a-1}\frac{e^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{1}{n}\int_n^{+\infty} e^{-t}\ dt = \frac{a}{a-1}\frac{e^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{e^{-n}}{n}
\end{aligned}$$

6) On prend en particulier $a = 3$ et on obtient pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\left|\gamma + \ln n - e^{-n}\sum_{k=0}^{3n}\frac{H_k}{k!}n^k\right| \leqslant \frac{3}{2\sqrt{6\pi}}e^{-n}\sqrt{n}\left(\frac{e}{3}\right)^{3n} + \frac{e^{-n}}{n}.$$

La machine fournit $\frac{3}{2\sqrt{6\pi}}e^{-21}\sqrt{21}\left(\frac{e}{3}\right)^{63} + \frac{e^{-21}}{21} < 10^{-10}$ et donc $e^{-21}\sum_{k=1}^{63}\frac{H_k}{k!}21^k - \ln(21)$ est une valeur approchée de γ à 10^{-10} près.

Partie IV : La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

1) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_p = p\left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{(-1)^k}{k}\right) &= p\left(\sum_{2^p\leqslant 2j<2^{p+1}}\frac{1}{2j} - \sum_{2^p\leqslant 2j+1<2^{p+1}}\frac{1}{2j+1}\right) \\
&= p\left(\frac{1}{2}\sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{j} - \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{2j+1}\right) = p\left(\frac{1}{2}\sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{j} - \left(\sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{h} - \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{2j}\right)\right) \\
&= p\left(\sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{j}\sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{h}\right) = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p).
\end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=1}^{n} p\sigma_{p-1} - \sum_{p=1}^{n} p\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1}(p+1)\sigma_p - \sum_{p=0}^{n} p\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1}((p+1)-p)\sigma_p - n\sigma_n = \sum_{p=0}^{n-1}\sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{p=0}^{n-1}\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{h}\right) = \sum_{h=1}^{2^{-1}}\frac{1}{h} = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d)

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n-1}\sigma_p - n\sigma_n &= H_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n\left(H_{2^{n+1}-1} - H_{2^n-1}\right) = H_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n\left(H_{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} - H_{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2^n) + \gamma - n\left(\ln(2^{n+1}) + \gamma - \ln(2^n) - \gamma\right) + o(1) = n\ln 2 - n\ln 2 + \gamma + o(1) = \gamma + o(1).\end{aligned}$$

Donc la série numérique de terme général v_p, $p \geqslant 1$, converge et

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.}$$

2) a) Posons $v_n = \dfrac{[\log_2 n]}{n}$. Pour $p \geqslant 1$, $2^p = (1+1)^p = 1 + p + \ldots > p$ et donc pour tout entier naturel non nul p,

$$v_{2^p-1} - v_p = \frac{p-1}{2^p-1} - \frac{p}{2^p} = \frac{(p-1)2^p - p(2^p-1)}{2^p(2^p-1)} = \frac{p-2^p}{2^p(2^p-1)} < 0.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est donc pas décroissante à partir d'un certain rang et on ne peut pas appliquer le critère spécial des séries alternées.

b) Soient n et m deux entiers naturels tels que $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$.

Puisque la suite $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, on sait que la valeur absolue de la somme $\displaystyle\sum_{k=2^{n+1}}^{m}\frac{(-1)^k}{k}$ est majorée par la valeur absolue de son premier terme à savoir $\dfrac{(-1)^{2^{n+1}}}{2^{n+1}}$. Donc

$$\left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m}\frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Pour $2^{n+1} \leqslant k \leqslant m < 2^{n+2}$, on a $n+1 \leqslant \log_2(k) < n+2$ et donc $[\log_2(k)] = n+1$. Par suite,

$$\left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k\right| = (n+1)\left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m}\frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soient m un entier naturel supérieur ou égal à 4. Soit n l'entier naturel tel que $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$ c'est-à-dire $n = [\log_2 m] - 1$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} u_k + \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k &= \sum_{p=0}^{n} p\left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{(-1)^k}{k}\right) + \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k\\ &= \sum_{p=0}^{n} v_p + \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k.\end{aligned}$$

Mais alors

$$\left|\sum_{k=1}^{m} u_k - \sum_{p=0}^{n} v_p\right| = \left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k\right| \leqslant \frac{n}{2^n} = \frac{[\log_2 m]-1}{2^{[\log_2 m]-1}} \leqslant \frac{\log_2 m}{2^{\log_2 m - 2}} = \frac{4\log_2 m}{m}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\dfrac{4\log_2 m}{m}$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$ et d'après la question 1)d), $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{[\log_2 m]-1} v_p$ tend vers γ quand m tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} u_k\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.}$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\geqslant 2^n}$ tend vers 0 en décroissant, r_n existe d'après le critère spécial aux séries alternées. De plus, on sait que la valeur absolue de r_n est majorée par la valeur absolue du premier terme de la somme égale à r_n et donc $|r_n| \leqslant \left|\dfrac{(-1)^{2^n}}{2^n}\right| = \dfrac{1}{2^n}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $|r_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et donc la série de terme général r_n est absolument convergente.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $v_k = k\displaystyle\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \dfrac{(-1)^j}{j} = k(r_k - r_{k+1})$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k(r_k - r_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} kr_k - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - nr_{n+1}$$

avec $|nr_{n+1}| \leqslant \dfrac{n}{2^{n+2}}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nr_{n+1} = 0$. En tenant compte de $v_0 = 0$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} r_k = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \gamma$.

$$\boxed{\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=2^n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{2^n+j}\right),}$$

car si $n \geqslant 1$, 2^n est un nombre pair et donc $(-1)^{2^n+j} = (-1)^j$.

Partie V : La formule de Gosper (1972)

1) $\forall x \in \mathcal{F}$, $\Delta(x) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}(x) - T(x)$ et donc $\Delta = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}} - T$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathcal{F}$ et $k \in \mathbb{N}$. Puisque les endomorphismes $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ et T commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\Delta^n(x)[k] = (\mathrm{Id}_{\mathcal{F}} - T)^n(x)[k] = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}T^p(x)[k] = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}x_{k+p}.$$

2) a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant p+1$

$$0 \leqslant \frac{\binom{n}{p}}{2^n} = \frac{1}{p!}\times\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{2^n} \leqslant \frac{1}{p!}\times\frac{n^p}{2^n}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p!}\times\frac{n^p}{2^n} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{n}{p}}{2^n} = 0$.
b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant k$, $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. k est dorénavant fixé. Pour $n \geqslant k$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right| &\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}|u_p| = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k-1}\binom{n}{p}|u_p| + \frac{1}{2^n}\sum_{p=k}^{n}\binom{n}{p}|u_p| \\ &< \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k-1}\binom{n}{p}|u_p| + \frac{1}{2^n}\sum_{p=k}^{n}\binom{n}{p}\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k-1}\binom{n}{p}|u_p| + \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{\varepsilon}{2} = \sum_{p=0}^{k-1}\frac{\binom{n}{p}}{2^n}|u_p| + \frac{\varepsilon}{2}\times\frac{(1+1)^n}{2^n} \\ &= \sum_{p=0}^{k-1}\frac{\binom{n}{p}}{2^n}|u_p| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la question 1), $\forall p \in [\![0, k-1]\!]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{n}{p}}{2^n}|u_p| = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{k-1}\frac{\binom{n}{p}}{2^n}|u_p| = 0$ (somme d'un nombre fixe de suites de limites nulles). Par suite, il existe $n_0 \geqslant k$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{k-1}\frac{\binom{n}{p}}{2^n}|u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geqslant n_0$, on a alors $\displaystyle\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p < \varepsilon$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p = 0$.

c) Supposons maintenant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. D'après la question b), il en est de même de la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}v_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}v_p &= \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(u_p - \ell) = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p - \left(\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\right)\ell \\ &= \left(\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right) - \frac{(1+1)^n}{2^n}\ell = \left(\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right) - \ell.\end{aligned}$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p = \ell$.

3) a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
V_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x_p \right) \text{ (d'après la question V.1))} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (U_p - U_{p-1}) \right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} U_p - \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} U_{p-1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} U_p - \sum_{p=-1}^{n-1} \binom{n}{p+1} U_p \right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} U_p - \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p+1} U_p \right) \\
&\text{(car } U_{-1} = 0 \text{ et } \binom{n}{n+1} = 0) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) U_p \right) = \sum_{p=0}^{N} \left(\sum_{n=p}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) \right) U_p \\
&= \sum_{p=0}^{N} \left(\sum_{n=p}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\left(\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1} \right) - \binom{n}{p+1} \right) \right) \text{ (car } \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}) \\
&= \sum_{p=0}^{N} \sum_{n=p}^{N} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{p+1} - \frac{1}{2^n} \binom{n}{p+1} \right) U_p = \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{2^{N+1}} \binom{N+1}{p+1} - \frac{1}{2^p} \binom{p}{p+1} \right) U_p \text{ (somme télescopique)} \\
&= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{2^{N+1}} \binom{N+1}{p+1} U_p.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ V_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.}
$$

b) Posons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \lim_{j \to +\infty} U_j$. Pour tout entier naturel N,

$$
\sum_{k=0}^{N} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{p=0}^{N} \binom{N+1}{p+1} U_p = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N+1}{k} U_{k-1} = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} U_{k-1}.
$$

Puisque $\lim_{k \to +\infty} U_{k-1} = S$, la question 2)c) permet d'affirmer que la suite $\left(\frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} U_{k-1} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge et que $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} U_{k-1} = S$ ou encore la série numérique de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et

$$
\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.}
$$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\Delta^m(x)[0] &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{2^n + k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} x^{2^n + k - 1} \right) dx = \int_0^1 x^{2^n - 1} \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} x^k \right) dx \\
&= \int_0^1 x^{2^n - 1} (1 - x)^m \, dx = \frac{(2^n - 1)! m!}{(2^n + m)!} \text{ (d'après le résultat admis par l'énoncé)} \\
&= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\frac{(2^n + m)!}{(2^n)! m!}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}}.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n+j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant, la série de terme général $(-1)^j x_j$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées. Mais alors la question précédente permet d'affirmer que la série de terme général $\frac{\Delta^m[x](0)}{2^{m+1}}$, $m \in \mathbb{N}$ converge et que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n+j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x_j = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Delta^m[x](0)}{2^{m+1}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

Mais alors la question IV.3)b) permet d'affirmer que

$$\boxed{\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.}$$

c) Par suite, la suite double positive $\left(\frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}\right)_{n\geqslant 1,\ m\geqslant 0}$ est sommable et

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{m+n=p} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{k+n=p} \frac{1}{2^{k+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+k}{k}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}\right).}$$

